H. CARTAN

Faisceaux sur un espace topologique. I

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 14, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A14_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

FAISCEAUX SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE, I.

(Exposé de H. CARTAN, le 9.4.1951).

Le but de cet exposé et des suivants est de reprendre entièrement la théorie des "faisceaux et carapaces" qui a fait l'objet des exposés 12 à 17 du Séminaire 1948/49. Entre temps est paru le mémoire de LERAY (J. de Math., Paris et appl. t. 29, 1950, p. 1-139).

Nous commencerons par une théorie axiomatique de la "cohomologie de Čech" des espaces topologiques, à coefficients locaux les plus généraux, c'est-à-dire à coefficients dans un faisceau. Nous allons donc exposer tout d'abord les notions relatives aux faisceaux.

N.B.- La terminologie s'écartera quelque peu de celle adoptée dans le Séminaire 1948/49. En particulier, le sens du mot "faisceau" a été modifié.

1.- Définition d'un faisceau.

On va définir un faisceau sur un espace topologique $\mathfrak{X}$, sur lequel on ne fera d'abord aucune hypothèse restrictive.

La définition qui suit est due, sous la forme "topologique" qui lui est donnée, à LAZARD :

Définition : soit K un anneau commutatif à élément-unité (cas fréquents : anneau des entiers, ou corps). Un faisceau de K-modules sur un espace topologique (régulier) $\mathfrak{X}$ est un ensemble F , muni d'une application p (dite "projection") de F sur $\mathfrak{X}$ et des 2 structures suivantes :

1) pour chaque point $x \in \mathfrak{X}$, l'image réciproque $\overset{-1}{p}(x) = F_x$ est munie d'une structure de K-module ;

2) F est muni d'une structure topologique (en général non séparée) satisfaisant aux deux conditions : (α) les lois de composition de F (non partout définies) définies par la structure de K-module des F_x sont continues ; (β) la projection p est un homéomorphisme local (i.e. : tout élément de F possède un voisinage ouvert que p applique biunivoquement et bicontinûment sur un ouvert de $\mathfrak{X}$) .

Sections d'un faisceau : une section de F au-dessus d'un ouvert $X \subset \mathfrak{X}$

est une application <u>continue</u> $s : X \longrightarrow F$ qui, suivie de p, donne l'identité. L'image d'une telle application s (appelée aussi section) est un sous-ensemble <u>ouvert</u> de F, qui contient un élément de chaque module F_x tel que $x \in X$.

Tout élément de F appartient à une section au-dessus d'un voisinage de sa projection, en vertu de la condition (β). Pour chaque ouvert $X \subset \mathfrak{X}$, on notera $\Gamma(F, X)$ l'ensemble des sections de F au-dessus de X. Cet ensemble n'est pas vide, car il contient la section s obtenue en associant, à chaque $x \in X$, l'élément $0 \in F_x$ (l'ensemble des 0 de tous les F_x pour $x \in \mathfrak{X}$ est un ensemble <u>ouvert</u> de F, parce que, d'après la conditions (α), l'opposé d'un élément de F est une fonction continue de cet élément). L'ensemble $\Gamma(F, X)$ est muni d'une structure de K-module d'une manière évidente.

Si s est un élément de $\Gamma(F, X)$, l'ensemble de points $x \in X$ tels que $s(x) \neq 0$ est <u>fermé</u> ; on l'appelle le <u>support</u> de la section s.

Si X et Y sont deux ouverts de $\mathfrak{X}$ tels que $X \subset Y$, on a un homomorphisme : $\Gamma(F, Y) \longrightarrow \Gamma(F, X)$, car la restriction à X d'une section au-dessus de Y est une section au-dessus de X. Pour $X \subset Y \subset Z$, l'homomorphisme $\Gamma(F, Z) \longrightarrow \Gamma(F, X)$ est composé de $\Gamma(F, Z) \longrightarrow \Gamma(F, Y)$ et de $\Gamma(F, Y) \longrightarrow \Gamma(F, X)$.

2.- <u>Modes de définition de faisceaux. Exemples.</u>

Soit F un faisceau sur l'espace $\mathfrak{X}$. Pour chaque point $x \in \mathfrak{X}$, le module F_x s'identifie évidemment à la limite inductive ("direct limit") des modules $\Gamma(F, X)$ relatifs aux ouverts X contenant x, munis des homomorphismes $\Gamma(F, Y) \longrightarrow \Gamma(F, X)$ définis ci-dessus. Pour le voir, on considère l'homomorphisme évident $\Gamma(F, X) \longrightarrow F_x$ (défini pour $x \in X$), qui est tel que si $x \in X \subset Y$, l'homomorphisme $\Gamma(F, Y) \longrightarrow F_x$ est composé de $\Gamma(F, Y) \longrightarrow \Gamma(F, X)$ et de $\Gamma(F, X) \longrightarrow F_x$.

