H. Cartan

Théorie axiomatique de la cohomologie

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. nº 16, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A16_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

THÉORIE AXIOMATIQUE DE LA COHOMOLOGIE.
(Exposé de H. CARTAN, le 23.4.1951).

Introduction : Il s'agira ici de la cohomologie "de Čech" ; plus exactement, dans le cas particulier d'un espace compact, la famille Φ étant la famille de tous les sous-espaces fermés, on retrouvera la cohomologie telle qu'elle a été définie par Čech , au moins lorsque les coefficients forment un faisceau constant. Dans le cas général, la cohomologie qu'on va définir dépend de la famille Φ ; elle dépend aussi des coefficients choisis : ceux-ci constituent, en général, un faisceau F (sans graduation ni cobord) sur l'espace considéré $\mathfrak{X}$. Il s'agit donc de "coefficients locaux", non pas dans le sens (plus particulier) des coefficients locaux de Steenrod, mais tels que LERAY les a introduits dans ses Notes aux C.R. Acad. Sci. Paris, t.222 (1946) p. 1366-1369 et 1419-1422 ; t. 223 (1946) p. 395-397 et 412-415 et dans son mémoire du J. de Math. pures et appl., t. 29, 1950, p. 1-139. Par contre, l'introduction systématique des familles Φ est nouvelle : Leray s'était borné au cas où Φ est la famille des compacts dans un espace localement compact.

1.- Axiomes d'une théorie de la cohomologie.

Dans une telle théorie, l'espace topologique $\mathfrak{X}$ est donné une fois pour toutes, ainsi qu'une famille Φ de parties fermées paracompactes de $\mathfrak{X}$, satisfaisant à (Φ 1) , (Φ 2) et (Φ 3) (cf. Exposé 15).

On se donne aussi, une fois pour toutes, un anneau K , commutatif avec élément-unité ; on supposera que K est un anneau d'intégrité, principal.

On suppose que l'on s'est donné :

I.- Pour tout faisceau F de K-modules (sur l'espace $\mathfrak{X}$) , et pour tout entier q , un K-module $H^q_\Phi(\mathfrak{X}, F)$, appelé le q-ième module de cohomologie de l'espace $\mathfrak{X}$, relativement à la famille Φ et au faisceau de coefficients F (ou encore le module de Φ -cohomologie de dimension q de l'espace $\mathfrak{X}$, à coefficients dans F) ;

II.- Pour tout homomorphisme de faisceaux $F \longrightarrow F'$, et pour tout entier q , un homomorphisme $H^q_\Phi(\mathfrak{X}, F) \longrightarrow H^q_\Phi(\mathfrak{X}, F')$;

III.- Pour toute suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes

$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, et pour tout entier q , un homomorphisme

$$H^q_\Phi(\mathcal{X}, F'') \to H^{q+1}_\Phi(\mathcal{X}, F') .$$

Relativement aux données précédentes, on suppose vérifiés les 6 axiomes suivants :

(a) $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) = 0$ pour $q < 0$, $H^0_\Phi(\mathcal{X}, F) = \Gamma_\Phi(F)$;

(b) si F est <u>fin</u>, $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) = 0$ pour $q > 0$;

(c) pour toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, la suite

$$\cdots \to H^q_\Phi(\mathcal{X},F') \xrightarrow{\beta_q} H^q_\Phi(\mathcal{X},F) \xrightarrow{\gamma_q} H^q_\Phi(\mathcal{X},F'') \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}_\Phi(\mathcal{X},F') \to \cdots$$

(où β_q et γ_q sont les homomorphismes définis en II , et δ_q est l'homomorphisme défini en III) est une <u>suite exacte</u> ;

Les trois derniers axiomes expriment des propriétés de compatibilité qu'il faut évidemment supposer pour que la théorie soit maniable :

(d) si $F \to F$ est l'application identique, l'homomorphisme associé $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) \to H^q_\Phi(\mathcal{X}, F)$ est l'application identique ;

