H. Cartan

Théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 19, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A19_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES FAISCEAUX

(Exposé de H. CARTAN, 4.6.1951)

1.- Un lemme sur les faisceaux homotopiquement fins.

Lemme : Soit f un homomorphisme d'un faisceau F sur un faisceau F' , et soit G un faisceau (avec cobord) homotopiquement fin. Alors l'image M de l'homomorphisme défini par f :

$$\Gamma_\Phi(F \circ G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F' \circ G)$$

est homologiquement équivalente à $\Gamma_\Phi(F' \circ G)$, i.e.: l'homomorphisme des modules de cohomologie

$$H(M) \longrightarrow H(\Gamma_\Phi(F' \circ G))$$

est un isomorphisme sur. (N.B.: comparer au théorème de l'Exposé 15, page 15-04).

Démonstration : on montre que si $\alpha \in \Gamma_\Phi(F' \circ G)$ et $\delta\alpha \in M$, alors α a la forme $\beta + \delta\gamma$, avec $\beta \in M$, $\gamma \in \Gamma_\Phi(F' \circ G)$. Or la démonstration du théorème de 15, 7, prouve que, pour tout α de $\Gamma_\Phi(F' \circ G)$, l'élément $\alpha + \delta k\alpha + k\delta\alpha$ (où k désigne l'endomorphisme qui intervient dans la définition de "homotopiquement fin") appartient à l'image M de $\Gamma_\Phi(F \circ G)$ dans $\Gamma_\Phi(F' \circ G)$. Cela étant, si $\delta\alpha \in M$, alors $k\delta\alpha = \beta \in M$; il suffit alors de prendre $\gamma = k\alpha$ pour obtenir le résultat annoncé.

2.- Premier théorème fondamental.

Théorème 1.- Soit, sur un espace $\mathfrak{X}$, un faisceau F gradué (à degrés ≥ 0 ou ≤ 0) avec cobord de degré $+1$, et soit C un faisceau Φ-fondamental de l'espace $\mathfrak{X}$ (Exp.17, paragraphe 1). Considérons l'homomorphisme de faisceaux $F \longrightarrow C \circ F$ défini par $K \longrightarrow C$ (K désignant, comme toujours, le faisceau simple défini par l'anneau de base ; F est identifié à $K \circ F$). Pour que l'homomorphisme correspondant

$$(1) \qquad H(\Gamma_\Phi(F)) \longrightarrow H(\Gamma_\Phi(C \circ F))$$

soit un isomorphisme sur, il suffit que, pour tout entier $p \geq 1$, le module $H^p_\Phi(\mathfrak{X}, F)$, muni de la graduation et du cobord définis par F , ait une cohomologie nulle. En particulier, il suffit que $H^p_\Phi(\mathfrak{X}, F) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

(Le lecteur comparera aux théorèmes 1 et 1 bis de l'exposé 11).

Démonstration : considérons, sur le module $\Gamma_{\Phi}(C \circ F) = A$, la filtration décroissante définie par la graduation de F :

$$A^n = \sum_{q \geq n} \Gamma_{\Phi}(C \circ F_q).$$

Elle donne naissance à une suite spectrale, pour laquelle le terme E_o est $E_o = \sum_{p,q} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ F_q)$ muni du cobord défini par le cobord de C . Alors

$E_1 = \sum_{p,q} H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, F_q)$ muni du cobord défini par le cobord de F .

Si l'hypothèse du théorème est vérifiée, E_1 se réduit à $\sum_q H^o_{\Phi}(\mathcal{X}, F_q) = \Gamma_{\Phi}(F)$, muni du cobord de F . Alors E_2 est $H(\Gamma_{\Phi}(F))$, et toutes les différentielles δ_2 , δ_3 , ... de la suite spectrale sont nulles. Comme connu, ceci suffit à établir que (1) est un isomorphisme sur.

3.- Conditions suffisantes pour que le théorème 1 soit applicable.