<u>Réciproquement</u> : supposons que l'on ait attaché, à chaque ouvert X d'un **système** fondamental d'ouverts de l'espace $\mathfrak{X}$, un module F_X, et, à chaque couple (X, Y) d'ouverts tels que $Y \supset X$ et que F_Y et F_X soient définis, un homomorphisme f_{XY} de F_Y dans F_X, et cela de manière que, si $X \subset Y \subset Z$, l'homomorphisme f_{XZ} soit le composé $f_{XY}f_{YZ}$. Ces données définissent un faisceau F, comme suit : pour chaque point $x \in \mathfrak{X}$, on considère le module F_x, limite inductive des F_X relatifs aux ouverts X contenant x ; sur la réunion F des F_x, on définit une structure de faisceau, d'abord en définissant l'application p qui, à un élément u de F, associe le point x tel

que $u \in F_x$, puis en prenant comme système fondamental d'ouverts $V(X , v)$ de la topologie de F les ensembles suivants : on prend arbitrairement un ouvert $X \subset \mathfrak{X}$ tel que F_X soit défini, un élément $v \in F_X$, et l'ensemble $V(X , v)$ des images de v dans tous les modules F_x relatifs aux points $x \in X$. On vérifie que les axiomes des faisceaux sont vérifiés par F .

Lorsqu'un faisceau F est défini par le moyen de modules F_X comme ci-dessus, on a un homomorphisme évident : $F_X \longrightarrow \Gamma(F , X)$; c'est celui qui, à un élément v de F_X , associe l'ensemble de ses images dans les limites inductives F_x relatives aux points $x \in X$. En général, cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme de F_X sur $\Gamma(F , X)$. On observera que des systèmes de F_X différents peuvent donner naissance au même faisceau (ou, plus exactement, à des faisceaux isomorphes).

Faisceau constant : soit M un K-module ; considérons le faisceau F suivant : l'ensemble F est le produit $M \times \mathfrak{X}$; la projection p associe à chaque couple (m , x) le point x ; la topologie de F est le produit de la topologie discrète sur M et de la topologie de l'espace $\mathfrak{X}$. Un tel faisceau F s'appelle le faisceau constant défini par le module M (On notera l'analogie avec la notion d'espace fibré trivial). Tous les modules F_x sont isomorphes à M , d'une manière canonique.

Exemple de faisceau non constant : considérons, pour chaque ouvert $X \subset \mathfrak{X}$, le module S_X des fonctions définies dans X et à valeurs dans K ; pour $X \subset Y$, l'homomorphisme $S_Y \longrightarrow S_X$ défini par la restriction des fonctions. Ceci définit un faisceau S , qu'on appellera le faisceau des germes de fonctions à valeurs dans K .

Autre exemple : supposons que $\mathfrak{X}$ soit une variété à structure analytique complexe. Définissons F_X comme le module des fonctions holomorphes (à valeurs complexes, K étant ici le corps des nombres complexes) dans l'ouvert X . On obtient un faisceau F ; le module F_x s'identifie au module des séries entières convergentes au voisinage du point x . La topologie dans l'ensemble F de toutes les séries relatives à tous les points de $\mathfrak{X}$ s'interprète facilement. On observera qu'une composante connexe de F n'est pas autre chose qu'une fonction analytique dans tout son domaine d'existence (surface de Riemann non ramifiée sur $\mathfrak{X}$) .

Remarque : la topologie du faisceau F est séparée (principe du prolongement analytique).

Remarque : dans chacun de ces 2 exemples, l'homomorphisme $F_X \longrightarrow \Gamma(F , X)$

est un isomorphisme sur. Par exemple, pour le premier faisceau S , le module $\Gamma(S , X)$ des sections au-dessus d'un ouvert X n'est autre que le module des fonctions définies dans X et à valeurs dans K .

3.- Sous-faisceau, faisceau-quotient, homomorphisme.

Un sous-faisceau d'un faisceau F est un sous-ensemble G de F , tel que la structure induite soit celle d'un faisceau. Pour cela, il faut et il suffit que :

1) pour chaque point $x \in \mathfrak{X}$, $G_x = G \cap F_x$ soit un sous-module de F_x ;
2) G soit ouvert dans F .

