

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

SAMUEL EILENBERG

## **La suite spectrale. I : construction générale**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 3 (1950-1951), exp. n° 8, p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1950-1951\\_\\_3\\_\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A8_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1950-1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN,  
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique

LA SUITE SPECTRALE. I : CONSTRUCTION GÉNÉRALE.  
(Exposé de Samuel EILENBERG, le 22.1.1951).

### 1.- Fondations.

Nous considérerons un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle), notée  $A < B$ , qui est réflexive ( $A < A$ ) et transitive ( $A < B$  et  $B < C$  entraînent  $A < C$ ). On supposera que l'ensemble contient un plus petit élément, noté  $0$ , et un plus grand élément, noté  $1$ ; on a donc  $0 < A < 1$  pour tout  $A$ . Nous considérerons des paires  $(A, B)$  où  $B < A$ , et nous écrirons  $(A, B) < (A', B')$  lorsque  $A < A'$  et  $B < B'$ . De même, nous considérerons des triples  $(A, B, C)$  où  $C < B < A$ , et nous écrirons  $(A, B, C) < (A', B', C')$  lorsque  $A < A'$ ,  $B < B'$ , et  $C < C'$ . Le triple  $(A, B, 0)$  sera identifié à la paire  $(A, B)$ , et la paire  $(A, 0)$  sera identifiée à l'élément  $A$ .

Nous supposerons qu'à toute paire  $(A, B)$  l'on ait associé un groupe abélien (ou un module sur un anneau), noté  $H(A, B)$ , qu'à toute inégalité  $(A, B) < (A', B')$  l'on ait associé un homomorphisme  $H(A, B) \rightarrow H(A', B')$ , et qu'à tout triple  $(A, B, C)$  l'on ait associé un homomorphisme  $d : H(A, B) \rightarrow H(B, C)$ .

Ces trois termes primitifs seront assujettis aux axiomes suivants :

(H.1)  $H(A, B) \rightarrow H(A, B)$  est l'identité .

(H.2) Si  $(A, B) < (A', B') < (A'', B'')$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H(A, B) & \longrightarrow & H(A'', B'') \\ & \searrow & \nearrow \\ & & H(A', B') \end{array}$$

(H.3) Si  $(A, B, C) < (A', B', C')$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H(A, B) & \xrightarrow{d} & H(B, C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(A', B') & \xrightarrow{d} & H(B', C') \end{array}$$

(H.4) Pour tout triple  $(A, B, C)$ , les inégalités  $(B, C) < (A, C) < (A, B)$  donnent lieu à la suite exacte :

$$\dots \rightarrow H(A, B) \xrightarrow{d} H(B, C) \longrightarrow H(A, C) \longrightarrow H(A, B) \xrightarrow{d} H(B, C) \longrightarrow \dots$$

Le fait que  $H(A) \longrightarrow H(A)$  est un isomorphisme, joint à l'exactitude de la suite :

$$H(A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A, A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A)$$

entraîne :

$$(1.1) \quad H(A, A) = 0$$

Remarque : Il suffit de supposer que l'homomorphisme  $d$  :  $H(A, B) \longrightarrow H(B, C)$  est défini seulement pour les paires, c'est-à-dire quand  $C = 0$ . Les axiomes (H.3) et (H.4) devront être énoncés avec  $C$  (et  $C'$ ) égal à 0. On pourra alors définir  $d : H(A, B) \longrightarrow H(B, C)$  pour un triple  $(A, B, C)$  par la composition des homomorphismes :

$$H(A, B) \xrightarrow{d} H(B) \longrightarrow H(B, C),$$

et l'on pourra démontrer les axiomes (H.3) et (H.4) sous la forme énoncée plus haut.