Il suffit que F soit Φ-injectif, ce qui arrivera notamment si F est fin. En effet, si F est Φ-injectif, on sait(17, paragraphe 1) que $H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, F) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

Il suffit aussi que F soit homotopiquement fin. En effet, soit,dans le faisceau Φ-fondamental C , Z_p le sous-faisceau des cocycles de dimension p ; on a (Exp.16, lemme du paragraphe 3)

$$H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, F) = \Gamma_{\Phi}(Z_p \circ F)/\mathrm{Im}\ \Gamma_{\Phi}(C_{p-1} \circ F) ;$$

mais, en vertu du lemme ci-dessus (paragraphe 1), le second membre a une cohomologie nulle si F est homotopiquement fin ; donc $H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$, muni du cobord défini par le cobord de F , a une cohomologie nulle, quel que soit l'entier $p \geq 1$. Donc le théorème 1 est applicable. Ainsi :

Corollaire du théorème 1 : lorsque F est un faisceau (gradué, avec cobord) homotopiquement fin, l'homomorphisme

$$(1) \qquad H(\Gamma_{\Phi}(F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$$

est un isomorphisme sur ; C désigne un faisceau Φ-fondamental quelconque.

4.- Deuxième théorème fondamental.

Théorème 2.- Soit C un faisceau Φ-fondamental de l'espace $\mathcal{X}$, et soit F un faisceau gradué avec cobord de degré +1 . Supposons vérifiée l'une au moins des deux conditions suivantes :

(a) les degrés de C sont bornés supérieurement ;

(b) les degrés de F sont bornés inférieurement.

Alors la filtration décroissante de $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$, définie par la graduation de C , définit sur $H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$ une filtration, et le module gradué associé est le terme E_{∞} d'une suite spectrale dont le terme E_2 est $\sum_{p,q} H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^q(F))$.

<u>Démonstration</u> : la filtration, sur $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$, est définie par les sous-modules

$$B^n = \sum_{p \geq n} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ F) .$$

Elle donne naissance à une suite spectrale, pour laquelle le terme E_0 est $\sum_{p,q} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ F_q)$ muni du cobord défini par le cobord de F . Considérons la suite exacte $0 \longrightarrow Z(F) \longrightarrow F \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0$; puisque C est Φ-injectif et sans torsion, la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F)) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ B(F)) \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc, pour l'opérateur cobord de F , le faisceau des cocycles de $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ s'identifie à $\Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F))$, et le faisceau des cobords à $\Gamma_{\Phi}(C \circ B(F))$. Mais la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ B(F)) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F)) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ H(F)) \longrightarrow 0$$

est exacte, toujours parce que C est Φ-injectif et sans torsion. Donc le faisceau quotient de $\Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F))$ par $\Gamma_{\Phi}(C \circ B(F))$ s'identifie à $\Gamma_{\Phi}(C \circ H(F))$, qui est donc canoniquement identifié au faisceau de cohomologie de $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ pour l'opérateur cobord de F . Ceci prouve que

$$E_1 = \sum_{p,q} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ H^q(F)) ,$$

l'opérateur différentiel de E_1 étant défini par le cobord de C . Il en résulte que $E_2 = \sum_{p,q} H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^q(F))$.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit d'observer que l'hypothèse (a) ou (b) permet de conclure que le terme E_{∞} de la suite spectrale est bien le module gradué associé au module $H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$, filtré comme il a été dit.

<u>Cas d'application du théorème</u> : la condition (b) est remplie quand la graduation de F est positive ; - la condition (a) est remplie quand l'espace $\mathcal{X}$ est de Φ-dimension finie ; plus exactement, s'il en est ainsi, on peut choisir un faisceau Φ-fondamental C de dimension finie (d'après 17, paragraphe 5, théorème 2).

5.- Troisième théorème fondamental.

