H. Cartan

Théorie des faisceaux : applications des théorèmes fondamentaux, étude de la structure multiplicative

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 20, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A20_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

THÉORIE DES FAISCEAUX :
Applications des théorèmes fondamentaux,
étude de la structure multiplicative.
(Exposé de H. CARTAN, le 11.6.1951).

1.- Cohomologie des espaces HLC .

Pour la définition (classique) des espaces HLC , voir Séminaire 1948-49, exposés 13 et 14. Il y est prouvé que, dans un espace HLC , le faisceau des cochaînes singulières est un faisceau fondamental (il est inutile de supposer l'espace localement compact ; cette hypothèse n'intervient pas dans la démonstration). Soit S^* ce faisceau. D'après 16, théorème 2, le faisceau S^* peut être utilisé pour calculer la cohomologie de l'espace $\mathfrak{X}$, quand $\mathfrak{X}$ est HLC ; autrement dit : la cohomologie singulière d'un espace HLC s'identifie canoniquement à la cohomologie de Čech de cet espace.

On peut préciser comment se fait cette identification. Soit C le faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier. Il existe un homomorphisme canonique de C dans S^* , et ceci pour tout espace $\mathfrak{X}$ (cf. 1948-49, Exp.8, § 4) ; il est compatible avec graduation et cobord. Pour tout faisceau de coefficients F , on a donc un homomorphisme de modules

$$\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(S^* \bigcirc F) \quad ,$$

compatible avec graduation et cobord ; d'où un homomorphisme des modules de cohomologie : $H(\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(S^* \bigcirc F))$, qui conserve les degrés. Si maintenant $\mathfrak{X}$ est un espace HLC , l'homomorphisme des faisceaux de cohomologie $H(C \bigcirc F) \longrightarrow H(S^* \bigcirc F)$ est un isomorphisme sur ; alors le th.4 de l'Exposé 19 permet de conclure que

$$H(\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(S^* \bigcirc F)) \text{ , c'est-à-dire } H_{\Phi}(\mathfrak{X},F) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(S^* \bigcirc F))$$

est aussi un isomorphisme sur. Tel est l'isomorphisme canonique de la cohomologie de Čech sur la cohomologie singulière d'un espace HLC .

2.- Variétés différentiables.

Une cochaîne différentiable est une fonction (à valeurs dans l'anneau de base K) définie sur l'ensemble des simplexes singuliers différentiables (k fois, $1 \leq k \leq \infty$) . Ceci conduit à la définition du faisceau D^* des cochaînes différentiables. On a un homomorphisme naturel du faisceau S^* des cochaînes singulières sur le faisceau D^* des cochaînes différentiables. Mais les propriétés de rétraction locale (différentiable) d'une variété différentiable montrent que l'homomorphisme de faisceaux $H(S^*) \longrightarrow H(D^*)$ est un isomorphisme sur ($H^p(S^*)$ et $H^p(D^*)$ sont nuls pour $p \geq 1$, et s'identifient canoniquement à K pour $p = 0$). Donc (Exp. 19, th. 4) l'homomorphisme des modules de cohomologie

$$H(\Gamma_{\Phi}(S^* \circ F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(D^* \circ F))$$

est un isomorphisme sur. En bref : la cohomologie singulière s'identifie canoniquement à la cohomologie différentiable (et à la cohomologie de Čech, d'après le numéro 1 ci-dessus).

Soit maintenant D le faisceau des chaînes différentiables (défini à partir de la notion de chaîne différentiable : combinaison linéaire, à coefficients dans K, de simplexes singuliers différentiables). On a un homomorphisme naturel du faisceau D dans le faisceau S des chaînes singulières. Ici encore, l'homomorphisme de faisceaux $H(D) \longrightarrow H(S)$ est un isomorphisme sur ; d'une façon précise, $H_p(D)$ et $H_p(S)$ (p désigne la "dimension") sont nuls pour $p \neq n$ (n : dimension de la variété), et $H_n(D)$ et $H_n(S)$ sont 2 faisceaux, isomorphes entre eux, et localement isomorphes au faisceau K (cf. 1948-49, 13, pages 3-4, et 16, page 6). Plus généralement, pour tout faisceau F de coefficients, $H(D \circ F) \longrightarrow H(S \circ F)$ est un isomorphisme sur. Il en résulte (d'après l'Exp. 19, th. 4), compte tenu du fait que les faisceaux D et S sont homotopiquement fins (grâce à la "subdivision barycentrique"), que $H(\Gamma_{\Phi}(D \circ F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(S \circ F))$ est un isomorphisme sur. En bref : la Φ-homologie différentiable s'identifie canoniquement à la Φ-homologie singulière.