(e) si $F \to F''$ est composé de $F \to F'$ et $F' \to F''$, l'homomorphisme associé $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) \to H^q_\Phi(\mathcal{X}, F'')$ est composé des homomorphismes $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) \to H^q_\Phi(\mathcal{X}, F')$ et $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F') \to H^q_\Phi(\mathcal{X}, F'')$ associés à $F \to F'$ et $F' \to F''$;

(f) si on a un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F' & \to & F & \to & F'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' & \to & 0 \end{array}$$ (diagramme commutatif)

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^q_\Phi(\mathcal{X}, F'') & \longrightarrow & H^{q+1}_\Phi(\mathcal{X}, F') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q_\Phi(\mathcal{X}, G'') & \longrightarrow & H^{q+1}_\Phi(\mathcal{X}, G') \end{array}$$

(où les homomorphismes verticaux sont ceux définis en II, les homomorphismes horizontaux ceux définis en III).

Dans ce qui suit, on va montrer un <u>théorème d'existence et d'unicité</u> : l'espace $\mathcal{X}$ et la famille Φ étant donnés, on prouvera qu'il existe une théorie de la cohomologie (dans le sens ci-dessus), et que deux telles théories sont <u>isomorphes</u> (dans un sens qui sera précisé).

2.- Démonstration de l'unicité.

L'unicité va résulter d'un théorème plus général. Avant de l'énoncer, définissons la notion d'homomorphisme d'une théorie dans une autre :

Soient deux espaces $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, et une application continue f de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}'$. Soient Φ une famille d'ensembles paracompacts de $\mathfrak{X}$ (satisfaisant aux conditions du début du numéro 1) et Φ' une famille d'ensembles paracompacts de $\mathfrak{X}'$ (id.), et supposons que l'image réciproque, pour f , d'un ensemble de Φ' soit un ensemble de Φ . (Par exemple, si $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$, et si f est l'application identique, on supposera $\Phi' \subset \Phi$). Soit $\mathcal{T}$ une théorie de la cohomologie pour $\mathfrak{X}$ et Φ ; et soit $\mathcal{T}'$ une théorie de la cohomologie pour $\mathfrak{X}'$ et Φ' . On appelle homomorphisme de la théorie $\mathcal{T}'$ dans la théorie $\mathcal{T}$, relativement à l'application continue f , une fonction qui, à chaque homomorphisme de faisceaux $F' \longrightarrow F$ compatible avec l'application f (voir Exposé 14, par. 3 ; F est un faisceau sur $\mathfrak{X}$, et F' un faisceau sur $\mathfrak{X}'$) , et à chaque entier q , associe un homomorphisme de modules

$$H^q_{\Phi'}(\mathfrak{X}' , F') \longrightarrow H^q_{\Phi}(\mathfrak{X}, F)$$

(le premier module est celui relatif à la théorie $\mathcal{T}'$, le second est relatif à la théorie $\mathcal{T}$) , de manière que soient satisfaites les conditions suivantes :

(1) Pour $q = 0$, l'homomorphisme en question n'est autre que l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi'}(F') \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F)$ défini par l'homomorphisme $F' \longrightarrow F$ (dans l'Exp. 14, fin du numéro 3, on a vu que $F' \longrightarrow F$ définit un homomorphisme $\Gamma(F') \longrightarrow \Gamma(F)$; et l'hypothèse faite sur les familles Φ et Φ' implique que cet homomorphisme applique le sous-module $\Gamma_{\Phi'}(F')$ de $\Gamma(F')$, dans le sous-module $\Gamma_{\Phi}(F)$ de $\Gamma(F)$) ;

(2) si on a des faisceaux F , G sur $\mathfrak{X}$, des faisceaux F' , G' sur $\mathfrak{X}'$, et des homomorphismes $F \longrightarrow G$ et $F' \longrightarrow G'$ compatibles avec des homomorphismes $F' \longrightarrow F$ et $G' \longrightarrow G$ (ces derniers étant compatibles avec f) (pour cette notion, voir Exp. 14, fin du numéro 3), alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q_{\Phi'}(\mathfrak{X}' , F') & \longrightarrow & H^q_{\Phi}(\mathfrak{X}, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q_{\Phi'}(\mathfrak{X}', G') & \longrightarrow & H^q_{\Phi}(\mathfrak{X}, G) \end{array}$$

(les homomorphismes verticaux sont ceux des théories $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement) ;

(3) si on a un homomorphisme (compatible avec f) de 2 suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F'_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', F'_2) & \longrightarrow & H^{q+1}_{\Phi'}(\mathcal{X}', F'_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F_2) & \longrightarrow & H^{q+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, F_1) \end{array}$$

(les homomorphismes horizontaux sont ceux des théories $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$).

