Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Généralités sur les espaces fibrés, III

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 8, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A8_0>

Séminaire H.CARTAN, E.N.S., 1949/50

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES FIBRÉS, III.

(Exposé de H. CARTAN, le 16.1.1950).

1.- Relèvement des homotopies.

Soit E' un espace fibré de base B' (avec ou sans groupe structural). Relever une application continue g d'un espace B dans B', c'est trouver une application continue f de B dans E', telle que $g = p' \circ f$ (on désigne par p' la projection de E' sur B'); diagramme :

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd}$$

Soit E l'espace fibré, image réciproque de E' pour g ; chaque relèvement f de g définit une section de E, et réciproquement (évident). Donc : pour que g puisse être "relevée", il faut et il suffit que E (défini par g) possède une section.

Etant donnée une application continue g de B dans B', une homotopie de g sera une application continue $(x, t) \longrightarrow g(x, t)$ de $B \times I$ dans B', telle que $g(x, 0) = g(x)$ pour tout $x \in B$ (on désigne par I le segment $[0, 1]$).

Théorème 1.- Si une application continue g d'un espace B (localement compact et paracompact) dans la base B' d'un espace fibré E', localement trivial, peut être relevée, alors toute homotopie de g peut aussi être relevée.

Donnons une démonstration détaillée de ce théorème fondamental. Soit E l'espace fibré de base $B \times I$, image réciproque de E' pour l'application $(x, t) \longrightarrow g(x, t)$ de $B \times I$ dans B'. Puisque E' est localement trivial, E est aussi localement trivial (N.B : on verra plus loin que, lorsque E possède un groupe structural, E est, en fait, le produit par I d'un espace fibré de base B). Par hypothèse, on a une section de E au-dessus de la partie $B \times \{0\}$ de la base ; il faut montrer qu'une telle section partielle peut toujours être prolongée en une section au-dessus de toute la base $B \times I$.

1) Montrons d'abord : tout point x de B possède un voisinage ouvert U tel que E soit trivial au-dessus de $U \times I$. En effet, I étant compact,

il existe une partition finie de I en intervalles I_k , et un voisinage ouvert U de x , tels que E soit trivial au-dessus de chacun des ensembles $U \times I_k$ de la base ; on montre alors, par récurrence sur l'entier p , que E est trivial au-dessus de $U \times J_p$, J_p désignant la réunion des intervalles I_k d'indices $k \leq p$. Pour cela, on doit prouver : si I est réunion de deux intervalles I' et I'' , fermés, dont l'intersection se réduit à un point, et si un espace fibré de base $U \times I$ est trivial au-dessus de $U \times I'$ et au-dessus de $U \times I''$, il est trivial au-dessus de $U \times I$. La démonstration est immédiate.

2) soit σ la section donnée au-dessus de $B \times \{0\}$. Il s'agit de prolonger σ en une section au-dessus de $B \times I$. Pour cela, on peut se borner au cas où B est réunion dénombrable de compacts : en effet, dans le cas général où B est paracompact, B est réunion de sous-espaces ouverts et fermés dont chacun est réunion dénombrable de compacts, et il est clair que si le problème de prolongement de section est résolu pour chacun de ces sous-espaces ouverts et fermés, il sera résolu pour B .

On peut alors considérer un recouvrement de B , localement fini, par une suite dénombrable d'ouverts U_i , tels que E soit trivial au-dessus de chaque produit $\overline{U_i} \times I$ ($\overline{U_i}$ désigne l'adhérence de U_i) . Il existe un recouvrement de B par des ouverts V_i tels que $\overline{V_i} \subset U_i$. Pour chaque indice i , on montre, par récurrence sur l'entier n $(n = 0 , 1 , \ldots)$, l'existence d'une suite d'ouverts $U_{i,n}$ tels que

$$U_{i,o} = U_i \quad , \quad \overline{V_i} \subset U_{i,n} \quad , \quad \overline{U_{i,n+1}} \subset U_{i,n} \quad .$$

L'indice i parcourant la suite des entiers $1 , 2 , \ldots ,$ appelons, pour chaque entier $p \geq 0$, B_p la réunion (pour les couples i , n tels que $i+n = p$) des $\overline{U_{i,n}}$. En particulier, B_o est vide, $B_1 = \overline{U_1}$, etc. Soit enfin C_p l'intersection de $\overline{U_{p+1}}$ avec la réunion des $\overline{U_{i,n}}$ pour $i+n = p+1$, $n \leq p$. On va, de proche en proche, montrer l'existence d'une section σ_p au-dessus de $B_p \times I$, qui coïncide avec la section donnée σ au-dessus de $B_p \times \{0\}$, ces sections partielles σ_p devant en outre satisfaire à la condition suivante : au-dessus de $C_p \times I$, σ_{p+1} coïncide avec σ_p . Une fois de telles sections partielles trouvées, nous obtiendrons une section de l'espace fibré E (au-dessus de toute la base $B \times I$) , en prenant, au-dessus de chaque $V_i \times I$, n'importe laquelle des sections σ_p pour $p \geq i$; cette section prolongera la section donnée σ au-dessus de $B \times \{0\}$, et le théorème sera démontré.