Enfin, prenons pour anneau de base K le corps R des nombres réels. Soit Ω le faisceau des formes différentielles extérieures sur la variété $\mathfrak{X}$ considérée. On a un homomorphisme de faisceaux $\Omega \longrightarrow D^*$, défini de la manière suivante : une forme différentielle ω, de degré p, définit une cochaîne différentiable de dimension p, c'est-à-dire une fonction (à valeurs réelles) des simplexes différentiables de dimension p ; cette correspondance de forme à cochaîne est définie par l'intégrale de ω sur les p-simplexes différentiables. D'après la formule de Stokes, l'homomorphisme $\Omega \longrightarrow D^*$ ainsi défini est compatible avec les cobords de Ω et de D^*. Or

$H(\Omega) \longrightarrow H(D^*)$ est un isomorphisme sur ; d'une façon précise, $H^p(\Omega)$ et $H^p(D^*)$ sont nuls pour $p \geq 1$, et canoniquement isomorphes à R pour $p = 0$. Donc (Exp. 19, théorème 4).

$$H(\Gamma_\Phi(\Omega \circ F)) \longrightarrow H(\Gamma_\Phi(D^* \circ F))$$

est un <u>isomorphisme sur</u>, pour tout faisceau F d'espaces vectoriels sur le corps R . Telle est la manière dont la Φ-cohomologie donnée par les formes différentielles s'identifie à la Φ-cohomologie donnée par les cochaînes différentiables. Cette dernière a été identifiée, plus haut, à la Φ-cohomologie singulière et à la Φ-cohomologie de Čech. Ainsi se trouvent précisés les isomorphismes dont l'existence était affirmée dans l'Exposé 17 .

3.- <u>Théorie des variétés</u> (non nécessairement différentiables).

Dans tout ce numéro, $\mathcal{X}$ est une variété de dimension n , c'est-à-dire un espace topologique séparé dont chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à R^n . Aucune hypothèse de connexion, ni de paracompacité, n'est faite ; aucune hypothèse de différentiabilité non plus.

Soit toujours S le faisceau des chaînes singulières ; on notera S^n le faisceau S_{-n} des chaînes de dimension $-n$ (n s'appellera le <u>degré</u> d'une telle chaîne ; tous les degrés sont donc ≤ 0 , et l'opérateur "bord" augmente le degré de +1). On a $H^p(S) = 0$ pour $p \neq -n$, tandis que $H^{-n}(S)$ est un faisceau T localement isomorphe à K , et défini par l'<u>orientation locale</u> de la variété $\mathcal{X}$. On l'appelle le faisceau de l'<u>anneau</u> K <u>tordu</u>, et il est isomorphe à K si $\mathcal{X}$ est orientable. Pour chaque faisceau F de coefficients, $H^p(S \circ F)$ est nul pour $p \neq -n$, et est isomorphe à $T \circ F$ si $p = -n$. On voit qu'à chaque faisceau F se trouve ainsi associé un faisceau $T \circ F$; la correspondance de F à $T \circ F$ est <u>involutive</u>, car $T \circ T$ est canoniquement isomorphe à l'anneau de base K . Des faisceaux tels que F et $T \circ F$ seront dits <u>associés</u>.

La variété $\mathcal{X}$ étant de dimension finie, on peut appliquer le théorème 5 de 19 au faisceau $S \circ F$ (faisceau gradué avec cobord de degré +1 ; ce faisceau est, comme S , homotopiquement fin). Il vient donc des <u>isomorphismes canoniques</u>

$$H^{p-n}(\Gamma_\Phi(S \circ F)) \approx H^p_\Phi(\mathcal{X}, T \circ F) \quad ,$$

c'est-à-dire, en revenant du "degré" à la "dimension" :

$$H_{n-p}(\Gamma_\Phi(S \circ F)) \approx H^p_\Phi(\mathcal{X}, T \circ F) \quad .$$

Le module $H_{n-p}(\Gamma_\Phi(S \circ F))$ sera désormais noté $H^\Phi_{n-p}(\mathcal{X}, F)$: module de

Φ-homologie singulière, de dimension n-p , à coefficients dans F . L'isomorphisme entre Φ-homologie singulière et Φ-cohomologie (pour des dimensions complémentaires à n , et des faisceaux F et $T \circ F$ associés) est ce qu'on appelle classiquement la "dualité" des variétés (de dimension n) .

