J-P. Serre

La suite spectrale des espaces fibrés. Applications

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 10, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A10_0>

Séminaire H. CARTAN,

E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

LA SUITE SPECTRALE DES ESPACES FIBRÉS. APPLICATIONS.

(Exposé de J-P. SERRE, le 12.2.1951).

1.- Préliminaires.

Soit B un complexe (fini ou infini), A un anneau commutatif, L un A-module. La formule des coefficients universels donne l'homologie de B à valeurs dans L lorsque l'on connaît celle à valeurs dans A (du moins, si A est un anneau principal). Cette formule est la suivante :

$$H_i(B,L) = H_i(B,A) \otimes L + \mathrm{Tor}(H_{i-1}(B,A),L) .$$

(le signe $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur A , et le signe Tor désigne le produit dual, ou produit de torsion, de Cartan-Eilenberg). Pour la démonstration, voir SéM 1948-1949, Exposé 11, théorème 5 .

Dans la suite de cet exposé nous ferons usage des 3 cas particuliers suivants :

a) A est un corps.

Le produit Tor est alors identiquement nul, et la formule se réduit à :

$$H_i(B , L) = H_i(B , A) \otimes L .$$

b) On suppose que $H_i(B , A) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors $H_i(B , L) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

Cela résulte tout de suite de la formule pour $i > 1$. Pour $i = 1$, il faut observer que $H_0(B , A)$ est libre sur A , donc a un produit de torsion nul avec tout A-module.

c) On suppose que $H_i(B , A)$ soit un module de type fini (c'est-à-dire admettant un nombre fini de générateurs) pour tout $i \leq n$, ainsi que L . Alors $H_i(B , L)$ est de type fini pour tout $i \leq n$.

En effet, si M et N sont de type fini, il en est de même de $M \otimes N$ et de $\mathrm{Tor}(M , N)$.

Remarque : en fait, b) et c) sont valables pour tout anneau A (et pas seulement pour un anneau principal).

2.- Premières propriétés des espaces fibrés.

Soit E un espace fibré, de base un polyèdre B , de fibre l'espace F . Nous utiliserons les notations et résultats des deux exposés précédents. Dans le dernier de ces exposés, on a construit une suite spectrale, aboutissant à l'homologie de E, et dont le second terme E^2 est isomorphe à $H(B , H(F))$.

Prenons pour groupe de coefficients un corps k, supposons que le système local formé par $H(F , k)$ sur B soit trivial, et appliquons les résultats du numéro 1. On obtient alors :

$$E^2 = H(B , k) \otimes H(F , k) \quad .$$

Ceci permet de majorer les nombres de Betti de E (que nous noterons e_i) au moyen de ceux de B et de F, b_i et f_i. En effet, la dimension de $E_n^2 = \sum_p E_{n,p}^2$ est égale à $\sum_{p+q=n} b_p . f_q$. Or les dimensions des E_n^r décroissent avec r. On a donc :

$$e_n \leq \sum_{p+q=n} b_p . f_q \quad .$$

En particulier, si b_p et f_q sont finis pour tout p et q, on en déduit que e_i est fini pour tout i. Plus généralement :

<u>Proposition 1 - Soit</u> A <u>un anneau principal, et supposons que le système local formé par</u> $H_i(F , A)$ <u>sur</u> B <u>soit trivial pour tout</u> i. <u>Alors, si deux des trois espaces</u> E, F, B <u>jouissent de la propriété que leurs groupes d'homologie à valeurs dans</u> A <u>sont de type fini pour toute dimension, le troisième espace jouit de la même propriété</u>.

Supposons d'abord que les deux espaces en question soient B et F. Chaque module $E_{n,p}^2 = H_p(B , H_{n-p}(F , A))$ est de type fini, d'après 1-c. Il en est donc de même de E_n^2, somme directe d'un nombre <u>fini</u> de modules de type fini. Puisque E^3 est le module d'homologie de E^2 muni de la différentielle d_2, E_n^3 est aussi de type fini, et de même E_n^4, etc. Il en résulte que E_n^∞, groupe gradué associé à $H_n(E , A)$, est de type fini, donc $H_n(E , A)$ lui-même est de type fini.