Montrons donc comment on peut obtenir les sections partielles σ_p . σ_1 existe, puisque E est trivial au-dessus de $\overline{U_1} \times I$, et que σ_1 n'est astreint qu'à la condition de coïncider avec σ au-dessus de $\overline{U_1} \times \{0\}$. Supposons connue la section σ_p , et montrons comment on peut obtenir σ_{p+1} : au dessus de $\overline{U_{p+1}} \times I$, l'espace E est trivial, donc toute section s'identifie à une application continue de $\overline{U_{p+1}} \times I$ dans la fibre F ; au-dessus de $(\overline{U_{p+1}} \cap B_p) \times I$, σ_p définit donc une application continue φ_p de $(\overline{U_{p+1}} \cap B_p) \times I$ dans F . De même, la section donnée σ (au-dessus de $B \times \{0\}$) définit une application continue ψ_p de $\overline{U_{p+1}} \times \{0\}$ dans F , et ψ_p coïncide avec φ_p dans $(\overline{U_{p+1}} \cap B_p) \times \{0\}$. Or un théorème classique de prolongement (exposé 1, page 5, théorème 1) affirme qu'il existe alors une application continue de $\overline{U_{p+1}} \times I$ dans F , qui coïncide avec ψ_p sur $\overline{U_{p+1}} \times \{0\}$, et avec φ_p sur $C_p \times I$ (car, dans $\overline{U_{p+1}}$, $\overline{U_{p+1}} \cap B_p$ est <u>un voisinage</u> de C_p). On obtient ainsi une section de E au-dessus de $\overline{U_{p+1}} \times I$ qui coïncide avec φ_p au-dessus de $C_p \times I$; au-dessus de la réunion $B_{p+1} \times I$ de $C_p \times I$ et de $U_{p+1} \times I$, on a ainsi une section σ_{p+1} qui satisfait à toutes les conditions cherchées. Et ceci achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : le théorème 1 reste valable même sans supposer que E' soit localement trivial, pourvu toutefois que l'image réciproque E de E' (pour l'application $g(x , t)$ de $B \times I$ dans B') soit un espace localement trivial.

2.- <u>Relèvement des homotopies dans les espaces fibrés principaux.</u>

Soient H et H' deux espaces fibrés principaux, de même groupe G ; et soit φ une application continue de la base B (de H) dans la base B' (de H') .

On se propose de chercher s'il est possible de "remonter" φ , c'est-à-dire de trouver un <u>homomorphisme</u> f de H dans H' , tel que

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "p"'] & H' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "\varphi"'] & B' \end{tikzcd}$$

Or on sait (exposé 7, page 2, application du théorème 1) que tout homomorphisme f de H dans H' correspond à une section d'un espace (H , H') , fibré de base B ; et réciproquement. Rappelons ce qu'est (H , H') : c'est le quotient du produit $H \times H'$ par la relation d'équivalence qu'y définit le groupe G en opérant comme suit :

$$(x\ ,\ x').s = (x.s\ ,\ x'.s) \quad .$$

On peut considérer $(H\ ,\ H')$ comme espace fibré de base B et de fibre H' , la projection sur la base étant définie à partir de l'application $(x\ ,\ x') \longrightarrow p(x)$ de $H \times H'$ sur B . Mais on peut aussi le considérer comme espace fibré de base B' , et de fibre H , de la même manière.

Etant donnée l'application continue φ de B dans B' , on voit que <u>remonter</u> φ revient à trouver une section σ de $(H\ ,\ H')$ (de base B) qui donne lieu au diagramme

$$\begin{tikzcd} & (H\ ,\ H') \arrow[dr] & \\ B \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & B' \end{tikzcd}$$

Donc, il s'agit de relever l'application φ de l'espace B dans la base B' de l'espace fibré $(H\ ,\ H')$.

Appliquons alors le théorème 1 (du relèvement des homotopies) ; il vient :

<u>Théorème 2</u>.- Si une application continue φ de B dans B' peut être <u>remontée</u> en un homomorphisme de H dans H' , alors toute application homotope peut aussi être remontée ; plus précisément, toute homotopie Φ de $B \times I$ dans B' (telle que $\Phi(x\ ,\ 0) = \varphi(x)$) peut être remontée en un homomorphisme F de l'espace fibré principal $H \times I$ dans l'espace fibré principal H' [$H \times I$ est considéré comme espace fibré principal, le groupe G y opérant par : $(x\ ,\ t).s = (x.s\ ,\ t)$] . Les conditions de validité du théorème sont les suivantes : B localement compact et paracompact, H' localement trivial au-dessus de B' .