Lorsque F est un faisceau <u>localement simple</u>, il en est de même du faisceau associé $T \circ F$. On a vu (18, 8) comment se calcule dans ce cas la Φ-homologie singulière à coefficients dans F (à la manière de l'homologie à coefficients locaux de Steenrod).

<u>Lorsque la variété</u> $\mathcal{X}$ <u>est paracompacte</u>, on peut prendre pour Φ la famille de tous les fermés. L'isomorphisme $H_n^{\Phi}(\mathcal{X}, T) \approx H_{\Phi}^{0}(\mathcal{X}, K)$ permet de définir un homomorphisme biunivoque $K \longrightarrow H_n^{\Phi}(\mathcal{X}, T)$, à partir de l'homomorphisme canonique $K \longrightarrow H_{\Phi}^{0}(\mathcal{X}, K)$. L'élément de $H_n^{\Phi}(\mathcal{X}, T)$, image de l'élément unité de K par cet homomorphisme, s'appelle la <u>classe fondamentale de la variété</u> $\mathcal{X}$. C'est celle qui correspond à la classe-unité de $H_{\Phi}^{0}(\mathcal{X}, K)$, par la "dualité".

Nous allons préciser et compléter l'isomorphisme de "dualité". Revenant au cas général d'une variété (non nécessairement paracompacte) $\mathcal{X}$ de dimension n , nous nous proposons d'appliquer le corollaire du théorème 7 (exposé 19) à la carapace $A = \Gamma_{\Phi}(S \circ F)$, pour un sous-espace ouvert $\mathcal{X}'$ et son complémentaire $\mathcal{X}''$. Avec les notations de ce corollaire, A' est le module des Φ-chaînes singulières, à coefficients dans F , et à support contenu dans $\mathcal{X}'$; son homologie de dimension n-p n'est autre que $H_{n-p}^{\Phi'}(\mathcal{X}', F')$, en désignant par Φ' la famille induite par Φ sur $\mathcal{X}'$, et par F' le faisceau induit par F sur $\mathcal{X}'$. Quant au module A" , quotient de A par A' , nous l'appellerons le module des Φ-chaînes singulières de $\mathcal{X}$ modulo $\mathcal{X}'$, à coefficients dans F ; son homologie sera notée $H_{n-p}^{\Phi}(\mathcal{X} \bmod \mathcal{X}', F)$. Cela posé, le corollaire du théorème 7 de 19 s'exprime ici par l'isomorphisme des deux suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_{n-p}^{\Phi'}(\mathcal{X}', F') & \longrightarrow & H_{n-p}^{\Phi}(\mathcal{X}, F) & \longrightarrow & H_{n-p}^{\Phi}(\mathcal{X} \bmod \mathcal{X}', F) & \longrightarrow & H_{n-p-1}^{\Phi'}(\mathcal{X}', F') & \longrightarrow \\
& \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\longrightarrow & H_{\Phi'}^{p}(\mathcal{X}', T' \circ F') & \longrightarrow & H_{\Phi}^{p}(\mathcal{X}, T \circ F) & \longrightarrow & H_{\Phi''}^{p}(\mathcal{X}'', T'' \circ F'') & \longrightarrow & H_{\Phi'}^{p+1}(\mathcal{X}, T' \circ F') & \longrightarrow
\end{array}$$

La troisième flèche verticale exprime le théorème de "dualité" d'Alexander-Pontrjagin (qui comporte, comme conséquence particulière, le théorème de Jordan-Brouwer) ; les autres flèches verticales expriment la dualité des variétés $\mathcal{X}'$, resp. $\mathcal{X}$.

