Séminaire Henri Cartan

SAMUEL EILENBERG

Homologie des groupes. I : axiomes et unicité

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A1_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

HOMOLOGIE DES GROUPES . I : AXIOMES ET UNICITÉ.

(Exposé de Samuel EILENBERG, 13.11.1950).

L'objet du présent exposé est de donner un développement systématique de la théorie de l'homologie et de la cohomologie des groupes discrets. La méthode suivie sera axiomatique.

1.- Préliminaires.

Π désignera un système associatif avec élément unité ; les éléments de Π seront en général désignés par x , x' , x_1 , ... L'algèbre $Z(\Pi)$ de Π sur l'anneau des entiers Z est l'algèbre engendrée par les éléments de Π , la multiplication étant définie comme celle de Π . Un $Z(\Pi)$-module à gauche (resp. à droite) sera appelé un Π-groupe à gauche (resp. à droite). Les homomorphismes de $Z(\Pi)$-modules seront appelés Π-homomorphismes.

Un Π-groupe à gauche (resp. à droite), F , est Π-libre avec $\{a_\lambda\}$ comme Π-base si les éléments xa_λ (resp. $a_\lambda x$) , $x \in \Pi$, forment une base de la structure de groupe abélien de F , qui est donc de ce fait un groupe abélien libre.

Si $f : F \to B$, $g : A \to B$ sont des Π-homomorphismes de Π-groupes à droite, si F est Π-libre et si g est sur, alors on peut factoriser f : $f = g \circ h$, avec : $F \xrightarrow{h} A \xrightarrow{g} B$; il suffit en effet de définir h sur une Π-base de F .

Un Π-groupe à gauche Q est appelé Π-*injectif* si, pour tout Π-groupe B , tout sous-Π-groupe A de B , et tout Π-homomorphisme $A \to Q$, il existe un prolongement $B \to Q$.

2.- Axiomes et unicité pour l'homologie.

Dans cette section, tous les groupes sont des Π-groupes à droite, et tous les homomorphismes des Π-homomorphismes. Le système Π sera fixé dans toute la suite.

Nous supposons que :

(I) Pour tout groupe A et tout entier q , on donne un groupe abélien noté $H_q(A)$.

(II) Pour tout homomorphisme $f : A \to B$ on donne un homomorphisme

$f_* : H_q(A) \longrightarrow H_q(B)$.

(III) Si l'on a une suite exacte de la forme $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, on donne un homomorphisme $\partial : H_q(A'') \longrightarrow H_{q-1}(A')$.

Le système $\{H_q(A) , f_* , \partial\}$ est soumis aux axiomes suivants :

(1) Si $f : A \to A$ est l'application identique, alors f_* est l'application identique.

(2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(3) Si l'on a un diagramme commutatif dont les deux lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B' & \to & B & \to & B'' & \to & 0 \end{array} ,$$

alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_q(A'') & \longrightarrow & H_{q-1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(B'') & \longrightarrow & H_{q-1}(B') \end{array}$$

(4) Si l'on a la suite exacte :

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

alors la suite que voici est exacte :

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(A'') \to H_q(A') \to H_q(A) \to H_q(A'') \to H_{q-1}(A') \longrightarrow \cdots$$

(5) $H_q(A) = 0$ pour $q < 0$; $H_0(A) = A_\pi$, quotient de A par le sous-groupe engendré par tous les éléments $ax - a$, $a \in A$, $x \in \pi$.

(6) $H_q(A) = 0$ pour $q > 0$ si A est π-libre.

<u>Soit</u> $\varphi : \pi' \longrightarrow \pi$ <u>un homomorphisme</u>. Tout π-groupe A peut aussi être regardé comme un π'-groupe en posant $ax' = a\,\varphi(x')$.

<u>Théorème d'unicité</u>. <u>Soient</u> $H = \{H_q(\pi, A) , f_* , \partial\}$ <u>et</u> $H' = \{H'_q(\pi', A) , f'_* , \partial'\}$ <u>deux théories de l'homologie pour</u> π <u>et</u> π' <u>respectivement</u>. On se donne un homomorphisme $\varphi : \pi' \longrightarrow \pi$.