Cette définition d'un homomorphisme d'une théorie dans une autre étant posée, nous allons démontrer :

Théorème 1.- Etant donnés $\mathcal{X}$, Φ et une théorie $\mathcal{T}$, étant donnés d'autre part $\mathcal{X}'$, Φ' et une théorie $\mathcal{T}'$, étant donné en outre une application continue f de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}'$, telle que l'image réciproque d'un ensemble de Φ' soit un ensemble de Φ , il existe un homomorphisme de la théorie $\mathcal{T}'$ dans la théorie $\mathcal{T}$, relativement à f , et cet homomorphisme est unique.

Avant de faire la démonstration, signalons qu'on va en réalité démontrer un peu plus. En effet, on n'aura pas à se servir de tous les axiomes des théories $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$: il suffira de remplacer la conjonction des axiomes (b) et (c) de chaque théorie, par l'axiome plus faible :

(b,c)' Etant donnée une suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$, où F est fin, la suite

$$H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F) \longrightarrow H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F'') \longrightarrow H^{q+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, F') \longrightarrow 0$$

est exacte.

(Cet axiome affaibli implique évidemment l'axiome (b), mais pas l'axiome (c)).

Démonstration : on va utiliser le faisceau S^0 des fonctions à valeurs dans l'anneau K (cf. Exp. 15, numéro 6) ; pour la simplicité des notations, on le notera S dans cette démonstration ; ceci, sur l'espace $\mathcal{X}$. On notera S' le faisceau analogue sur l'espace $\mathcal{X}'$. Tout faisceau F sur $\mathcal{X}$ peut être plongé dans un faisceau fin : l'homomorphisme canonique de K (considéré comme faisceau constant) dans S (qui, à chaque élément k de K , associe la fonction constante égale à k) définit un homomorphisme de $F = F \circ K$ dans $F \circ S$, homomorphisme qui est biunivoque ; on notera $\overline{F}$ le faisceau quotient de $F \circ S$ par son sous-faisceau F . Le faisceau $F \circ S$ est fin, parce que S est fin(Exp.15,5,proposition 1). Faisons de même sur l'espace $\mathcal{X}'$, avec un faisceau F' . Si on a un homomorphisme $F' \longrightarrow F$ compatible avec l'application f , il définit un homomorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F' \circ S' & \longrightarrow & \overline{F'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F \circ S & \longrightarrow & \overline{F} & \longrightarrow & 0 . \end{array}$$

Les axiomes (b,c)' des théories $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, et les conditions (2) et (3) que nous supposons vérifiées par un homomorphisme de la théorie $\mathcal{T}'$ dans la théorie $\mathcal{T}$, conduisent au diagramme commutatif

$$\text{(D)}\qquad \begin{array}{ccccccc} H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', F'\circ S') & \longrightarrow & H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', \overline{F'}) & \longrightarrow & H^{q+1}_{\Phi'}(\mathcal{X}', F') & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F\circ S) & \longrightarrow & H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, \overline{F}) & \longrightarrow & H^{q+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, F) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes, et où les homomorphismes verticaux sont ceux de l'homomorphisme considéré de $\mathcal{T}'$ dans $\mathcal{T}$. Ceci montre, par récurrence sur q, que les homomorphismes $H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', F') \longrightarrow H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$ associés à $F' \longrightarrow F$ sont déterminés de manière unique, s'ils existent et satisfont à (1), (2) et (3) ; car, pour $q = 0$, ils sont donnés par (1) ; et s'ils sont uniques pour q, ils le sont pour $q+1$, en vertu du diagramme (D).