Soit donc G un sous-faisceau de F . On définit un faisceau-quotient F/G comme suit : on considère l'ensemble quotient de F par la relation d'équivalence suivante : u et v sont équivalents si $p(u) = p(v)$ et, x désignant le point $p(u)$, $u - v \in G_x$. Sur cet ensemble quotient de F , mettons la topologie d'espace quotient de l'espace topologique F . Comme G est ouvert dans F , la relation d'équivalence est ouverte, donc les ouverts de F/G sont les images des ouverts de F . L'image réciproque d'un point x s'identifie au quotient F_x/G_x , que l'on munit de la structure de module-quotient.

Homomorphisme de faisceaux : considérons deux faisceaux F et G sur le même espace $\mathfrak{X}$ (un cas plus général sera envisagé plus loin). Un homomorphisme de F dans G est une application continue φ de F dans G , telle que, pour tout point x , la restriction φ_x de φ à F_x soit un homomorphisme de F_x dans G_x . L'ensemble des homomorphismes de F dans G est évidemment muni d'une structure de K-module.

Si on a trois faisceaux F , G , L , un homomorphisme de F dans G , et un homomorphisme de G dans L , on définit un homomorphisme composé de F dans L .

Un endomorphisme d'un faisceau F est un homomorphisme de F dans F . Les endomorphismes de F forment une K-algèbre (la multiplication étant la composition des endomorphismes).

Si X est un ouvert de l'espace $\mathfrak{X}$, tout homomorphisme φ d'un faisceau F dans un faisceau G définit un homomorphisme des modules de sections : $\Gamma(F , X) \longrightarrow \Gamma(G , X)$. Il est défini comme suit : si $x \longrightarrow s(x)$ est une section de F définie pour $x \in X$, alors $x \longrightarrow \varphi_x(s(x))$ est une section de G au dessus de X .

Ceci définit $\Gamma(F, X)$ comme <u>foncteur</u> du faisceau F. D'une façon précise, si $F \longrightarrow F$ est l'homomorphisme identique du faisceau F, l'homomorphisme associé de $\Gamma(F, X)$ dans lui-même est aussi l'homomorphisme identique. En outre, si on a 3 faisceaux F, G, L, un homomorphisme de F dans G, un autre de G dans L, et le composé de F dans L, alors l'homomorphisme $\Gamma(F, X) \longrightarrow \Gamma(L, X)$ associé à ce dernier est le composé des homomorphismes $\Gamma(F, X) \longrightarrow \Gamma(G, X)$ et $\Gamma(G, X) \longrightarrow \Gamma(L, X)$ associés à $F \longrightarrow G$ et à $G \longrightarrow L$. Enfin, si un homomorphisme φ de F dans G est la somme de 2 homomorphismes φ_1 et φ_2, l'homomorphisme de $\Gamma(F, X)$ dans $\Gamma(G, X)$ associé à φ est la somme des homomorphismes associés à φ_1 et à φ_2.

<u>Noyau et image d'un homomorphisme</u>. Le noyau d'un homomorphisme de faisceaux $F \longrightarrow G$ est l'image réciproque de l'ensemble des $0_x \in G_x$ quand x parcourt l'espace $\mathfrak{X}$. Comme ce dernier ensemble est ouvert dans G, le noyau est ouvert dans F ; c'est donc un sous-faisceau F', et, pour chaque point x, F'_x est le noyau de l'homomorphisme $F_x \longrightarrow G_x$.

Puisqu'un homomorphisme de F dans G est une application ouverte, l'image de F dans G est ouverte dans G ; c'est un sous-faisceau G' de G, et, pour chaque point x, G'_x est l'image de $F_x \longrightarrow G_x$.

<u>Suite exacte</u> de faisceaux et d'homomorphismes : on a la notion de suite exacte, puisqu'on a celle de noyau et d'image d'un homomorphisme de faisceaux. On considérera notamment des suites exactes de la forme
$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$; pour une telle suite, F' s'identifie à un sous-faisceau de F, et F'' au faisceau-quotient de F par ce sous-faisceau. Etant donné une telle suite exacte, la suite des homomorphismes associés

$$0 \longrightarrow \Gamma(F', X) \longrightarrow \Gamma(F, X) \longrightarrow \Gamma(F'', X)$$

est <u>exacte</u> (trivial à partir des définitions). Mais, en général, l'homomorphisme $\Gamma(F, X) \longrightarrow \Gamma(F'', X)$ n'est pas <u>sur</u>, bien que $F \longrightarrow F''$ soit <u>sur</u>. On reviendra plus loin sur cette question.