<u>Corollaire 1</u> : Soit H' un espace fibré principal localement trivial de base B' , et soient φ_1 et φ_2 deux applications <u>homotopes</u> de B (loc. compact et paracompact) dans B' ; alors les structures fibrées principales, images réciproques de E' pour φ_1 et φ_2 respectivement, sont <u>B-isomorphes</u>

En effet, soit H l'espace fibré principal de base B , image réciproque de H' pour φ_1 ; d'après le théorème 2 , φ_2 peut être remontée en un homomorphisme de H dans H' , et par suite H est aussi image réciproque de H' pour φ_2 .

<u>Corollaire 2</u> : Soit B un espace localement compact et paracompact, et soit H' un espace fibré principal, localement trivial, de base $B \times I$; alors H' est isomorphe à un produit $H \times I$, où H est un espace fibré principal (localement trivial) de base B .

En effet, appliquons le théorème 2 en prenant $B' = B \times I$; et en prenant pour Φ l'application identique de $B \times I$ dans $B \times I$. Soit H l'espace fibré principal, image réciproque de H' pour l'application $x \longrightarrow (x, 0)$ de B dans $B \times I$. Alors l'application identique Φ est remontée en un homomorphisme de $H \times I$ dans H'. Cet homomorphisme remontant l'application identique, est un isomorphisme, ce qui démontre le corollaire.

Cas des espaces fibrés à groupe structural. On a expliqué (exposé 6, page 9) comment un espace fibré à groupe structural se définit à partir d'un espace fibré principal. Il en résulte que les corollaires 1 et 2 ci-dessus s'étendent aux espaces fibrés à groupe structural. D'une façon précise :

Théorème 3.- Soit E' un espace fibré à groupe structural, localement trivial ; et soient φ_1 et φ_2 deux applications continues homotopes d'un espace B (localement compact et paracompact) dans la base B' de E'. Alors les structures fibrées, de base B, images réciproques de E' pour φ_1 et φ_2 respectivement, sont B-isomorphes.

Théorème 4.- Soit E' un espace fibré à groupe structural, localement trivial, dont la base est le produit d'un espace B (localement compact et paracompact) par un segment I. Alors E' est isomorphe à un produit $E \times I$, où E est un espace fibré de base B (avec même groupe structural).

Le théorème 3 comporte la conséquence suivante : si B, localement compact et paracompact, est contractile, tout espace fibré à groupe structural, qui a B pour base et est localement trivial, est trivial.
(Démonstration : l'application identique de B dans B est homotope à une application constante, donc la structure fibrée est isomorphe à celle définie par une application constante). Plus généralement : si deux espaces (localement compacts et paracompacts) ont même type d'homotopie, il existe une correspondance biunivoque entre les types de structures fibrées ayant pour bases ces deux espaces (pour une fibre donnée et un groupe structural donné).

3.- Existence et prolongement de sections.

Le problème du relèvement d'une homotopie (ci-dessus, n°1) est un cas particulier du problème du prolongement d'une section partielle.

Pour simplifier l'exposition, on se bornera au cas où la fibre F est un polyèdre (fini ou infini), la base B étant toujours supposée localement compacte et paracompacte.

<u>Théorème 5</u>.- Si les groupes d'homotopie $\pi_i(F)$ sont nuls pour $0 \leq i \leq n-1$, et si B est de dimension $\leq n$, toute section au-dessus d'un sous-espace fermé A de B peut être prolongée en une section au-dessus de B . (On a supposé que l'espace fibré étudié, de base B et de fibre F , est <u>localement trivial</u>).

On démontre ce théorème d'abord en supposant que B soit un polyèdre de dimension $\leq n$. Soit B^p son squelette de dimension p ; on prolonge de proche en proche la section au-dessus de $B^p \cup A$. Comme l'espace fibré est trivial au-dessus de chaque cellule de B (tout au moins si la décomposition cellulaire est suffisamment fine), le prolongement de la section au-dessus de $B^p \cup A$ en une section au-dessus de $B^{p+1} \cup A$ se ramène, pour chaque cellule de dimension $p+1$, à prolonger une application de sa frontière dans F ; et ce prolongement est possible parce que $\pi_p(F)$ est nul par hypothèse.