Alors il existe une et une seule famille d'homomorphismes

$$\varphi_* : H'_q(\pi', A) \longrightarrow H_q(\pi , A) ,$$

définis pour tout π-groupe A , et tels que :

(7) Si $f : A \longrightarrow B$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H'_q(\pi', A) & \longrightarrow & H'_q(\pi, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\pi, A) & \longrightarrow & H_q(\pi, B) \end{array}$$

(8) Si la suite $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ est exacte, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H'_q(\pi', A'') & \longrightarrow & H'_{q-1}(\pi', A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(\pi, A'') & \longrightarrow & H_{q-1}(\pi, A') \end{array} \quad .$$

(9) $\varphi_* : H'_0(\pi', A) \to H_0(\pi, A)$ n'est autre que l'homomorphisme $A_{\pi'} \to A_{\pi}$ qui correspond à $\varphi : \pi' \to \pi$.

Enfin, si $\varphi : \pi' \to \pi$ est un isomorphisme sur, alors chaque φ_* est un isomorphisme sur.

<u>Démonstration</u> : Nous supposons que φ_* est défini pour les dimensions strictement inférieures à q $(q > 0)$. Pour tout π-groupe A , soit F_A le π-groupe libre à droite admettant les éléments de A pour base. Il existe un homomorphisme naturel $F_A \to A$; soit R_A son noyau. La suite $0 \to R_A \to F_A \to A \to 0$ est exacte, et, comme $H_q(\pi, F_A) = 0$, on a le diagramme commutatif suivant (où les deux lignes sont exactes) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & H'_q(\pi', A) & \xrightarrow{\partial} & H'_{q-1}(\pi', R_A) & \longrightarrow & H'_{q-1}(\pi', F_A) \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ 0 & \longrightarrow & H_q(\pi, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(\pi, R_A) & \longrightarrow & H_{q-1}(\pi, F_A) \end{array}$$

Il existe alors un homomorphisme <u>unique</u> $\varphi_*(A) : H'_q(\pi', A) \to H_q(\pi, A)$ qui, une fois inséré dans le diagramme précédent, n'en détruit pas la commutativité.

Vérifions maintenant la propriété (7). Soit $f : A \to B$. Ceci induit $g : F_A \to F_B$ et $h : R_A \to R_B$. On a alors :

$$\begin{aligned} \partial \circ f_* \circ \varphi_*(A) = h_* \circ \partial \circ \varphi_*(A) \quad &= h_* \circ \varphi_*(R_A) \circ \partial' \\ = \varphi_*(R_B) \circ g'_* \circ \partial' &= \varphi_*(R_B) \circ \partial' \circ f'_* \\ = \partial \circ \varphi_*(B) \circ f'_* \quad &. \end{aligned}$$

Comme $: H_q(\pi, A) \to H_{q-1}(\pi, R_A)$ est biunivoque (d'après les axiomes (4) et (6)) , il suit de là que l'on a bien :

$$f_* \circ \varphi_*(A) = \varphi_*(B) \circ f'_* \quad .$$

Vérifions maintenant la propriété (8) . Considérons une suite exacte : $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. Puisque $F_{A''}$ est libre, on peut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{A'} \arrow[r] \arrow[d] & F_{A''} \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H'_q(\pi', A'') \arrow[r] \arrow[d] & H'_{q-1}(\pi', R_{A''}) \arrow[r] \arrow[d] & H'_{q-1}(\pi', A') \arrow[d] \\
H_q(\pi, A'') \arrow[r] & H_{q-1}(\pi, R_{A''}) \arrow[r] & H_{q-1}(\pi, A')
\end{tikzcd} .$$

Le carré de gauche est commutatif à cause de (3) , et le carré de droite est commutatif à cause de (7) . D'autre part, le composé des deux homomorphismes de chaque ligne est bien l'homomorphisme ∂ , en vertu de l'axiome (3) . Le diagramme entraîne alors la propriété (8) .