<u>Exemple de suite exacte</u> : soit $\mathcal{Y}$ un sous-espace <u>fermé</u> de $\mathfrak{X}$, et soit $\mathcal{U}$ son complémentaire (ouvert). Etant donné un faisceau F sur $\mathfrak{X}$, soit, pour chaque point $x \in \mathfrak{X}$, le sous-module F'_x de F_x défini comme suit : $F'_x = F_x$ si $x \in \mathcal{U}$, $F'_x = 0$ si $x \in \mathcal{Y}$ (la réunion F' des F'_x est un sous-ensemble ouvert de F, donc F' est bien un <u>sous-faisceau</u> de F). Le faisceau-quotient $F'' = F/F'$ est défini, en chaque point x, par un module F''_x, quotient de F_x, à savoir $F''_x = 0$ si $x \in \mathcal{U}$, et $F''_x = F_x$ si $x \in \mathcal{Y}$.

<u>Homomorphisme compatible avec une application continue</u>. Soient deux espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, et f une application continue de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. Etant donné un faisceau F sur $\mathfrak{X}$, et un faisceau G sur $\mathfrak{Y}$, on va définir la notion d'homomorphisme de G dans F , compatible avec l'application f . C'est, par définition, une collection d'homomorphismes $\varphi_x : G_{f(x)} \longrightarrow F_x$, satisfaisant à la condition de continuité suivante : si on a une section $x \longrightarrow s(x) \in F_x$ au-dessus d'un voisinage d'un point $x_0 \in \mathfrak{X}$, et une section $y \longrightarrow t(y) \in G_y$ au-dessus d'un voisinage de $y_0 = f(x_0)$, et si $\varphi_{x_0}(t(f(x_0))) = s(x_0)$, alors on a $\varphi_x(t(f(x))) = s(x)$ en tout point x assez voisin de x_0 .

Lorsque $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, f étant l'application identique, on retrouve la notion d'homomorphisme de faisceaux déjà définie.

Si f est une application continue $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$, et φ un homomorphisme $G \longrightarrow F$ compatible avec f , on associe à φ un homomorphisme des modules de sections

$$\Gamma(G , Y) \longrightarrow \Gamma(F , f^{-1}(Y)) \quad , \text{ pour tout ouvert } Y \text{ de } \mathfrak{Y} .$$

En effet, si $y \longrightarrow t(y)$ est une section de G au-dessus de Y , alors $x \longrightarrow \varphi_x(t(f(y)))$ est une section de F au-dessus de $f^{-1}(Y)$.

Soient F et F' deux faisceaux sur $\mathfrak{X}$, G et G' deux faisceaux sur $\mathfrak{Y}$; on dira que des homomorphismes $G \longrightarrow F$ et $G' \longrightarrow F'$, compatibles avec l'application continue f de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$, sont compatibles avec des homomorphismes $F \longrightarrow F'$ et $G \longrightarrow G'$, si, pour chaque point x , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_x & \longleftarrow & G_{f(x)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'_x & \longleftarrow & G'_{f(x)} \end{array}$$

Alors on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F , f^{-1}(Y)) & \longleftarrow & \Gamma(G , Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(F', f^{-1}(Y)) & \longleftarrow & \Gamma(G', Y) \end{array}$$

4.- <u>Opérations diverses sur les faisceaux</u>.

<u>Image réciproque</u> d'un faisceau : soit une application continue f de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$, et soit G un faisceau sur $\mathfrak{Y}$. On va définir un faisceau F sur $\mathfrak{X}$, appelé image réciproque de G , et noté $f^{-1}(G)$, et un homomorphisme de G dans F , compatible avec f . A cet effet, considérons le produit $\mathfrak{X} \times G$,

avec sa topologie d'espace-produit. Soit F le sous-espace fermé, constitué des couples (x , g) tels que $p(g) = f(x)$ (on note p la projection $G \longrightarrow \mathcal{Y}$). Ce sous-espace F est muni d'une structure de faisceau sur $\mathcal{X}$, comme suit : la projection $F \longrightarrow \mathcal{X}$ est définie par l'application $(x,g) \rightarrow x$. Il est clair que le module F_x , formé des couples (x , g) tels que $p(g) = f(x)$, est canoniquement isomorphe à $G_{f(x)}$.

La collection des isomorphismes $\varphi_x : G_{f(x)} \longrightarrow F_x$ définit un homomorphisme de G dans F , compatible avec f .

Toute section de G au-dessus d'un ouvert Y définit une section de $f^{-1}(G)$ au-dessus de $f^{-1}(Y)$.

Cas particulier : soit $\mathcal{X}$ un <u>sous-espace</u> de $\mathcal{Y}$, f étant l'injection. Pour tout faisceau G sur $\mathcal{Y}$, le faisceau $F = f^{-1}(G)$ s'appelle <u>faisceau induit</u> par G sur $\mathcal{X}$. On a $F_x = G_x$ en tout point $x \in \mathcal{X}$.