Diverses applications de ces résultats ont été données dans l'exposé 17 de 1948-49. Signalons simplement celle-ci : soit $\mathcal{X}$ une variété <u>connexe</u>, et soit Φ la famille des <u>compacts</u> de $\mathcal{X}$. La Φ-homologie singulière n'est autre que l'homologie singulière classique (à supports compacts). Il est clair que si $\mathcal{X}''$ est un sous-espace <u>fermé</u> $\neq \mathcal{X}$, $H_0^{\Phi}(\mathcal{X} \bmod \mathcal{X}', K)$ est nul (car tout point de $\mathcal{X}$ peut être joint par un arc à un point du complémentaire $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}''$). Donc $H^n_{\Phi}(\mathcal{X}'', T)$ <u>est nul</u> (cohomologie à supports compacts, et à "coefficients tordus", du sous-espace fermé $\mathcal{X}''$ de la variété connexe $\mathcal{X}$). De là on déduit facilement le théorème de "l'invariance du domaine".

De la <u>théorie des intersections</u> dans une variété $\mathcal{X}$, nous dirons seulement ceci : soient données 2 familles Φ, Φ', et la famille Φ'' des ensembles appartenant à la fois à Φ et Φ'. Alors la loi d'intersection, en homologie singulière, est une application linéaire

$$H^{\Phi}_{n-p}(\mathcal{X}, F) \otimes H^{\Phi'}_{n-q}(\mathcal{X}, F') \longrightarrow H^{\Phi''}_{n-p-q}(\mathcal{X}, T \circ F \circ F') .$$

On l'obtient à partir de la multiplication en cohomologie :

$$H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, T \circ F) \otimes H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}, T \circ F') \longrightarrow H^{p+q}_{\Phi''}(\mathcal{X}, F \circ F')$$

puis en passant à la "dualité".

4.- <u>Théorèmes généraux sur la structure multiplicative</u>.

On a vu (17, 6) que si un faisceau Φ-fondamental C est muni d'une structure multiplicative qui en fait une <u>algèbre différentielle graduée</u>, cette structure multiplicative donne naissance au cup-produit en Φ-cohomologie. En particulier, si un faisceau de coefficients F est muni d'une structure multiplicative, $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ est alors une algèbre différentielle graduée dont l'<u>algèbre</u> de cohomologie est l'<u>algèbre</u> $H_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$, avec sa structure du cup-produit.

Ceci s'applique notamment aux cas suivants :

C est le faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier (15, 6) avec sa structure multiplicative habituelle ;

C est le faisceau des formes différentielles (l'anneau de base K étant alors le corps R) sur une variété différentiable, la structure multiplicative de C étant celle de la "multiplication extérieure" des formes différentielles ;

C est le faisceau des cochaînes singulières (anneau de base K quelconque) sur un espace HLC, avec sa multiplication habituelle.

Nous allons généraliser ces résultats de la manière suivante : dans l'exposé 19, 5, le corollaire du théorème 3 donne, sous certaines hypothèses, des relations précises entre $H(A_{\Phi})$ et $\sum_{p,q} H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^q(\mathcal{F}(A)))$, A désignant une carapace graduée, avec cobord de degré +1 . Nous nous proposons de voir maintenant dans quelle mesure ces relations sont compatibles avec d'éventuelles structures multiplicatives.

Supposons par exemple que la carapace A soit munie d'une structure d'algèbre différentielle graduée, c'est-à-dire qu'on se soit donné une application K-linéaire

$$f : \quad A \otimes A \longrightarrow A$$

qui respecte la graduation (dans $A \otimes A$, on prend la "graduation totale") et le cobord (dans $A \otimes A$, on pose $\delta(a \otimes a') = (\delta a) \otimes a' + (-1)^p a \otimes (\delta a')$, p désignant le degré de a) . On suppose en outre que <u>le support de</u> $f(a \otimes a')$ <u>est contenu dans l'intersection des supports de</u> a <u>et de</u> a' . Cette dernière condition implique que f définit, en chaque point x , un homomorphisme $A_x \otimes A_x \longrightarrow A_x$, de sorte que l'on obtient un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{F}(A) \circ \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$, d'où

$$g : H(\mathcal{F}(A)) \circ H(\mathcal{F}(A)) \longrightarrow H(\mathcal{F}(A)) .$$