Supposons maintenant que les deux espaces en question soient E et B. Nous montrerons que $H_i(F , A)$ est de type fini par récurrence sur l'entier i, à partir de $i = -1$.

Puisque $H_o(B , A)$ est un module libre non réduit à 0, il revient au même de montrer que $H_o(B , H_i(F , A)) = E_{i,o}^2$ est de type fini.

Supposons qu'il ne soit pas de type fini. Alors $E_{i,o}^3$ ne sera pas non plus de type fini. En effet, $E_{i,o}^3$ n'est autre que le quotient de $E_{i,o}^2$ par l'image de la différentielle $d_2 : E^2_{i+1,2} \longrightarrow E^2_{i,o}$, et cette image est de type fini puisque $E^2_{i+1,2} = H_2(B , H_{i-1}(F , A))$ est de type fini (hyp. de récurrence). On montre par le même raisonnement que $E^4_{i,o}$, ... , n'est pas non plus de type fini. Mais ceci est absurde, car, en prenant r assez grand, $E^r_{i,o}$ est isomorphe à un sous-module du module gradué associé à $H_i(E , A)$, donc doit être de type fini, d'après l'hypothèse faite sur E .

Démonstration analogue lorsque les deux espaces sont E et F .

3.- Le théorème du cycle maximum.

Proposition 2 - *Soit* A *un corps, et supposons que le système local formé par* $H_i(F , A)$ *sur* B *soit trivial pour tout* i . *Supposons en outre que* $H_i(B , A) = 0$ *pour* $i > p$, *et* $H_i(F , A) = 0$ *pour* $i > q$. *Alors* $H_i(E,A) = 0$ *pour* $i > p+q$, *et* $H_{p+q}(E , A)$ *est isomorphe au module* $H_p(B , H_q(F , A))$.

Corollaire : *Dans les hypothèses précédentes, si* $H_p(B , A) \neq 0$, $H_q(F , A) \neq 0$, *alors* $H_{p+q}(E , A) = H_p(B , A) \otimes H_q(F , A) \neq 0$.

On sait que $E^2_{n,m} = H_m(B , H_{n-m}(F , A))$. On a donc $E^2_{n,m} = 0$ lorsque $n > p+q$ (d'après le numéro 1-b). On en tire $E^r_{n,m} = 0$ $(r \geq 2 , n > p+q)$, d'où le fait que le module gradué associé à $H_n(E , A)$ est nul, d'où enfin la nullité de $H_n(E , A)$ pour $n > p+q$.

Prenons maintenant $n = p+q$; on a encore $E^2_{n,m} = 0$ pour tout m , sauf pour $m = o$, où l'on a :

$$E^2_{p+q,p} = H_p(B , H_q(F , A)) \quad .$$

Les éléments de $E^2_{p+q,p}$ sont tous des cycles pour d_2 puisque d_2 augmente le degré-fibre, et qu'ils sont de degré-fibre maximum. De même, le seul élément de ce module qui soit un bord pour d_2 est 0 , puisque d_2 diminue le degré-base, et qu'ils sont de degré-base maximum. De ces deux propriétés, on tire que

$$E^2_{p+q,p} = E^3_{p+q,p} \quad .$$

Le même raisonnement donne :

$$E^3_{p+q,p} = E^4_{p+q,p} = \dots = E^\infty_{p+q,p} \quad .$$

On en conclut que le groupe associé à $H_{p+q}(E , A)$ est formé d'un seul terme, et que ce terme est isomorphe à $H_p(B , H_q(F , A))$. D'où l'isomorphisme cherché entre $H_{p+q}(E , A)$ et $H_p(B , H_q(F , A))$.