Le théorème étant maintenant démontré lorsque B est un polyèdre, il reste à prouver qu'il reste valable quand B est un espace localement compact et paracompact de dimension $\leq n$. On peut se borner au cas où B est réunion dénombrable de compacts ; on considère alors un recouvrement localement fini, dénombrable, de B par des fermés au-dessus de chacun desquels E est trivial ; on peut prolonger la section, de proche en proche, grâce au théorème 3 de l'exposé 4 (page 8).

<u>Remarque</u> : si on laisse tomber l'hypothèse que la fibre F est un polyèdre, le théorème 1 reste vrai, à condition de supposer que la section donnée au-dessus de A est déjà prolongeable au-dessus d'un <u>voisinage</u> de A . Alors il existe une section qui prolonge, <u>au-dessus de</u> A , la section donnée.

4.- <u>Espaces classifiants</u>.

<u>Théorème 6</u>.- Soit H' un espace fibré principal, localement trivial, qui soit un polyèdre ; soit B' sa base, et G son groupe. Supposons que ses groupes d'homotopie $\pi_i(H')$ soient nuls pour $0 \leq i \leq n$. Alors tout espace fibré principal H , localement trivial, de groupe G , et dont la base B est de dimension $\leq n$, est image réciproque de H' pour une application convenable de B dans B' . De plus, pour que deux applications de B dans B' définissent des structures fibrées <u>isomorphes</u> (au-dessus de B) , il faut et il suffit qu'elles soient <u>homotopes</u>.

Un tel espace H' est alors dit "classifiant" pour la dimension n . La base B' d'un espace classifiant jouit de la propriété suivante : les types de structures fibrées principales, de groupe G , au-dessus d'un espace B de dimension $\leq n$, correspondent biunivoquement aux classes d'applications de B dans B' .

(Dans tout ceci, on ne considère bien entendu que des espaces B qui soient localement compacts et paracompacts).

Démonstration du théorème 6.

1°) si $\dim B \leq n+1$, il existe un homomorphisme de H dans H' : en effet, l'espace fibré (H , H') , de base B (considéré page 4) possède une section, en vertu du théorème 5 (la fibre de cet espace est H') . Ainsi H est bien l'image réciproque de H' pour une application convenable de la base B dans B' . Il y a plus : soit donné un homomorphisme, dans H' , du sous-espace de H situé au-dessus d'une partie fermée A de B ; alors cet homomorphisme se prolonge en un homomorphisme de H tout entier dans H' , d'après le théorème 5 .

2°) deux applications homotopes de B dans B' définissent, au-dessus de B , des structures fibrées isomorphes (ci-dessus, corollaire 1 du théorème 2).

3°) Reste à montrer que, réciproquement, si la dimension de B est $\leq n$, deux applications de B dans B' , qui définissent des structures isomorphes au-dessus de B , sont homotopes. Soient donc deux homomorphismes d'un même espace H de base B , dans H' ; on peut les considérer comme un homomorphisme, dans H' , du sous-espace de $H \times I$ situé au-dessus de $B \times J$ (en désignant par J l'ensemble des deux extrémités de I). Puisque $B \times I$ est de dimension $\leq n+1$, le résultat 1°) ci-dessus s'applique : l'homomorphisme partiel peut se prolonger en un homomorphisme de $H \times I$ dans H' , et ceci montre que les deux applications données de B dans B' sont homotopes. La démonstration du théorème 6 est ainsi achevée.

Soit H' un espace classifiant pour le groupe G , et pour la dimension n . Pour toute fibre F dans laquelle G opère à gauche, toute structure d'espace fibré de base B , de fibre F , et de groupe structural G , sera image réciproque de l'espace (H' , F) pour une application convenable de B dans B' (si $\dim B \leq n$). Les classes d'applications de B dans B' correspondent donc aux types de structures fibrées de base B , de fibre F , et de groupe structural G .

Comme une classe d'application de B dans B' définit un homomorphisme bien déterminé de l'anneau de cohomologie $H^*(B')$ dans l'anneau de cohomologie $H^*(B)$, cet homomorphisme est un invariant de la structure fibrée au-dessus de B .

Dans l'exposé 10, on donnera des exemples d'espaces classifiants : par exemple, si G est le groupe orthogonal à p-variables, soit $V_{p,N}$ l'espace des systèmes (ordonnés) de p vecteurs orthonormés dans l'espace euclidien de dimension N ; c'est un espace fibré principal ayant pour groupe G le groupe orthogonal à p variables. On démontre (voir exposé 10) que $\pi_i(V_{p,N}) = 0$ pour $0 \leq i \leq N-p-1$; donc cet espace est classifiant pour la dimension n , pourvu que $N \geq n+p+1$. Sa base B' est la grassmannienne : espace des variétés linéaires de dimension p (passant par l'origine) dans l'espace euclidien de dimension N .