<u>Définition</u> : un faisceau F , sur un espace $\mathcal{X}$, est <u>localement constant</u> si chaque point de $\mathcal{X}$ possède un voisinage ouvert sur lequel le faisceau induit par F est constant. Dans le cas d'un espace localement connexe par arcs, la notion de faisceau localement constant rejoint celle de <u>système local</u>, due à STEENROD. On notera : si $\mathcal{X}$ est <u>simplement connexe</u> (c'est-à-dire si $\mathcal{X}$ n'a pas d'autre revêtement que lui-même), alors <u>tout faisceau localement constant sur</u> $\mathcal{X}$, <u>est constant</u> (conséquence immédiate du "principe de monodromie").

<u>Produit tensoriel de 2 faisceaux sur 2 espaces distincts</u>.

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces, F un faisceau sur $\mathcal{X}$, G un faisceau sur $\mathcal{Y}$. Le produit tensoriel $F \otimes G$ va être un faisceau sur l'espace-produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Pour le définir, supposons que F ait été défini par des F_X relatifs à des ouverts X de $\mathcal{X}$, et que G ait été défini par des G_Y relatifs à des ouverts Y de $\mathcal{Y}$ (cf. numéro 2). Considérons, sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, la famille des ouverts de la forme $X \times Y$; attachons à $X \times Y$ le module $L_{X\times Y} = F_X \otimes G_Y$. Ces modules $L_{X\times Y}$, avec des homomorphismes évidents de ces modules les uns dans les autres, définissent un faisceau L sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. On a évidemment $L_{(x,y)} = F_x \otimes G_y$, parce que le foncteur "produit tensoriel" commute avec les limites directes. De plus, le faisceau L ne change pas si on change les F_X et les G_Y sans changer les faisceaux F et G qu'ils définissent. Le faisceau L est donc entièrement défini par la donnée des faisceaux F et G ; c'est, par définition, le produit tensoriel $F \otimes G$.

Supposons données deux applications continues $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$, et

$g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$, et soit h l'application-produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'$. Soient des faisceaux : F sur $\mathcal{X}$, F' sur $\mathcal{X}'$, G sur $\mathcal{Y}$, G' sur $\mathcal{Y}'$; et soient des homomorphismes $F' \longrightarrow F$ et $G' \longrightarrow G$ compatibles avec les applications f et g respectivement. Alors l'homomorphisme $F' \otimes G' \longrightarrow F \otimes G$ défini par les homomorphismes

$F'_{f(x)} \otimes G'_{g(y)} \longrightarrow F_x \otimes G_y$ (produits tensoriels des homomorphismes $F'_{f(x)} \longrightarrow F_x$ et $G'_{g(y)} \longrightarrow G_y$) , est compatible avec l'application produit h . Cet homomorphisme du faisceau $F' \otimes G'$ dans le faisceau $F \otimes G$ s'appelle le <u>produit tensoriel des homomorphismes</u> $F' \longrightarrow F$ et $G' \longrightarrow G$.

<u>Produit tensoriel de 2 faisceaux sur le même espace</u> : si F et G sont deux faisceaux sur le même espace $\mathcal{X}$, $F \otimes G$ est un faisceau sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Plongeons $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ par l'<u>application diagonale</u> : le faisceau $F \otimes G$ induit un faisceau sur $\mathcal{X}$, que nous noterons $F \bigcirc G$, et appellerons encore le produit tensoriel de F et G (sur l'espace $\mathcal{X}$) . Il est clair que, pour tout point $x \in \mathcal{X}$, on a $(F \bigcirc G)_x = F_x \otimes G_x$.

Soit donnée une application continue f de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}'$; soient F et G deux faisceaux sur $\mathcal{X}$, F' et G' deux faisceaux sur $\mathcal{X}'$; et soient des homomorphismes $F' \longrightarrow F$ et $G' \longrightarrow G$ compatibles avec l'application f . Alors l'homomorphisme $F' \bigcirc G' \longrightarrow F \bigcirc G$ défini par les homomorphismes

$F'_{f(x)} \otimes G'_{f(x)} \longrightarrow F_x \otimes G_x$ (produits tensoriels des homomorphismes $F'_{f(x)} \longrightarrow F_x$ et $G'_{f(x)} \longrightarrow G_x$) est compatible avec l'application f . On l'appelle encore le produit tensoriel des homomorphismes $F' \longrightarrow F$ et $G' \longrightarrow G$.