Montrons maintenant que les homomorphismes définis par ce procédé de récurrence sur q, grâce à la condition (1) et au diagramme (D), satisfont effectivement aux conditions (2) et (3). Pour la condition (2), c'est presque immédiat : elle est vérifiée pour $q = 0$ (cf. fin du numéro 3 de 14). Supposons la vérification faite pour q, et faisons-la pour $q+1$: elle résulte immédiatement du diagramme (D) et de la condition (2) pour q.

Montrons maintenant que la condition (3) est satisfaite. Dans les notations de la condition (3), on va interpréter l'homomorphisme $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F_2) \longrightarrow H^{q+1}(\mathcal{X}, F_1)$. Désignons par G le quotient de $F\circ S$ par l'image de F_1 (F_1 est sous-faisceau de F, lui-même considéré comme sous-faisceau de $F\circ S$). On a le diagramme commutatif, où les suites horizontales sont exactes,

$$\text{(T)}\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F\circ S & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_1\circ S & \longrightarrow & \overline{F_1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D'où, dans la théorie $\mathcal{T}$, les homomorphismes

$$H^q_{\Phi}(\mathcal{X},F_2) \longrightarrow H^q_{\Phi}(\mathcal{X},G)/\mathrm{Im}\, H^q_{\Phi}(\mathcal{X},F\circ S) \xleftarrow{\alpha} H^q_{\Phi}(\mathcal{X},\overline{F_1})/\mathrm{Im}\, H^q(\mathcal{X},F_1\circ S)$$

où α est un <u>isomorphisme sur</u> ; dans la théorie $\mathcal{T}$, le module de droite de cette suite est isomorphe à $H^{q+1}_{\Phi}(\mathcal{X},F_1)$, de sorte que la suite précédente définit un homomorphisme de $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F_2)$ dans $H^{q+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, F_1)$, qui est précisément celui que la théorie $\mathcal{T}$ attache à la suite exacte $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0$. Faisons la même chose pour la suite exacte $0 \longrightarrow F'_1 \longrightarrow F' \longrightarrow F'_2 \longrightarrow 0$ sur l'espace $\mathcal{X}'$, d'où un diagramme (T'). L'homomorphisme de la deuxième suite exacte dans la première définit un homomorphisme du diagramme (T') dans le diagramme (T). Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', F'_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', G')/\mathrm{Im}\, H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', F' \circ S') \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', \overline{F'_1})/\mathrm{Im}\, H^q_{\Phi'}(\mathcal{X}', F'_1 \circ S') \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & H^{q+1}_{\Phi'}(\mathcal{X}', F'_1) \arrow[d] \\
H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F_2) \arrow[r] & H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, G)/\mathrm{Im}\, H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F \circ S) \arrow[r, leftrightarrow] & H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, \overline{F_1})/\mathrm{Im}\, H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F_1 \circ S) \arrow[r, leftrightarrow] & H^{q+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, F_1)
\end{tikzcd}$$

où les homomorphismes verticaux sont ceux définis plus haut par récurrence sur q. Le dernier carré de droite est commutatif, en vertu de la définition récurrente de ces homomorphismes ; les deux autres carrés sont commutatifs, en vertu de la condition (2). Donc le diagramme entier est commutatif, et ceci démontre précisément la condition (3). La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

<u>Corollaire du théorème 1</u> : si l'on a deux théories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ pour un même espace $\mathcal{X}$ et une même famille Φ, il existe un homomorphisme et un seul $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$, compatible avec l'application identique de $\mathcal{X}$; il existe aussi un homomorphisme et un seul de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. En composant ces homomorphismes, on trouve l'homomorphisme identique de $\mathcal{C}$ (resp. de $\mathcal{C}'$), à cause de l'unicité. Donc il existe un "isomorphisme" de la théorie $\mathcal{C}$ sur la théorie $\mathcal{C}'$, et cet isomorphisme est unique. Ceci constitue le <u>théorème d'unicité</u> pour la théorie de la cohomologie.

3.- <u>Démonstration de l'existence</u>.