On l'obtient par simple confrontation des théorèmes 1 et 2 :

Théorème 3.- Soit, sur l'espace $\mathfrak{X}$, un faisceau gradué F avec cobord de degré +1 , et soit donnée une "famille Φ " d'ensembles fermés paracompacts. Supposons vérifiées les conditions suivantes :

(1) $H^p_\Phi(\mathfrak{X}, F)$, muni de l'opérateur cobord défini par le cobord de F , a une cohomologie nulle pour tout entier $p \geq 1$;

(2) l'espace $\mathfrak{X}$ est de dimension finie, ou les degrés de F sont bornés inférieurement ;

alors il existe une suite spectrale, dont le terme E_2 est

$$\sum_{p,q} H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H^q(F)) \quad ,$$

et dont le terme E_∞ est le module gradué associé au module $H(\Gamma_\Phi(F))$ convenablement filtré.

(La condition (1) est vérifiée notamment lorsque F est homotopiquement fin, ou lorsque F est Φ-injectif).

Corollaire du théorème 3 : soit A une carapace (graduée, avec cobord de degré +1) Φ -complète et homotopiquement fine. Si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

(a) l'espace $\mathfrak{X}$ est de dimension finie ;

(b) les degrés de A sont bornés inférieurement,

alors il existe une suite spectrale dont le terme E_2 est

$$H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H^q(\mathcal{F}(A))) \quad ,$$

et dont le terme E_∞ est le module gradué associé au module $H(A_\Phi)$ convenablement filtré.

(Démonstration : il suffit de considérer le faisceau $F = \mathcal{F}(A)$, et de remarquer que $\Gamma_\Phi(F) = A$ puisque A est supposée Φ -complète).

Le théorème 3 et son corollaire sont fondamentaux : le corollaire, par exemple, exprime des relations précises entre la cohomologie du module A_Φ , pris globalement, et les propriétés locales du faisceau de cohomologie $H(\mathcal{F}(A))$, en faisant intervenir la Φ -cohomologie de l'espace $\mathfrak{X}$ relativement à ce faisceau de coefficients.

Voici quelques conséquences du théorème 3 :

Théorème 4.- Soient, sur l'espace $\mathfrak{X}$, deux faisceaux gradués F et F', avec cobord de degré +1 ; et soit $f : F \longrightarrow F'$ un homomorphisme de faisceaux, compatible avec graduation et cobord. Si l'homomorphisme des faisceaux de cohomologie $H(F) \longrightarrow H(F')$, défini par f, est un isomorphisme sur, et si les conditions (1) et (2) du théorème 3 sont satisfaites (par F et par F'), alors l'homomorphisme

$$H(\Gamma_{\Phi}(F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(F')) \tag{2}$$

est aussi un isomorphisme sur.

(Ce théorème, dû substantiellement à LERAY, ne figurait dans l'exposé 16 de 1948-49 que dans des cas particuliers).

Démonstration : soit C un faisceau Φ-fondamental ; f définit un homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F')$, compatible avec toutes les structures, et en particulier avec la structure filtrée définie par la graduation de C. Il en résulte un homomorphisme de la suite spectrale de $\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F)$ dans celle de $\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F')$; or, pour les termes E_2 de ces suites spectrales, l'homomorphisme

$$H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H(F)) \longrightarrow H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H(F'))$$

est un isomorphisme sur, d'après l'hypothèse faite. Donc l'homomorphisme des termes E_{∞} est aussi un isomorphisme sur, ce qui implique, par un raisonnement connu, que $F(\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(C \bigcirc F'))$ est aussi un isomorphisme sur. Compte tenu du théorème 1, et de compatibilités évidentes, on trouve que (2) est un isomorphisme sur. C.Q.F.D.

Corollaire du théorème 4 : soient A et A' deux carapaces Φ-complètes et homotopiquement fines. Supposons que l'espace $\mathfrak{X}$ soit de Φ-dimension finie, ou que les degrés de A et A' soient bornés inférieurement. Alors, si on a un homomorphisme de carapaces $A \longrightarrow A'$, compatible avec graduation et cobord, et si l'homomorphisme $H(\mathcal{F}(A)) \longrightarrow H(\mathcal{F}(A'))$ qu'il définit est un isomorphisme sur, alors $H(A_{\Phi}) \longrightarrow H(A'_{\Phi})$ est aussi un isomorphisme sur.