## 2.- Les suites fondamentales.

Supposons maintenant que, dans notre ensemble partiellement ordonné, nous nous soyons donné un élément  $A$ , et une suite  $A_p$  ( $-\infty < p < +\infty$ ) telle que :

$$\dots < A_p < A_{p+1} < \dots < A.$$

Les groupes ci-dessous sont définis comme noyau-image du groupe du milieu de la suite exacte à trois termes écrite à droite :

$$\begin{array}{l} B_p : \quad H(A_p) \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A, A_p) \\ C_p : \quad H(A_p) \longrightarrow H(A_p, A_{p-1}) \longrightarrow H(A_{p-1}) \\ D_p : \quad H(A, A_p) \xrightarrow{d} H(A_p, A_{p-1}) \longrightarrow H(A, A_{p-1}) \\ C_p^k : \quad H(A_p, A_{p-k}) \longrightarrow H(A_p, A_{p-1}) \xrightarrow{d} H(A_{p-1}, A_{p-k}) \\ D_p^k : \quad H(A_{p+k-1}, A_p) \xrightarrow{d} H(A_p, A_{p-1}) \longrightarrow H(A_{p+k-1}, A_{p-1}) \end{array}$$

(avec  $k = 1, 2, \dots$ ). Si nous convenons de poser  $A_{-\infty} = 0$  et  $A_{+\infty} = A$ , alors  $C_p = C_p^{\infty}$  et  $D_p = D_p^{\infty}$ . Nous avons les relations suivantes :

$$(2.1) \quad \dots \subset B_{p-1} \subset B_p \subset \dots \subset H(A)$$

$$(2.2) \quad 0 = D_p^1 \subset \dots \subset D_p^k \subset D_p^{k+1} \subset \dots \subset D_p \subset C_p \subset \dots \subset C_p^{k+1} \subset C_p^k \subset \dots \subset C_p^1 = H(A_p, A_{p-1})$$

Ces inclusions proviennent des relations de commutation dans les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 H(A_{p-1}) & \longrightarrow & H(A) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & H(A_p) & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H(A_p, A_{p-1}) & \longrightarrow & H(A_{p+k-1}, A_{p-1}) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & H(A_{p+k-1}, A_{p-1}) & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H(A_p, A_{p-1}) & \longrightarrow & H(A, A_{p-1}) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & H(A_{p+k}, A_{p-1}) & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H(A, A_p) & \xrightarrow{d} & H(A_p, A_{p-1}) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & H(A_p) & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H(A_p) & \longrightarrow & H(A_p, A_{p-1}) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & H(A_p, A_{p-k}) & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H(A_p, A_{p-k-1}) & \longrightarrow & H(A_p, A_{p-1}) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & H(A_p, A_{p-k}) & 
 \end{array}$$

Posons

$$(2.3) \quad E_p = C_p / D_p \quad \text{et} \quad E_p^k = C_p^k / D_p^k .$$

En particulier, on a :

$$(2.4) \quad E_p^1 = H(A_p, A_{p-1}) .$$

Démontrons maintenant :

$$(2.5) \quad E_p \approx B_p / B_{p-1} .$$

Cet isomorphisme résulte directement du diagramme ci-dessous, dont toutes les lignes et toutes les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H(A_p, A_{p-1}) & \longrightarrow & H(A, A_p) & \xrightarrow{d} & D_p & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H(A_{p-1}) & \longrightarrow & H(A_p) & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 B_{p-1} & \longrightarrow & B_p & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & & & & 
 \end{array}$$

Nous considérerons maintenant le diagramme suivant :

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccc}
 H(A_p, A_{p-k}) & \xrightarrow{\alpha} & H(A_p, A_{p-1}) \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\
 H(A_{p-k}, A_{p-k-1}) & \xrightarrow{\beta} & H(A_{p-1}, A_{p-k-1})
 \end{array}$$

Nous avons :

$$\text{Image de } \alpha = C_p^k \supset C_p^{k+1} = \text{Noyau de } \delta$$

$$\text{Image de } \gamma = D_{p-k}^{k+1} \supset D_{p-k}^k = \text{Noyau de } \beta$$

Pour tout  $x \in C_p^k$ , choisissons un  $y \in H(A_p, A_{p-k})$  tel que  $\alpha y = x$ .

Alors  $\gamma y \in H(A_{p-k}, A_{p-k-1})$ ; ceci définit un homomorphisme :

$$\Delta : C_p^k \longrightarrow H(A_{p-k}, A_{p-k-1}) \quad , \quad \text{avec}$$

$$\text{Noyau de } \Delta = C_p^{k+1}$$

$$\text{Image de } \Delta = D_{p-k}^{k+1} / D_{p-k}^k \quad .$$

Puisque  $D_p^k \subset C_p^{k+1}$  et  $D_{p-k}^{k+1} \subset C_{p-k}^k$ , il s'ensuit que  $D_p^k$  est contenu dans le noyau de  $\Delta$ , et que  $C_{p-k}^k / D_{p-k}^k$  contient l'image de  $\Delta$ . Ainsi,  $\Delta$  définit un homomorphisme :

$$d_p^k : C_p^k / D_p^k \longrightarrow C_{p-k}^k / D_{p-k}^k \quad , \quad \text{ou :}$$

$$d_p^k : E_p^k \longrightarrow E_{p-k}^k \quad ,$$

avec :

$$\text{Noyau de } d_p^k = C_p^{k+1} / D_p^k \quad \text{et} \quad \text{Image de } d_p^k = D_{p-k}^{k+1} / D_{p-k}^k$$