Application.

Supposons que R^n soit fibré, de fibre F connexe, et de base un polyèdre localement fini B. En écrivant la suite exacte d'homotopie, on voit que B est simplement connexe, donc que le système local formé par les groupes d'homologie de F est trivial sur B. Ceci étant, soient k un corps, p et q les plus grandes dimensions telles que $H_p(B, k) \neq 0$ et $H_q(F, k) \neq 0$ (ces nombres existent, car F et B sont des espaces localement compacts, de dimension finie, et localement rétractiles (Voir Séminaire 1948-1949, Exposé 16, numéro 7)). Il résulte du corollaire précédent que $H_{p+q}(R^n, k) \neq 0$, d'où $p = q = 0$. Ceci ayant lieu pour tout corps k, on tire des résultats du numéro 1 le fait que $H_i(B, Z) = H_i(F, Z) = 0$ pour tout $i \neq 0$. Autrement dit, les espaces F et B sont acycliques. Comme B est un polyèdre, il est donc rétractile, et la fibration étudiée est triviale (théorème de Feldbau). On a donc démontré :

Proposition 3 - Toute fibration de R^n dont la fibre est connexe et dont la base est un polyèdre, est triviale ; autrement dit, $E^n = F \times B$.

On voit aisément que la conclusion de la proposition 3 ne subsiste plus si l'on supprime l'hypothèse : F est connexe. Par contre, il est probable que l'on peut supprimer l'hypothèse faite sur B : on peut conjecturer qu'il n'y a pas d'autre fibration de R^n à fibres connexes que la décomposition en produit direct : $R^n = R^p \times R^q$ $(p+q = n)$.

4.- La caractéristique d'Euler-Poincaré.

Soit M un espace vectoriel gradué sur un corps k. Nous désignerons par m_i la dimension du sous-espace de M formé des éléments homogènes et de degré i. Nous supposerons que M est de dimension finie, autrement dit, que $\sum_i m_i < +\infty$

Nous appellerons caractéristique d'Euler-Poincaré de M le nombre :

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i m_i \quad .$$

Si X est un espace, $H(X, k)$ est gradué, et on pose $\chi(X) = \chi(H(X))$. La caractéristique jouit de la propriété classique suivante, que je ne démontrerai pas :

Lemme : Si M est munie d'une différentielle homogène de degré impair, et si $H(M)$ désigne l'espace vectoriel d'homologie de M par rapport à cette différentielle, les caractéristiques d'Euler-Poincaré de M et de $H(M)$ sont égales.

Soit alors E un espace fibré de base B, polyèdre fini. Supposons que $\chi(F, k)$ existe. Le terme E^1 de la suite spectrale attachée à la fibration, est isomorphe à $C(B, k) \otimes H(F, k)$, où $C(B, k)$ désigne l'espace vectoriel des chaînes sur B à valeurs dans k, et où le produit tensoriel est pris sur k. Comme B est <u>fini</u>, $C(B, k)$ possède une caractéristique d'Euler-Poincaré, et d'après le lemme, cette caractéristique est égale à $\chi(B)$. Il en résulte que le terme E^1 possède une caractéristique égale à $\chi(B).\chi(F)$. Appliquant alors le lemme, on voit que :

$$\chi(B).\chi(F) = \chi(E^1) = \chi(E^2) = \dots = \chi(E^r) = \dots = \chi(E_{\ }) = \chi(E) .$$

On a donc obtenu :

<u>Proposition 4</u> - <u>Si</u> B <u>est un polyèdre fini, et si</u> $\chi(F)$ <u>existe, alors</u> $\chi(E)$ <u>existe et est égal à</u> $\chi(B).\chi(F)$.

5.- <u>Une suite exacte</u>.

Nous revenons aux notations de l'exposé 8, paragraphe 3.