Cela étant, d'une part A_{Φ} est une algèbre différentielle graduée, donc $H(A_{\Phi})$ est muni d'une structure d'algèbre graduée ; d'autre part l'application g définit, sur le module de cohomologie $\sum_p H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A)))$, une structure multiplicative (cup-produit). La question est alors celle-ci : comment les structures multiplicatives de $H(A_{\Phi})$ et de $\sum_p H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A)))$ se comportent-elles vis-à-vis des relations exprimées par le corollaire du théorème 3 de 19 ? Et voici la réponse :

<u>Théorème 1</u>.- Dans les hypothèses du corollaire du théorème 3 de 19 (i.e.: A carapace homotopiquement fine et Φ-complète, à degrés bornés inférieurement si l'espace n'est pas de Φ-dimension finie), la filtration de $H(A_{\Phi})$ est compatible avec sa structure d'algèbre, et l'algèbre graduée associée est celle du terme E_∞ d'une suite spectrale d'<u>algèbres différentielles</u>, le terme E_2 étant $\sum_p H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A)))$ muni de la structure multiplicative définie par le <u>cup-produit</u> en Φ-cohomologie (pour la multiplication des coefficients définie par g). Mais il faut noter que la notion de "cup-produit" doit s'entendre ici pour des coefficients dans une algèbre <u>graduée</u>

$\sum_{q\geq 0} H^q(\mathcal{F}(A))$: le produit d'une classe de cohomologie de degré p à valeurs dans $H^q(\mathcal{F}(A))$ et d'une classe de cohomologie de degré p' à valeurs dans $H^{q'}(\mathcal{F}(A))$ est égal à $(-1)^{p'q}$ fois le cup-produit habituel. Ce n'est qu'avec cette convention que le théorème 1 est valable.

En particulier, si $H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$ sauf pour $q = 0$, l'isomorphisme (du corollaire du théorème 5 de 19) entre $H^p(A_\Phi)$ et $H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H^o(\mathcal{F}(A)))$ <u>respecte les structures multiplicatives de ces deux algèbres</u>.

Les résultats qu'on vient d'énoncer sans démonstration sont des conséquences de résultats plus généraux, qu'on va expliquer maintenant.

5.- <u>Structure multiplicative</u> (Suite).

Considérons, sur l'espace $\mathfrak{X}$, 3 carapaces graduées avec cobord (de degré +1) A , A' , A'' , et supposons donnée une application K-linéaire

$$f : A \otimes A' \longrightarrow A''$$

telle que : 1° $f(a \otimes a')$ soit de degré $p+p'$ si a est de degré p et a' de degré p' ; 2° $\delta f(a \otimes a') = f(\delta a \otimes a') + (-1)^p f(a \otimes \delta a')$; 3° le support de $f(a \otimes a')$ soit contenu dans l'intersection des supports de a et de a' . Alors f définit un homomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{F}(A) \circ \mathcal{F}(A') \longrightarrow \mathcal{F}(A'') , \qquad \text{d'où}$$

$$g : H(\mathcal{F}(A)) \circ H(\mathcal{F}(A')) \longrightarrow H(\mathcal{F}(A'')) .$$

Soient données d'autre part 2 familles Φ et Φ' , et soit Φ'' la famille des ensembles appartenant à la fois à Φ et Φ' . L'application f envoie $A_\Phi \otimes A'_{\Phi'}$ dans $A''_{\Phi''}$, donc définit

$$\bar{f} : H(A_\Phi) \otimes H(A'_{\Phi'}) \longrightarrow H(A''_{\Phi''}) .$$

D'autre part, g définit un homomorphisme de cup-produit (avec les conventions de signes ci-dessus)

$$\bar{g} : H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A))) \otimes H^{p'}_{\Phi'}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A'))) \longrightarrow H^{p+p'}_{\Phi''}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A''))).$$

On se propose de comparer les applications $\bar{f}$ et $\bar{g}$. Ce sera l'objet du paragraphe 6. Auparavant, nous allons donner un exemple intéressant d'application telle que $\bar{f}$.