Théorème 5.- Soit, sur l'espace $\mathfrak{X}$, un faisceau gradué F, avec cobord de degré +1 . Supposons que :

(1) F soit homotopiquement fin ;

(2) l'espace $\mathfrak{X}$ soit de Φ-dimension finie, ou que les degrés de F soient bornés inférieurement ;

alors, si $H^q(F)$ est nul pour tout q sauf peut-être pour une valeur $q = k$, on a un isomorphisme canonique

$$H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(F)) \approx H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(F)) .$$

Démonstration : le théorème 3 est applicable. En outre, les différentielles δ_2, δ_3, ... de la suite spectrale du théorème 2 sont nulles, pour des raisons de degré, puisque $H^q(F) = 0$ pour $q \neq k$. On sait que, dans ce cas, la suite spectrale définit un isomorphisme canonique du terme E_2 sur la cohomologie du module filtré que l'on étudie, - ici sur $H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F)) \approx H(\Gamma_{\Phi}(F))$. D'où le résultat.

Corollaire du théorème 5 : Soit A une carapace Φ-complète et homotopiquement fine. Supposons que l'espace $\mathfrak{X}$ soit de Φ-dimension finie, ou que les degrés de A soient bornés inférieurement. Alors, si le faisceau de cohomologie $H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$ pour tout $q \neq k$, on a un isomorphisme canonique

$$H^{p+k}(A_{\Phi}) \approx H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) .$$

6.- Quelques compatibilités.

L'isomorphisme du corollaire du théorème 5 est un cas particulier d'un homomorphisme qui est défini sous des hypothèses plus générales.

Soit, sur l'espace $\mathfrak{X}$, une carapace graduée A avec cobord (de degré +1), dont les supports soient dans la famille Φ. Nous supposerons constamment que l'espace $\mathfrak{X}$ est de Φ-dimension finie, ou que les degrés de A sont bornés inférieurement. On va, en supposant remplie la condition (C_k) ci-dessous (où k désigne un entier), définir un homomorphisme

$$(3) \qquad H^{p+k}(A) \longrightarrow H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) \quad \text{pour tout entier } p .$$

La condition (C_k) est la suivante :

$$(C_k) \qquad H^q(\mathcal{F}(A)) = 0 \quad \text{pour tout entier } q > k .$$

Tout d'abord, posons $\mathcal{F}(A) = F$. L'homomorphisme $A \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F)$ définit un homomorphisme $A \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ (C désignant un faisceau Φ-fondamental). Pour définir (3), il suffira donc de définir un homomorphisme

$$H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F)) \longrightarrow H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(F)) .$$

Introduisons les sous-faisceaux F_1 et F_2 de F que voici : F_1 est somme directe des sous-faisceaux homogènes de degrés $< k$, et du sous-faisceau des cocycles de degré k ; F_2 est somme directe des sous-faisceaux homogènes de degré $< k$ et du faisceau des cobords de degré k. On a des isomorphismes naturels

$$F \longleftarrow F_1 \longrightarrow F_1/F_2 = H^k(F) \quad .$$

On en déduit

$$H(\Gamma_\Phi(C \circ F)) \longleftarrow H(\Gamma_\Phi(C \circ F_1)) \longrightarrow H(\Gamma_\Phi(C \circ H^k(F))) = H_\Phi(\mathfrak{X}, H^k(F)) \quad ,$$

et, en précisant les degrés,

$$H^{p+k}(\Gamma_\Phi(C \circ F)) \xleftarrow{\beta} H^{p+k}(\Gamma_\Phi(C \circ F_1)) \xrightarrow{\gamma} H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H^k(F)) \quad .$$

Si la condition (C_k) est vérifiée, alors $H(F_1) \longrightarrow H(F)$ est un isomorphisme sur, donc (théorème 4) β est un isomorphisme sur ; on obtient donc un homomorphisme $H^{p+k}(\Gamma_\Phi(C \circ F)) \longrightarrow H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H^k(F))$ qui, précédé de $\alpha : H^{p+k}(A) \longrightarrow H^{p+k}(\Gamma_\Phi(C \circ F))$, donne l'homomorphisme (3) que l'on voulait définir.