Une démonstration d'existence pourrait être tirée des considérations précédentes. Il est préférable d'en donner une autre, qui repose sur la notion de <u>faisceau fondamental</u> d'un espace $\mathcal{X}$. Quelques notions préliminaires seront utiles.

<u>Définition</u> : on appelle <u>résolution fine</u> de K (anneau de base) une <u>suite exacte</u> de faisceaux et d'homomorphismes

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots$$

où les C_i $(i = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$ sont <u>fins et sans torsion</u>. A toute résolution fine de K on associe le faisceau gradué C, avec cobord, défini par la suite $C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots$, qu'on appelle un <u>faisceau fondamental</u>. Sa cohomologie est triviale, dans le sens suivant : $H^n(C) = 0$ pour $n > 0$, et on a un isomorphisme, bien défini, de K sur $H^0(C)$; cet isomorphisme est défini par l'homomorphisme $K \longrightarrow C_0$.

<u>Il existe des résolutions fines de</u> K : par exemple, le faisceau d'Alexander-Spanier (Exp.15, n° 6) donne une telle résolution. Sur une variété différentiable (avec $K = R$), les formes différentielles fournissent une résolution fine de R.

Nous allons maintenant montrer que, l'espace $\mathcal{X}$ étant donné, toute résolution fine de K permet, pour toute famille Φ , de construire une théorie de la cohomologie, au sens du numéro 1 . Ceci prouvera l'existence d'une telle théorie, dont l'unicité a déjà été démontrée.

Soit C un faisceau fondamental. Pour tout faisceau F , posons $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) = H^q(\Gamma_\Phi(C \circ F))$, q-ième module de cohomologie du module gradué avec cobord $\Gamma_\Phi(C \circ F)$. Pour tout homomorphisme de faisceaux $F \longrightarrow F'$, définissons $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) \longrightarrow H^q_\Phi(\mathcal{X}, F')$ comme étant l'homomorphisme des cohomologies associé à l'homomorphisme

$$\Gamma_\Phi(C \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ F') ,$$

compatible avec les graduations et les cobords, que définit $F \longrightarrow F'$. Enfin, pour toute suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$, la suite qu'elle définit $0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ F') \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C \circ F'') \longrightarrow 0$ est aussi une suite exacte, parce que C est fin et sans torsion. (Exposé 15, proposition 3). Les homomorphismes de cette dernière suite sont compatibles avec les graduations et les cobords ; la classique suite exacte de cohomologie définit alors un homomorphisme $H^q(\Gamma_\Phi(C \circ F'')) \longrightarrow H^{q+1}(\Gamma_\Phi(C \circ F'))$, qui sera, par définition, l'homomorphisme $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F'') \longrightarrow H^{q+1}_\Phi(\mathcal{X}, F')$ associé à la suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$.

Nous venons de définir les données I, II, III d'une "théorie de la cohomologie". Il reste à voir que ces données satisfont aux conditions (a), (b), (c), (d), (e), (f) du numéro 1. Pour (a), il est évident que $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) = 0$ pour $q < 0$; pour $q = 0$, l'homomorphisme $K \longrightarrow C_0$ définit un homomorphisme $F \longrightarrow C_0 \circ F$; d'où un homomorphisme : $\Gamma_\Phi(F) \longrightarrow H^0_\Phi(\mathcal{X}, F)$.

Laissons de côté, pour un instant, la vérification de (b). La condition (c) est remplie, à cause de la classique suite exacte de cohomologie. La vérification de (d), (e), (f) est triviale. Il nous reste à vérifier la condition (b), et le fait que l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(F) \longrightarrow H^0_\Phi(\mathcal{X}, F)$ est un isomorphisme sur. Nous utiliserons le

Lemme : soit C un faisceau gradué avec cobord, sans torsion ; soit Z_n le sous-faisceau des cocycles de degré n . Alors, si $H^{q+1}(C) = 0$, l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(Z_q \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C_q \circ F)$ est biunivoque, et applique le premier module sur le module des cocycles de degré q de $\Gamma_\Phi(C \circ F)$. Et par suite $H^q(\Gamma_\Phi(C \circ F)$ s'identifie au quotient de $\Gamma_\Phi(Z_q \circ F)$ par l'image de $\Gamma_\Phi(C_{q-1} \circ F)$.