Si nous considérons la suite :

$$(2.7) \quad \dots \longrightarrow E_{p+k}^k \xrightarrow{d_{p+k}^k} E_p^k \xrightarrow{d_p^k} E_{p-k}^k \longrightarrow \dots$$

alors :

$$(2.8) \quad \text{Noyau de } d_p^k = C_p^{k+1} / D_p^k \quad \text{et} \quad \text{Image de } d_{p+k}^k = D_p^{k+1} / D_p^k \quad .$$

Ainsi  $d_p^k d_{p+k}^k = 0$ , et (2.7) est un complexe de chaînes, dont le groupe d'homologie, calculé en  $E_p^k$  n'est autre que :

$$C_p^{k+1} / D_p^{k+1} = E_p^{k+1} \quad .$$

Exemple :  $k = 1$  .

Si  $k = 1$  les homomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  du diagramme (2.6) sont les applications identiques, et  $\gamma = \delta = \Delta$  est l'opérateur

$$d : H(A_p, A_{p-1}) \longrightarrow H(A_{p-1}, A_{p-2})$$

du triple  $(A_p, A_{p-1}, A_{p-2})$ . Puisque  $D_p^1 = D_{p-1}^1 = 0$ , il s'ensuit que l'opérateur

$$d_p^1 : E_p^1 \longrightarrow E_{p-1}^1$$

coïncide avec l'opérateur  $d$  :

$$d : H(A_p, A_{p-1}) \longrightarrow H(A_{p-1}, A_{p-2}) \quad .$$

Résumé : Les résultats précédents peuvent être résumés comme suit .

Posons :

$$E^k = \sum_p E_p^k \quad k \geq 1 .$$

Les opérateurs  $d_p^k$  définissent alors une dérivation  $d^k : E^k \rightarrow E^k$ , de degré  $-k$ ; et par rapport à cette dérivation, on a :

$$E^{k+1} = H(E^k) .$$

### 3.- Le cas gradué.

Dans les applications, le groupe  $H(A, B)$  sera fréquemment donné comme un groupe gradué  $\sum_n H_n(A, B)$ ,  $n$  entier; l'homomorphisme de  $H(A, B)$  dans  $H(A', B')$  préservera le degré, tandis que l'opérateur  $d$  augmentera le degré de  $\varepsilon$  (les cas les plus fréquents sont  $\varepsilon = \pm 1$ ). La suite exacte de l'axiome (H.4) prend alors la forme :

$$\dots \rightarrow H_{n-\varepsilon}(A, B) \rightarrow H_n(B, C) \rightarrow H_n(A, C) \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_{n+\varepsilon}(B, C) \rightarrow \dots$$

Tous les groupes qui ont été définis ci-dessus se décomposent en sommes directes :

$$E_p = \sum_n B_{n,p}, \dots, E_p^k = \sum_n E_{n,p}^k .$$

L'isomorphisme (2.5) préserve les degrés, et prend la forme :

$$(3.1) \quad E_{n,p} = B_{n,p} / B_{n,p-1}$$

Le diagramme (2.6) devient :

$$\begin{array}{ccc} H_n(A_p, A_{p-k}) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(A_p, A_{p-1}) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ H_{n+\varepsilon}(A_{p-k}, A_{p-k-1}) & \xrightarrow{\beta} & H_{n+\varepsilon}(A_{p-1}, A_{p-k-1}) \end{array}$$

avec :

$$\text{Image de } \alpha = C_{n,p}^k \subset C_{n,p}^{k+1} = \text{Noyau de } \delta$$

$$\text{Image de } \gamma = D_{n+\varepsilon,p-k}^{k+1} \subset D_{n+\varepsilon,p-k}^k = \text{Noyau de } \beta .$$

Il s'ensuit que l'homomorphisme  $d_p^k$  donne :

$$d_{n,p}^k : E_{n,p}^k \longrightarrow E_{n+\varepsilon,p-k}^k ,$$

avec  $C_{n,p}^{k+1} / D_{n,p}^k$  pour noyau, et  $D_{n+\varepsilon,p-k}^{k+1} / D_{n+\varepsilon,p-k}^k$  pour image .