Si en outre $H^q(F) = 0$ pour $q < k$, alors $H(F_1) \longrightarrow H(F_1/F_2)$ est aussi un isomorphisme sur, donc γ est un isomorphisme sur ; et si enfin A est une carapace Φ-complète et homotopiquement Φ-fine, α est un isomorphisme sur (théorème 1). On est alors dans les hypothèses du corollaire du théorème 5, et (3) est un isomorphisme sur ; on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien l'isomorphisme obtenu, dans le corollaire du théorème 5, à partir de la suite spectrale.

Théorème 6.- L'homomorphisme (3) est fonctoriel. D'une façon précise : si A et A' sont 2 carapaces (sur le même espace $\mathfrak{X}$) satisfaisant aux conditions posées une fois pour toutes (au début de ce numéro 6) et à la condition (C_k), et si l'on a un homomorphisme de carapaces $A' \longleftarrow A$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{p+k}(A) & \longrightarrow & H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{p+k}(A') & \longrightarrow & H^p_\Phi(\mathfrak{X}, H^k(\mathcal{F}(A'))) \end{array}$$

(où les homomorphismes horizontaux sont ceux du type (3) qu'on vient de définir et où le 2e homomorphisme vertical provient de l'homomorphisme de faisceaux $\mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(A')$ défini par $A \longrightarrow A'$).

La démonstration est immédiate, en décomposant l'homomorphisme (3) en les homomorphismes α, β, γ qui ont servi à le définir.

Avant de donner un autre théorème de compatibilité, nous allons préciser la notion de <u>sous-carapace</u> et de <u>carapace-quotient</u>. Etant donnée une carapace A , appelons sous-carapace un sous-module A' jouissant de la propriété suivante : si un élément $\alpha \in A$ est tel que, pour tout point x , son image $\varphi_x(\alpha) \in A_x$ soit dans A'_x , alors α appartient à A' . S'il en est ainsi, appelons A'' le module-quotient A/A' , posons $A''_x = A_x/A'_x$, et définissons les homomorphismes $A'' \longrightarrow A''_x$ par passage aux quotients à partir de $A \to A_x$; ceci définit A'' comme précarapace, et on vérifie que c'est une véritable carapace. On l'appelle la carapace quotient de A par la sous-carapace A' . Alors le faisceau $\mathcal{F}(A'')$ s'identifie au quotient $\mathcal{F}(A)/\mathcal{F}(A')$;

<u>Théorème 7</u>.- Soit donnée une suite exacte de carapaces

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

(i.e.: A' est sous-carapace de A , et A'' est la carapace-quotient de A par A') . Supposons en outre que, F' , F et F'' désignant les faisceaux $\mathcal{F}(A')$, $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(A'')$, la suite

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow H^k(F') \longrightarrow H^k(F) \longrightarrow H^k(F'') \longrightarrow 0$$

soit exacte, et que A' , A et A'' aient leurs supports dans Φ et satisfassent à la condition (C_k) (moyennant laquelle il suffira que $H^{k-1}(F'')$ soit nul, pour que la suite (4) soit exacte). Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H^{p+k}(A') & \longrightarrow & H^{p+k}(A) & \longrightarrow & H^{p+k}(A'') & \longrightarrow & H^{p+k+1}(A') & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H^p_\Phi(\mathcal{X}, H^k(F')) & \longrightarrow & H^p_\Phi(\mathcal{X}, H^k(F)) & \longrightarrow & H^p_\Phi(\mathcal{X}, H^k(F'')) & \longrightarrow & H^{p+1}_\Phi(\mathcal{X}, H^k(F')) & \longrightarrow
\end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont ceux du type (3) , où la première ligne désigne la suite exacte de cohomologie définie par $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$, et où la deuxième ligne désigne la suite exacte de Φ-cohomologie de l'espace $\mathcal{X}$, relative à la suite exacte de faisceaux de coefficients (4) .