Considérons le groupe E^r (r étant un entier fixe), et supposons que, pour tout n tel que $i \leq n \leq j$ (i et j étant également deux entiers fixes), on ait $E^r_{n,q} = 0$ pour toute valeur de q différente de deux valeurs a_n et b_n. Nous supposerons $a_n < b_n$.

Enfin, nous supposerons que : $\begin{cases} a_{n-1} > a_n - r \\ b_{n-1} > b_n - r \end{cases}$ $\quad (i+1 \leq n \leq j)$

(On verra par la suite que ces hypothèses bizarres sont assez souvent réalisées dans la nature ...).

On tire d'abord de là que $E^s_{n,q} = 0$ pour $s \geq r$, $i \leq n \leq j$, $q \neq a_n$ ou b_n. Il s'ensuit que les homomorphismes $d^s : E^s_{n,a_n} \longrightarrow E^s_{n-1,a_n-s}$ sont nuls pour $s \geq r$, puisque le second membre est nul (ceci n'est vrai que pour $i+1 \leq n \leq j$). Autrement dit, les éléments de E^r_{n,a_n} sont des cycles pour toutes les différentielles successives. Il en résulte, comme dans 9-08, un homomorphisme :

$$E^r_{n,a_n} \longrightarrow H_n(A) \qquad (i+1 \leq n \leq j) .$$

On voit de façon analogue que les éléments de E^r_{n,b_n} ne sont jamais des bords, à part 0, pour n vérifiant $i \leq n \leq j-1$.

On en tire un homomorphisme :

$$H_n(A) \longrightarrow E^r_{n,b_n} \qquad (i \leq n \leq j-1) .$$

En outre, puisque $E^r_{n,q} = 0$ pour $i \leq n \leq j$, $q \neq a_n$ ou b_n, le groupe E^∞_n se compose seulement de deux termes, correspondant à $q = a_n$ et $q = b_n$. Ceci entraîne que la suite :

$$E^r_{n,a_n} \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow E^r_{n,b_n} \qquad (i+1 \leq n \leq j-1)$$

est exacte.

Le noyau du premier homomorphisme est formé des éléments qui sont des bords pour l'une des différentielles d^s $(s \geq r)$. Mais, vu les hypothèses faites, la seule différentielle possible est celle qui applique $E^r_{n+1,b_{n+1}}$ dans E^r_{n,a_n} ; nous la noterons h_{n+1} .

De même, l'image du second homomorphisme est formée des éléments qui sont des cycles pour l'une des différentielles d^s $(s \geq r)$, et la seule qui peut n'être pas nulle est celle qui applique E^r_{n,a_n} dans $E^r_{n-1,a_{n-1}}$, c'est-à-dire h_n .

On voit alors que l'on peut combiner les résultats précédents en une seule suite exacte :

$$E^r_{j-1,a_{j-1}} \longrightarrow H_{j-1}(A) \longrightarrow E^r_{j-1,b_{j-1}} \longrightarrow E^r_{j-2,a_{j-2}} \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow E^r_{i+2,b_{i+2}} \longrightarrow E^r_{i+1,a_{i+1}} \longrightarrow H_{i+1}(A) \longrightarrow E^r_{i+1,b_{i+1}}$$

Il est intéressant pour la suite de donner des conditions permettant d'affirmer que la suite exacte précédente est valable, même en dimensions i et j . Ces conditions sont les suivantes :

$$\begin{cases} E^r_{i-1,q} = 0 & \text{pour } q \leq a_i - r \\ E^r_{j+1,q} = 0 & \text{pour } q \geq b_j + r \end{cases}$$

comme on le vérifie en reprenant les raisonnements faits plus haut. On a donc :

Proposition 5 - Les hypothèses étant celles de ce paragraphe, on a la suite exacte :

$$E^r_{j,a_j} \longrightarrow H_j(A) \longrightarrow E^r_{j,b_j} \xrightarrow{h_j} E^r_{j-1,a_{j-1}} \longrightarrow H_{j-1}(A) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow E^r_{i+1,b_{i+1}} \xrightarrow{h_{i+1}} E^r_{i,a_i} \longrightarrow H_i(A) \longrightarrow E^r_{i,b_i} \ .$$

6.- Application.