La suite (2.7) devient :

$$(3.2) \quad \dots \rightarrow E_{n-\varepsilon,p+k}^k \rightarrow E_{n,p}^k \rightarrow E_{n+\varepsilon,p-k}^k \rightarrow \dots$$

et son groupe d'homologie, calculé en  $E_{n,p}^k$  est  $E_{n,p}^{k+1}$ .

Nous supposerons maintenant que, pour tout  $n$  fixé, l'on a :

$$(3.3) \quad H_n(A_p) = 0 \quad \text{pour } p \text{ assez petit}$$

$$(3.4) \quad H_n(A, A_p) = 0 \quad \text{pour } p \text{ assez grand.}$$

Il suit de (3.3) que :

$$(3.5) \quad B_{n,p} = 0 \quad \text{pour } p \text{ assez petit,}$$

tandis que (3.4) entraîne que  $H_n(A_p) \longrightarrow H_n(A)$  est sur. On a donc

$$(3.6) \quad B_{n,p} = H_n(A) \quad \text{pour } p \text{ assez grand.}$$

Fixons maintenant les indices  $n$  et  $p$ . Puisque  $H_{n+\epsilon}(A_{p-k}) = 0$  pour  $k$  assez grand, il en résulte que  $H_n(A_p) \longrightarrow H_n(A_p, A_{p-k})$  est sur, ce qui donne :

$$(3.7) \quad C_{n,p} = C_{n,p}^k \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

Puisque  $H_{n+\epsilon}(A, A_{p+k-1}) = 0$  pour  $k$  assez grand, il en résulte que  $H_{n-\epsilon}(A_{p+k-1}, A_p) \longrightarrow H_{n-\epsilon}(A, A_p)$  est sur. Ceci donne :

$$(3.8) \quad D_{n,p} = D_{n,p}^k \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

En combinant (3.7) et (3.8), on obtient :

$$(3.9) \quad E_{n,p} = E_{n,p}^k \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

Puisque le noyau de  $d_{n,p}^k : E_{n,p}^k \longrightarrow E_{n+\epsilon,p-k}^k$  est  $C_{n,p}^{k+1} / D_{n,p}^k$ , on a :

$$(3.10) \quad d_{n,p}^k = 0 \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la suite  $\{A_p\}$  était croissante, c'est-à-dire que  $A_p < A_{p+1}$ . On aurait pu aussi bien considérer des suites descendantes vérifiant  $A_{p+1} < A_p$ . Le passage des suites ascendantes aux suites descendantes peut se faire par changement du signe des indices. Dans (2.1) et (2.3),  $p-1$  devra être remplacé par  $p+1$ . Dans le diagramme du paragraphe 2,  $p-1$ ,  $p-k$ ,  $p-k-1$  devront être remplacés par  $p+1$ ,  $p+k$ ,  $p+k+1$ . Ainsi :

$$d_p^k : E_p^k \longrightarrow E_{p+k}^k .$$

Dans les formules (3.3) à (3.6), les mots "grand" et "petit" devront être échangés.

4.- Le cas contravariant.

Le foncteur  $H$  considéré dans ce qui précède se comporte comme une théorie de l'homologie, et, en particulier, est covariant. En théorie de la cohomologie, on a à considérer des foncteurs  $H(A, B)$  pour lesquels une inégalité  $(A, B) < (A', B')$  donne naissance à un homomorphisme  $H(A', B') \longrightarrow H(A, B)$ , et un triple  $(A, B, C)$  donne naissance à un homomorphisme  $d : H(B, C) \longrightarrow H(A, B)$ . On énonce les axiomes (H.1), ..., (H.4) en renversant le sens des flèches. Dans les définitions du début du paragraphe 2, les flèches sont renversées, et les relations (2.1) et (2.2) deviennent :

$$(4.1) \quad \dots \subset B_p \subset B_{p+1} \subset \dots \subset H(A)$$

$$(4.2) \quad 0 = C_p^1 \subset \dots \subset C_p^k \subset C_p^{k+1} \subset \dots \subset C_p \subset D_p \subset \dots \subset D_p^{k+1} \subset D_p^k \subset \dots \subset D_p^1 = \\ = H(A_p, A_{p-1}) .$$