Soient C un faisceau Φ-fondamental, G un faisceau de coefficients (sans graduation ni cobord), F un faisceau gradué avec cobord, <u>homotopiquement fin</u>. Posons

$$A_{\Phi} = \Gamma_{\Phi}(C \circ G) \ , \quad A'_{\Phi'} = \Gamma_{\Phi'}(F) \ , \quad A''_{\Phi''} = \Gamma_{\Phi''}(C \circ G \circ F) \ ;$$

l'application $f : A_{\Phi} \otimes A'_{\Phi'} \longrightarrow A''_{\Phi''}$ est alors évidente. Interprétons l'application $\bar{f}$ qu'elle définit : ici, $H^r(A''_{\Phi''})$ s'identifie à $H^r(\Gamma_{\Phi''}(G \circ F))$, en vertu du théorème 1 de 19. Donc $\bar{f}$ devient :

$$(1) \qquad H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, G) \otimes H^q(\Gamma_{\Phi'}(F)) \longrightarrow H^{p+q}(\Gamma_{\Phi''}(G \circ F)) \ .$$

On vérifie que cet homomorphisme ne dépend pas du choix du faisceau fondamental C. Quant à g, c'est l'homomorphisme classique

$$G \circ H(F) \longrightarrow H(G \circ F) \ ,$$

qui définit ici un homomorphisme de cup-produit

$$(2) \qquad H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, G) \otimes H^{p'}_{\Phi'}(\mathfrak{X}, H(F)) \longrightarrow H^{p+p'}_{\Phi''}(\mathfrak{X}, H(G \circ F)) \ .$$

L'homomorphisme (1) est intéressant. En particulier, si $\Phi \supset \Phi'$, et $G = K$, on voit que <u>chaque élément de</u> $H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, K)$ <u>définit un endomorphisme</u>, <u>de degré</u> p, <u>du module</u> $H(\Gamma_{\Phi'}(F))$, et cela quel que soit le faisceau F <u>homotopiquement fin</u>.

Supposons maintenant, outre les hypothèses précédentes, que l'on ait donné un homomorphisme de faisceaux $\varphi : C \circ F \longrightarrow F$ jouissant des propriétés suivantes : 1° le degré de $\varphi(c \otimes f)$ est la somme des degrés de c et de f ; 2° $\delta\varphi(c \otimes f) = \varphi(\delta c \otimes f) + (-1)^p \varphi(c \otimes \delta f)$, p étant le degré de c ; 3° $\varphi(k \otimes f) = kf$, pour tout $k \in K$. On en déduit un homomorphisme $(C \circ G) \circ F \longrightarrow G \circ F$, d'où :

$$H^p(\Gamma_{\Phi}(C \circ G) \otimes H^q(\Gamma_{\Phi'}(F)) \longrightarrow H^{p+q}(\Gamma_{\Phi''}(G \circ F) \quad \text{, c'est-à-dire}$$

$$\bar{\varphi}' : \ H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, G) \otimes H^q(\Gamma_{\Phi'}(F)) \longrightarrow H^{p+q}(\Gamma_{\Phi''}(G \circ F)) \ .$$

<u>Cet homomorphisme n'est autre que l'homomorphisme</u> (1). La démonstration, facile, se fait à l'aide d'un diagramme de compatibilité, qui est laissé au lecteur.

<u>Exemple</u> : prenons pour C le faisceau d'Alexander-Spanier, et pour F le faisceau des chaînes singulières (qui est homotopiquement fin). Les formules classiques du <u>cup-produit</u> ne définissent malheureusement pas un homomorphisme de faisceaux $C \circ F \longrightarrow F$; cependant, elles définissent une application

$$c : \Gamma_{\Phi}(C \circ F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F)$$

telle que la composée de l'application naturelle $\Gamma_{\Phi}(F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ et de c soit l'identité. Ceci permet de conclure que, lorsque F est le faisceau des chaînes singulières, <u>l'application (1) est bien celle définie par le cap-produit</u>.

6.- Structure multiplicative (Fin).

Revenons à la situation décrite au début du paragraphe 5 .