En effet : $\Gamma_\Phi(Z_q \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C_q \circ F)$ est biunivoque, parce que le faisceau quotient C_q/Z_q s'identifie à un sous-faisceau de C_{q+1}, donc est sans torsion. Le même résultat vaut aussi pour $q+1$; donc le noyau de $\Gamma_\Phi(C_q \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C_{q+1} \circ F)$ est celui de $\Gamma_\Phi(C_q \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(Z_{q+1} \circ F)$. Or la suite $0 \longrightarrow Z_q \longrightarrow C_q \longrightarrow Z_{q+1} \longrightarrow 0$ est exacte, parce que $H^{q+1}(C) = 0$ par hypothèse ; donc la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(Z_q \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C_q \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(Z_{q+1} \circ F)$$

est exacte, et ceci démontre le lemme.

Cela étant, revenons au faisceau fondamental C supposé donné. Appliquons-lui le lemme pour $q = 0$: le module des cocycles de degré 0 de $\Gamma_\Phi(C \circ F)$ s'identifie à $\Gamma_\Phi(Z_o \circ F)$, et comme l'homomorphisme $K \longrightarrow C_o$ identifie Z_o à K, on voit que $\Gamma_\Phi(F) = \Gamma_\Phi(K \circ F)$ s'identifie bien à $H^o(\Gamma_\Phi(C \circ F))$, ce qui achève de vérifier la condition (a) de la théorie axiomatique.

Quant à la condition (b), elle va résulter de la proposition plus générale :

<u>Proposition 1</u>.- Si un faisceau F est <u>fin</u>, on a, pour tout entier $q \geqslant 1$,

$$H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) = H^q(\Gamma_\Phi(C \circ F)) = 0 .$$

En effet, en vertu du lemme, $H^q(\Gamma_\Phi(C \circ F))$ s'identifie au quotient de $\Gamma_\Phi(Z_q \circ F)$ par l'image de $\Gamma_\Phi(C_{q-1} \circ F))$; or l'homomorphisme $C_{q-1} \longrightarrow Z_q$ est <u>sur</u>, puisque $H^q(C) = 0$; donc, F étant fin, la proposition 3 de l'Exposé-15 (par. 8) dit que l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(C_{q-1} \circ F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(Z_q \circ F)$ est <u>sur</u>. C.Q.F.D.

4.- <u>Sur les homomorphismes définis par une application continue</u>.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1 (numéro 2). Il existe alors <u>un homomorphisme</u> et un seul de <u>la</u> théorie de la cohomologie pour $\mathcal{X}'$ et Φ', dans <u>la</u> théorie de la cohomologie pour $\mathcal{X}$ et Φ. Nous allons maintenant indiquer comment cet homomorphisme peut être obtenu à l'aide de faisceaux fondamentaux.

Supposons que l'on ait un faisceau fondamental C sur l'espace $\mathcal{X}$, et un faisceau fondamental C' sur l'espace $\mathcal{X}'$; et supposons connu un homomorphisme (compatible avec l'application f) de C' dans C :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & C'_o & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_n & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & C_o & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & \cdots \end{array} ,$$

diagramme commutatif où le premier homomorphisme vertical est l'application identique. Alors, pour tout homomorphisme de faisceaux $F' \longrightarrow F$, compatible avec l'application f de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}'$, on obtient un homomorphisme du complexe $\Gamma_{\Phi'}(C' \circ F')$ dans le complexe $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$, d'où, en passant à la cohomologie de ces complexes, des homomorphismes

$$H^q(\Gamma_{\Phi'}(C' \circ F')) \longrightarrow H^q(\Gamma_{\Phi}(C \circ F)) ,$$

compatibles, pour $q = 0$, avec l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi'}(F') \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F)$ défini par $F' \longrightarrow F$. On vérifie immédiatement que ces homomorphismes satisfont aux conditions (1), (2), (3) qui expriment que l'on a un homomorphisme de la théorie pour $(\mathcal{X}', \Phi')$ dans la théorie pour $(\mathcal{X}, \Phi)$.