Les définitions (2.3) deviennent :

$$(4.3) \quad E_p = D_p / C_p \quad E_p^k = D_p^k / C_p^k .$$

L'isomorphisme (2.5) devient :

$$(4.4) \quad E_p \approx B_{p-1} / B_p$$

et se démontre en utilisant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} H(A_p) & \longrightarrow & H(A_{p-1}) & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H(A, A_p) & \longrightarrow & H(A, A_{p-1}) & \longrightarrow & D_p & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ B_p & \longrightarrow & B_{p-1} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & & & & \end{array}$$

Le diagramme (2.6) devient, après avoir élevé tous les indices de  $k$  :

$$\begin{array}{ccc} H(A_{p+k}, A_p) & \xleftarrow{\alpha} & H(A_{p+k}, A_{p+k-1}) \\ \uparrow \gamma & & \uparrow \delta \\ H(A_p, A_{p-1}) & \xleftarrow{\beta} & H(A_{p+k-1}, A_{p-1}) \end{array}$$

avec :

$$\begin{array}{l} \text{Image de } \beta = D_p^k > D_p^{k+1} = \text{Noyau de } \gamma \\ \text{Image de } \delta = C_{p+k}^{k+1} > C_{p+k}^k = \text{Noyau de } \alpha . \end{array}$$

Ainsi  $\delta \beta^{-1}$  donne :

$$\Delta : D_p^k \longrightarrow H(A_{p+k}, A_{p+k-1}) / C_{p+k}^k , \text{ qui définit les}$$



$$d_p^k : E_p^k \longrightarrow E_{p+k}^k ,$$

avec les mêmes propriétés que ci-dessus.

La discussion séparée du cas contravariant peut être évitée en utilisant l'astuce suivante : on considère l'ensemble partiellement ordonné  $S^*$  obtenu en renversant l'ordre de l'ensemble original  $S$ . La théorie contravariante  $H$  sur  $S$  donne alors une théorie covariante sur  $S^*$ . Ceci permet de transporter les résultats par un simple changement de notations.

### 5.- Le cas algébrique.

Soit  $A$  un module (sur un certain anneau  $\Lambda$ ) muni d'une dérivation  $d$ . Nous considérerons l'ensemble de tous les sous-modules de  $A$ , stables vis-à-vis de  $d$ , avec la relation d'ordre définie par l'inclusion. Si  $(A', B')$  est une paire dans cet ensemble, alors  $A'/B'$  est un module à dérivation, et nous pouvons poser :

$$H(A', B') = H(A'/B') .$$

Une inclusion  $(A', B') < (A'', B'')$  définit un homomorphisme permis de  $A'/B'$  dans  $A''/B''$ , et induit donc un homomorphisme  $H(A', B') \longrightarrow H(A'', B'')$ . Un triple  $(A', B', C')$  donne une suite exacte :

$$0 \longrightarrow B'/C' \longrightarrow A'/C' \longrightarrow A'/B' \longrightarrow 0 ,$$

qui donne un opérateur  $d : H(A', B') \longrightarrow H(B', C')$ . Les axiomes (H.1), ..., (H.4) se vérifient tout de suite.

Supposons maintenant que nous nous soyons donné une suite :

$$\dots \subset A_p \subset A_{p+1} \subset \dots \subset A .$$

La théorie précédente donne des groupes gradués  $E^k$ , avec dérivations  $d^k$  telles que  $E^{k+1} = H(E^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Posons :

$$E_p^0 = A_p/A_{p-1} , \quad E^0 = \sum_p A_p/A_{p-1} ,$$

soit  $d_p^0$  l'opérateur de dérivation de  $E_p^0$  induit par celui de  $A$ , et soit  $d^0$  la dérivation que en résulte dans  $E^0$ . Puisque  $E_p^1 = H(A_p/A_{p-1})$ , on a :

$$E^1 = H(E^0) .$$

Ainsi, dans le cas algébrique, on peut étendre la suite des  $\{E^k\}$ , en acceptant la valeur  $k = 0$ .