Nous revenons maintenant à l'étude des espaces fibrés.

Proposition 6 - Soit A un anneau principal, et supposons :

a) que le système local formé par $H_i(F\ ,\ A)$ sur B soit trivial pour tout i .

b) que F et B soient connexes par arcs ,

c) que $H_i(B , A) = 0$ pour $o < i < p$, et $H_i(F , A) = 0$ pour $o < i < q$.

On a alors la suite exacte :

$$H_{p+q-1}(F , A) \longrightarrow H_{p+q-1}(E , A) \longrightarrow H_{p+q-1}(B , A) \longrightarrow H_{p+q-2}(F , A) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H_2(B , A) \longrightarrow H_1(F , A) \longrightarrow H_1(E , A) \longrightarrow H_1(B , A) \longrightarrow 0 .$$

On a $E^2_{n,m} = H_m(B , H_{n-m}(F , A))$. Si l'on suppose que $n < p+q$, il résulte du numéro 1 et des hypothèses faites que tous ces termes sont nuls à la seule exception de $E^2_{n,o} = H_o(B , H_n(F , A)) = H_n(F , A)$, et de $E^2_{n,n} =$ $= H_n(B , H_o(A)) = H_n(B , A)$.

On est donc dans les hypothèses du début du numéro précédent, en posant :

$$r = 2 \quad , \quad i = o \quad , \quad j = p + q - 1 \quad , \quad a_n = o \quad , \quad b_n = n .$$

Il n'y a plus qu'à vérifier les diverses conditions du numéro précédent, ce qui est trivial, et la proposition résulte immédiatement de la proposition 5 .

Remarque : D'après l'exposé 9, numéro 7, les homomorphismes :

$$H_n(F , A) \longrightarrow H_n(E , A) \longrightarrow H_n(B , A)$$

sont ceux définis par les applications $F \longrightarrow E \longrightarrow B$.

Corollaire 1 : Si $H_i(B , A) = 0$ pour tout $i > o$, l'injection $F \longrightarrow E$ définit un isomorphisme de $H_i(F , A)$ sur $H_i(E , A)$ pour tout $i \geqslant o$.

Corollaire 2 : Si $H_i(F , A) = 0$ pour tout $i > o$, la projection $E \longrightarrow B$ définit un isomorphisme de $H_i(E , A)$ sur $H_i(B , A)$ pour tout $i \geqslant o$.

Remarque : Ce résultat est l'analogue d'un théorème classique de Vietoris (sur l'homologie de Čech). D'autre part, si on le démontre directement, on voit que l'on n'a nul besoin de supposer que A est un anneau principal.

Corollaire 3 : Supposons que $H_i(E , A) = 0$ pour tout $i > o$, et que $H_i(B , A) = 0$ pour $o < i < p$. Alors $H_i(F , A)$ est isomorphe à $H_{i+1}(B , A)$ pour tout $i < 2p-2$.

On commence par appliquer la proposition 6 avec $q = 1$. On en tire $H_i(F , A) = 0$ pour $o < i < p-1$. On peut alors appliquer à nouveau la proposition 6 avec $q = p-1$, et l'on obtient le résultat cherché.

7.- Suite exacte de Wang.