Théorème 2.- Dans cette situation, supposons en outre que les carapaces A , A' et A'' soient homotopiquement fines, et respectivement Φ-complète, Φ'-complète et Φ''-complète. Supposons en outre que l'espace $\mathfrak{X}$ soit de dimension finie, ou que les degrés des 3 carapaces soient bornés inférieurement. Considérons les 3 suites spectrales du théorème 3 (de 19), pour A_{Φ} , A'_{Φ} et A''_{Φ} respectivement. Alors les filtrations de $H(A_{\Phi})$, $H(A'_{\Phi})$ et $H(A''_{\Phi})$ sont compatibles avec l'homomorphisme $\bar{f}$ (bas de la page 7), qui définit donc un homomorphisme $E_{\infty} \otimes E'_{\infty} \to E''_{\infty}$; et celui-ci est déduit de l'homomorphisme $E_2 \otimes E'_2 \to E''_2$ que voici : c'est l'homomorphisme $\bar{g}$ du cup-produit (avec les mêmes conventions de signes que ci-dessus), une fois qu'on a identifié E_2 à $H_{\Phi}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A)))$, E'_2 à $H_{\Phi'}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A')))$ et E''_2 à $H_{\Phi''}(\mathfrak{X}, H(\mathcal{F}(A'')))$.

La démonstration de ce théorème est facile en principe : elle nécessite que l'on écrive suffisamment de diagrammes de compatibilité, qui tiennent trop de place pour qu'on les explicite ici. Ils sont laissés au lecteur à titre d'exercice.

Corollaire 1 du théorème 2. Supposons, outre les hypothèses du théorème 2, que

$H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$ pour $q \neq k$, $H^{q'}(\mathcal{F}(A')) = 0$ pour $q' \neq k'$, et
$H^{q''}(\mathcal{F}(A'')) = 0$ pour $q'' \neq k+k'$. Alors (cf corollaire du théorème 5 de 19) les isomorphismes

$$H^{p+k}(A_{\Phi}) \approx H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) , \quad H^{p'+k'}(A'_{\Phi'}) \approx H^{p'}_{\Phi'}(\mathfrak{X}, H^{k'}(\mathcal{F}(A'))) ,$$
$$H^{p+p'+k+k'}(A''_{\Phi''}) \approx H^{p+p'}(\mathfrak{X}, H^{k+k'}(\mathcal{F}(A'')))$$

identifient l'application

$$\bar{f} : \quad H^{p+k}(A_{\Phi}) \otimes H^{p'+k'}(A'_{\Phi'}) \longrightarrow H^{p+p'+k+k'}(A''_{\Phi''})$$

à l'application du cup-produit

$$\bar{g} : \quad H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) \otimes H^{p'}_{\Phi'}(\mathfrak{X}; H^{k'}(\mathcal{F}(A'))) \longrightarrow H^{p+p'}_{\Phi''}(\mathfrak{X}, H^{k+k'}(\mathcal{F}(A'')))$$

Corollaire 2 du théorème 2.- Soit, comme au paragraphe 5, F un faisceau gradué avec cobord, homotopiquement fin, et G un faisceau de coefficients. Pour chaque $\alpha \in H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, G)$, l'homomorphisme (1) définit un homomorphisme

$\Pr(\alpha)$: $H(\Gamma_{\Phi'}(F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi''}(G \circ F))$ qui augmente le degré de p .

Alors, si $\mathfrak{X}$ est de dimension finie, <u>ou</u> si les degrés de F sont bornés inférieurement, l'homomorphisme $\mathrm{Pr}(\alpha)$ a pour homomorphisme gradué associé un homomorphisme $E'_\infty \longrightarrow E''_\infty$ déduit de l'homomorphisme $E'_2 \longrightarrow E''_2$ que voici : c'est l'homomorphisme $H_{\Phi'}(\mathfrak{X}, H(F)) \longrightarrow H_{\Phi''}(\mathfrak{X}, H(G \circ F))$ défini par (2) et l'élément $\alpha \in H^p_\Phi(\mathfrak{X}, G)$.