<u>Démonstration</u> : les 2 premiers carrés du diagramme sont commutatifs, en vertu du théorème 6 . Reste à montrer la commutativité du dernier carré. Or, avec les notations des pages 6-7 , on a des homomorphismes de suites exactes (de faisceaux)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F''_1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^k(F') & \longrightarrow & H^k(F) & \longrightarrow & H^k(F'') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

on en déduit aussitôt la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H^{p+k}(A'') & \longrightarrow & H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F'')) & \longleftarrow & H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F_1'')) & \longrightarrow & H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(F'')) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{p+k+1}(A') & \longrightarrow & H^{p+k+1}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F)) & \longleftarrow & H^{p+k+1}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F_1)) & \longrightarrow & H^{p+1}_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(F')) \end{array}$$

et ceci établit le théorème.

Le théorème s'applique notamment quand on a une carapace A , à supports dans Φ (et à degrés bornés inférieurement si l'espace n'est pas de Φ-dimension finie), et que A' est la sous-carapace des éléments de A dont le support est contenu dans un sous-espace <u>ouvert</u> de l'espace $\mathfrak{X}$; supposant en outre que A satisfait à la condition (C_k), il en sera de même de A' et de $A'' = A/A'$, et la suite (4) sera exacte. Dans ce cas, la ligne inférieure du diagramme du théorème 7 s'interprète : c'est la suite exacte de Φ-cohomologie relative au sous-espace ouvert $\mathfrak{X}'$ et à son complémentaire fermé $\mathfrak{X}''$, pour le faisceau de coefficients $H^k(F)$ sur l'espace $\mathfrak{X}$.

Supposons en outre que $H^q(F) = 0$ pour $q \neq k$ (on pose toujours $F = \mathcal{F}(A)$) , et que la carapace A (à supports dans Φ) soit Φ-complète et homotopiquement fine ; alors A' est Φ'-complète et homotopiquement -fine (on note Φ' la famille des ensembles de Φ contenus dans $\mathfrak{X}'$) . Cela étant, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & H^{p+k}(A') & \longrightarrow & H^{p+k}(A) & \longrightarrow & H^{p+k}(A'') & \longrightarrow & H^{p+k+1}(A') & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^p_{\Phi'}(\mathfrak{X}', H^k(F)) & \longrightarrow & H^p_{\Phi}(\mathfrak{X}, H^k(F)) & \longrightarrow & H^p_{\Phi''}(\mathfrak{X}'', H^k(F)) & \longrightarrow & H^{p+1}_{\Phi'}(\mathfrak{X}', H^k(F)) & \longrightarrow \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes, deux sur trois des homomorphismes verticaux sont des isomorphismes sur ; il en résulte ("lemme des cinq") que les autres sont aussi des isomorphismes sur. En résumé :

<u>Corollaire du théorème 7</u> : lorsque A , à supports dans Φ , satisfait aux conditions du corollaire du théorème 5, la suite exacte de Φ-cohomologie relative à un sous-espace ouvert $\mathfrak{X}'$ et à son complémentaire fermé $\mathfrak{X}''$, pour le faisceau de coefficients $H^k(\mathcal{F}(A))$, s'identifie à la suite exacte de cohomologie définie par le module A , son sous-module A' et le module-quotient A'' (A' désignant le sous-module des éléments de A dont le support est dans l'ouvert $\mathfrak{X}'$) .