Proposition 7 - Supposons que $B = S_k$ $(k \geq 2)$. On a la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H_i(F) \longrightarrow H_i(E) \longrightarrow H_{i-k}(F) \longrightarrow H_{i-1}(F) \longrightarrow H_{i-1}(E) \longrightarrow \cdots$$

(On a pris comme groupe de coefficients le groupe additif Z des entiers)

On a $E^2_{n,q} = H_q(S_k , H_{n-q}(F)) = 0$ sauf si $q = o$, ou $q = k$. Dans ces cas on a :

$$E^2_{n,o} = H_n(F) \qquad \text{et} \qquad E^2_{n,k} = H_{n-k}(F) \quad .$$

On est donc dans les hypothèses du début du numéro 5 en posant :

$$r = 2 \quad , \quad i = o \quad , \quad j = \infty \quad , \quad a_n = o \quad , \quad b_n = k \quad .$$

Il n'y a plus qu'à vérifier les inégalités $a_{n-1} > a_n - r$ et $b_{n-1} > b_n - r$, ce qui est trivial.

La proposition en résulte immédiatement.

Remarque : Le principal avantage de cette démonstration sur celle de Wang (au demeurant fort simple), est qu'elle reste valable si l'on suppose simplement que B est simplement connexe et est une sphère-homologique (sur un corps de coefficients, par exemple).

Application. Si $H_i(E) = 0$ pour $i > o$, alors les groupes d'homologie de F sont :

$$H_i(F) = 0 \text{ si } i \not\equiv o \pmod{k-1} \quad \text{et} \quad H_i(F) = Z \text{ si } i \equiv o \pmod{K-1} \quad .$$

8.- Suite exacte de Gysin.

Proposition 8 - Supposons que $F = S_k$ $(k \geqslant 1)$. On a la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow \bar{H}_{i-k}(B) \longrightarrow H_i(E) \longrightarrow H_i(B) \longrightarrow \bar{H}_{i-k-1}(B) \longrightarrow H_{i-1}(E) \longrightarrow \cdots$$

(Les groupes $H_k(S_k) = Z$ définissent sur B un système local, et l'on a noté $\bar{H}_i(B)$ le i-ème groupe d'homologie de B à coefficients dans ce système local. Si ce système est trivial -i.e. si l'espace est "orientable"- $\bar{H}_i(B) = H_i(B)$) .

On a $E^2_{n,q} = H_q(B , H_{n-q}(S_k)) = 0$ sauf si $q = n-k$ ou $q = n$. Dans ces cas, on a :

$$E^2_{n,n-k} = \bar{H}_{n-k}(B) \qquad \text{et} \qquad E^2_{n,n} = H_n(B) \quad .$$

On est donc dans les hypothèses du début du numéro 5 en posant :

$$r = 2 \quad , \quad i = o \quad , \quad j = \infty \quad , a_n = n-k \quad , \quad b_n = n \quad .$$

Il n'y a plus qu'à vérifier que $a_{n-1} > a_n - r$ et $b_{n-1} > b_n - r$, ce qui est trivial, pour avoir démontré la proposition.

APPENDICE

Si l'on choisit une théorie d'homologie (théorie singulière, théorie de Čech), on peut démontrer l'existence de suite spectrales dans des conditions plus larges que celles données dans l'exposé 9 . En outre, si l'on opère en cohomologie, on peut munir les termes E^r $(r \geqslant 2)$ d'une structure d'anneau anticommutatif, les différentielles d^r devenant alors des antidérivations. Ceci permet de préciser les résultats de cet exposé :

a- Dans la suite exacte de Wang (écrite en cohomologie, c'est-à-dire en renversant le sens des flèches, l'application :

$$H^i(F) \longrightarrow H^{i-k+1}(F)$$

est une dérivation si k est impair, une antidérivation si k est pair.

b- Dans la suite exacte de Gysin (écrite en cohomologie, c'est-à-dire ... etc ...), l'application :

$$\overline{H}^i(B) \longrightarrow H^{i+k+1}(B)$$

est définie par le cup-product avec un élément $U \in \overline{H}^{k+1}(B)$ (au moins si l'espace est orientable). L'élément U est d'ordre 2 si k est pair.

BIBLIOGRAPHIE

La plus grande partie des résultats donnés ici est due à LERAY : L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, J. de Math. pures et appl. 29, 1950, p. 169-213 .