Enfin, supposons que $\varphi : \pi' \to \pi$ soit un isomorphisme sur, et posons $\psi = \varphi^{-1}$. Alors $\psi_* \varphi_*$ et $\varphi_* \psi_*$ vérifient les analogues de (7) , (8) , (9) , le premier par rapport à l'application identique de π' dans π', le second par rapport à l'application identique de π dans π . Il résulte alors de l'unicité que $\psi_* \varphi_*$ et $\varphi_* \psi_*$ ne sont autres que les applications identiques, ce qui montre bien que les φ_* sont des isomorphismes sur.

3.- <u>Axiomes et unicité pour la cohomologie</u>.

Dans cette section, tous les groupes sont des π-groupes à gauche. Nous supposons que :

(I_c) Pour tout groupe A et tout entier q , on donne un groupe noté $H^q(A)$, sur lequel π opère trivialement.

(II_c) Pour tout $f : A \to B$, on donne : $f_* : H^q(A) \to H^q(B)$.

(III_c) Pour toute suite exacte de la forme $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, on donne un homomorphisme $\delta : H^q(A'') \to H^{q+1}(A')$.

Axiomes :

(1_c) , (2_c) , (3_c) et (4_c) ne diffèrent de (1) , (2) , (3) , (4) que par des changements d'indices et ne sont pas répétés.

(5_c) $H^q(A) = 0$ pour $q < 0$; $H^0(A) = A^\pi$ est le sous-groupe de A formé des éléments a tels que $xa = a$ pour tout $x \in \pi$.

(6_c) $H^q(A) = 0$ pour $q > 0$ si A est π-injectif.

Soit $\varphi : \Pi' \to \Pi$ un homomorphisme. Tout Π-groupe peut aussi être regardé comme un Π'-groupe.

Théorème d'unicité. Soit $H = \{H^q(\Pi, A), f_*, \delta\}$ et $H' = \{H'^q(\Pi', A), f'_*, \delta'\}$ deux théories de la cohomologie pour Π et Π' respectivement. Alors il existe une et une seule famille d'homomorphismes

$$\varphi^* : H^q(\Pi, A) \to H^q(\Pi', A) .$$

définis pour tout Π-groupe A et tels que :

(7_c) Si $f : A \to B$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, A) & \to & H^q(\Pi, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H'^q(\Pi', A) & \to & H'^q(\Pi', B) \end{array} .$$

(8_c) Si la suite $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ est exacte, alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Pi, A'') & \to & H^{q+1}(\Pi, A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H'^q(\Pi', A'') & \to & H'^{q+1}(\Pi', A') \end{array} .$$

(9_c) $: H^0(\Pi, A) \to H^0(\Pi', A)$ n'est autre que l'homomorphisme $A^{\Pi} \to A^{\Pi'}$, qui correspond à $\varphi : \Pi' \to \Pi$.

La démonstration est basée sur une construction (non donnée ici) qui fait correspondre à tout Π-groupe A un Π-groupe Π-injectif Q_A contenant A. Si $N_A = Q_A/A$, alors la suite $0 \to A \to Q_A \to N_A \to 0$ est exacte.

Supposons les homomorphismes φ^* définis pour les dimensions $< q$ $(q > 0)$; comme $H^q(\Pi, Q_A) = 0$, nous avons le diagramme commutatif suivant (où les deux lignes sont exactes) :

$$\begin{array}{ccccccc} H^{q-1}(\Pi, Q_A) & \to & H^{q-1}(\Pi, N_A) & \to & H^q(\Pi, A) & \to & 0 \\ H'^{q-1}(\Pi', Q_A) & \to & H'^{q-1}(\Pi', N_A) & \to & H'^q(\Pi', A) & \to & H'^q(\Pi', Q_A) \end{array} .$$

Il existe alors un homomorphisme <u>unique</u> $\varphi^*(A) : H^q(\Pi, A) \to H'^q(\Pi', A)$ qui, une fois inséré dans le diagramme précédent, n'en détruit pas la commutativité.

Le reste de la démonstration procède comme dans le cas de l'homologie.