Appendice.-

La carapace définie par les cochaînes du <u>nerf</u> d'un recouvrement fermé localement fini, conduit à la notion générale de <u>carapace basique</u> : c'est une carapace A où l'on s'est donné des éléments privilégiés e_i tels que tout élément de A s'écrive, d'une seule manière, comme combinaison (à coefficients dans l'anneau de base K), d'éléments e_i (la combinaison pouvant être infinie, mais localement finie ; i.e.: chaque point de l'espace possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de supports d'éléments e_i à coefficient $\neq 0$); on suppose en outre que le support d'une combinaison $\sum_i k_i e_i$ est la réunion des supports des e_i dont le coefficient k_i est $\neq 0$.

Une carapace basique sera dite <u>localement finie</u> si chaque point possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de supports d'éléments e_i . Ces supports S_i seront dits Φ-<u>acycliques</u> si $H^q_\Phi(S_i , K) = 0$ pour tout $q \geq 1$.

<u>Lemme</u> : soit A une carapace basique, localement finie, telle que les supports S_i des éléments de base soient Φ-acycliques et satisfassent à la condition :

($C\Phi$) <u>pour tout ensemble</u> $A \in \Phi$, <u>la réunion des</u> S_i <u>qui rencontrent</u> A <u>appartient à</u> Φ .

<u>Alors</u> $H^q_\Phi(\mathcal{X}, \mathcal{F}(A)) = 0$ <u>pour</u> $q \geq 1$.

<u>Démonstration</u> : compte tenu du lemme de 16 de l'Exp.16,(par.3), il suffit de montrer que $\Gamma_\Phi(C_{q-1} \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(Z_q \circ F)$ est un homomorphisme <u>sur</u> ; on a posé $F = \mathcal{F}(A)$. En vertu de l'hypothèse ($C\Phi$) , cela revient à prouver que $\Gamma_\Phi(C_{q-1} , S_i) \longrightarrow \Gamma_\Phi(Z_q , S_i)$ est <u>sur</u> . Or c'est $H^0_\Phi(S_i , C_{q-1}) \longrightarrow$ $\longrightarrow H^0_\Phi(S_i , Z_q)$; en vertu de la suite exacte de Φ-cohomologie, relative à la suite exacte de coefficients $0 \longrightarrow Z_{q-1} \longrightarrow C_{q-1} \longrightarrow Z_q \longrightarrow 0$, il suffit de montrer que

$$H^1_\Phi(S_i , Z_{q-1}) = 0 .$$

Or cela résulte facilement de l'hypothèse $H^q_\Phi(S_i , K) = 0$.

En application de ce lemme, on voit que <u>si une carapace</u> A <u>est basique, localement finie, à supports</u> Φ-<u>acycliques</u>, et satisfait à ($C\Phi$) , les conditions du théorème 1 sont remplies pour le faisceau $F = \mathcal{F}(A)$. Si en outre les supports de A sont <u>connexes</u>, on voit aisément que A est complète ; donc $A_\Phi = \Gamma_\Phi(F)$, et par suite (théorème 1) $H(A_\Phi)$ est canoniquement isomorphe à $H(\Gamma_\Phi(C \circ \mathcal{F}(A)))$.

En conséquence, on peut, dans le corollaire du théorème 3 et ses conséquences, remplacer l'hypothèse " A est homotopiquement fine et Φ-complète", par l'hypothèse : " A est une carapace basique, localement finie, satisfaisant à $(C\Phi)$, et à supports Φ-acycliques et connexes".

Par exemple, si les degrés de A sont $\geqslant 0$, et si $H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$ pour $q \neq 0$, le corollaire du théorème 5 dit que $H^p(A_\Phi)$ est canoniquement isomorphe à $H^p_\Phi(\mathcal{X}, H^o(\mathcal{F}(A)))$. Ceci vaut notamment si A est la carapace définie par un recouvrement localement fini formé d'ensembles fermés connexes et Φ -acycliques, de manière que $(C\Phi)$ soit vérifiée. On retrouve ainsi notamment un théorème de LERAY (Journal de Math. 1946).