Nous allons faire une application de ce dernier corollaire. Soit $\mathfrak{X}$ un espace <u>paracompact</u> ; prenons pour Φ' la famille de tous les ensembles fermés, et soit $\Phi'' = \Phi$. Supposons que l'on ait un faisceau F homotopiquement fin (à degrés bornés inférieurement si l'espace n'est pas de dimension finie) tel que $H^q(F) = 0$ pour $q \neq k$, et $H^k(F) \approx K$. Alors $H^q(G \circ F) = 0$ pour $q \neq k$, et $H^k(G \circ F) \approx G$. Dans ces conditions, on a un isomorphisme canonique de $H^k(\Gamma_\Phi(F))$ sur $H^0_\Phi(\mathfrak{X}, K)$, lequel contient l'image canonique de l'élément unité de K ; d'où un élément privilégié de $H^k(\Gamma_{\Phi'}(F))$, appelé classe <u>fondamentale</u> du faisceau F . Cela étant, si $\alpha \in H^p_\Phi(\mathfrak{X}, G)$, l'homomorphisme $\mathrm{Pr}(\alpha)$ transforme la classe fondamentale dans l'élément de $H^{p+k}(\Gamma_\Phi(G \circ F)$ qui correspond canoniquement à l'élément $\alpha \in H^p_\Phi(\mathfrak{X}, G)$. En d'autres termes : si γ désigne la classe fondamentale de $H^k(\Gamma_{\Phi'}(F))$, l'homomorphisme (1) (page 8) applique $\alpha \otimes \gamma$ sur l'élément de $H^{p+k}(\Gamma_\Phi(G \circ F)$ qui correspond précisément à α dans l'isomorphisme canonique de $H^p_\Phi(\mathfrak{X}, G)$ sur $H^{p+k}(\Gamma_\Phi(G \circ F))$.

<u>Exemple</u> : au paragraphe 3, page 5, on a défini la classe fondamentale d'une variété paracompacte : classe d'homologie singulière de dimension n , à coefficients tordus. Il en résulte que le <u>cup-produit</u> par la classe fondamentale définit précisément l'isomorphisme de "dualité" de la Φ-cohomologie de degré p (à coefficients dans G) sur la Φ-homologie singulière de dimension $n-p$ (à coefficients dans $T \circ G$) .

<u>Appendice</u> : <u>la suite spectrale d'un recouvrement</u> r , <u>localement fini, par des ensembles fermés</u>.

Pour simplifier, on se bornera aux deux cas suivants :

(a) l'espace $\mathfrak{X}$ est paracompact, et la famille Φ est celle de tous les fermés ;

(b) l'espace $\mathfrak{X}$ est localement compact, la famille Φ est celle des ensembles compacts, et les ensembles du recouvrement r sont compacts.

Soit A la carapace basique des cochaînes du recouvrement r , à valeurs dans l'anneau de base K , et à supports dans Φ . Posons $\mathcal{F}(A) = F$ (faisceau gradué, à degrés ≥ 0 , avec cobord de degré +1). On a classiquement $H^q(F) = 0$ pour $q \neq 0$, et on a un isomorphisme canonique de $H^o(F)$ sur K . Le théorème 2 de 19 donne donc un isomorphisme canonique :

$$H^p(\Gamma_\Phi(C \circ F)) \approx H^p_\Phi(\mathcal{X}, K) .$$

Par contre, le théorème 1 de 19 n'est pas applicable en général ; on a vu (Appendice de 19) qu'il l'est si les supports S_i du nerf de r sont Φ-acycliques ; la condition ($C\Phi$) est remplie dans les cas (a) et (b) envisagés ici. La filtration considérée dans la démonstration du théorème 1 de 19 donne naissance à une suite spectrale, dont le terme E_1 est $\sum_{p,q} H^p_\Phi(\mathcal{X}, F_q)$. Ici, $H^p_\Phi(\mathcal{X}, F_q)$ s'identifie au module des q-cochaînes du nerf de r (q-cochaînes quelconques dans le cas (a), q-cochaînes finies dans le cas (b)) qui, à chaque q-simplexe du nerf, associent un élément de $H^p_\Phi(S_i , K)$, en désignant par S_i le support de ce q-simplexe). En bref, on peut dire que $H^p_\Phi(\mathcal{X}, F_q)$ est le module des q-cochaînes du nerf de r , à valeurs dans la p-cohomologie des supports. L'opérateur différentiel de E_1 est le cobord du nerf. Alors E_2 peut s'appeler la cohomologie du nerf de r , à valeurs dans la cohomologie des supports ; E_2 est bigradué, comme d'habitude.

Tel est le terme E_2 d'une suite spectrale dont le terme E_∞ est le module gradué associé à $H_\Phi(\mathcal{X}, K)$ convenablement filtré. On trouve ainsi, en gros, des relations entre le nerf du recouvrement, les propriétés de cohomologie de ses supports, et la cohomologie de l'espace. Ces relations ont été explicitées pour la première fois par LERAY.