H. Cartan

Généralités sur les espaces fibrés, I

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 6, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A6_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES FIBRÉS, I.

(Exposé de H. CARTAN, le 19.12.1949)

1.- Espace avec relation d'équivalence ouverte.

Une structure fibrée sur un espace E est un cas particulier du type de structure plus général que voici : dans un espace topologique E (séparé), on se donne une relation d'équivalence ouverte R (une relation d'équivalence R est "ouverte" si le saturé d'un ensemble ouvert est toujours un ensemble ouvert). Soit B l'espace quotient E/R (cf. BOURBAKI, Topologie Générale, Chapitre I, paragraphe 9), et p l'application canonique de E sur B ; dire que R est "ouverte", c'est dire que p transforme les ensembles ouverts de E en ensembles ouverts de B ; en particulier, si a est un point de E, les voisinages ouverts de $p(a) \in B$ sont les images, par p, des voisinages ouverts de a. Rappelons : pour que B soit séparé (la relation R étant ouverte), il faut et il suffit que le graphe $C \subset E \times E$ de la relation R soit fermé.

Exemple : E est un groupe topologique Γ ; un sous-groupe G définit une relation d'équivalence, deux points de Γ étant équivalents s'il existe une translation à droite par un élément de G qui transforme l'un dans l'autre ; les classes d'équivalence sont les classes à gauche xG $(x \in \Gamma)$. La relation d'équivalence est ouverte, et l'espace quotient Γ/G ("espace homogène") est séparé si et seulement si le sous-groupe G est fermé ; la relation R s'écrit en effet : $(x, y) \in C$ si $x^{-1}y \in G$.

Remarque : si E est compact (resp. localement compact), alors B est compact (resp. localement compact).

Point de vue équivalent : on se donne un espace E, et en outre un espace (séparé) B et une application continue ouverte p de E sur B (une application continue est dite "ouverte" si elle transforme tout ensemble ouvert en un ensemble ouvert). Telle est la structure que nous considérons dans ce paragraphe.

Pour cette espèce de structure, on a une notion d'homomorphisme : étant donnée une structure (E, B, p) et une structure (E', B', p'), on appelle homomorphisme de la première structure dans la seconde un couple d'applications continues : f (de E dans E') et φ (de B dans B'), de manière que $\varphi \circ p = p' \circ f$; ceci s'exprime par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p\downarrow & \varphi & \downarrow p' \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

Il revient au même de se donner une application continue f de E dans E', qui transforme des points équivalents de E en points équivalents de E' ; alors φ se définit par passage au quotient suivant les deux relations d'équivalence. Cas particulier : $B = B'$, et φ est l'application identique ; on dit alors que f est un B-homomorphisme. Plus particulièrement, f est un B-isomorphisme si en outre f est biunivoque et bicontinue.

Image réciproque d'une telle structure : on se donne (E', B', p') et une application continue φ de B dans B' ; on cherche à définir un espace E, une application ouverte p de E sur B, et une application f de E dans E', de manière à satisfaire au diagramme précédent. Le problème a toujours au moins une solution ; parmi les solutions, on distingue la suivante : E se compose des points (b, e') de l'espace produit $B \times E'$, tels que $\varphi(b) = p'(e')$; c'est donc un sous-espace fermé de l'espace $B \times E'$. On définit f par : $(b, e') \mapsto e'$, et on définit p par $(b, e') \to b$. Le diagramme est bien vérifié. Il reste à s'assurer que l'application p est ouverte, et applique E sur B ; la démonstration est facile, tenant compte du fait que p' est ouverte et applique E' sur B'. De plus : la restriction de f à chaque classe d'équivalence de E est un homéomorphisme de cette classe sur une classe d'équivalence de E'. Grosso modo, on peut dire que E a été construit en transportant, au-dessus de chaque point de B, la classe d'équivalence (de E') située au-dessus de l'image, par φ, de ce point dans B'.

Cas particulier : B est un sous-espace de B', φ étant l'application identique de B dans B' ; alors la structure (E, B, p) s'appelle la structure induite, sur B, par la structure définie par E' et p' au-dessus de B'.

L'opération "image réciproque" jouit d'une propriété évidente de transitivité.

2.- Espaces avec groupe d'opérateurs.

On examine ici le cas où la relation d'équivalence R, dans un espace E, est définie par un groupe d'opérateurs (c'est ce qui arrivait dans l'exemple donné au paragraphe 1).

On dit qu'un groupe topologique (séparé) G opère dans un espace topologique (séparé) E si on s'est donné une application continue $(x,s) \to x.s$ de $E \times G$ dans E, telle que

$$(1) \qquad (x.s).t = x.(st) \quad \text{pour} \quad x \in E \, , \; s \in G \, , \; t \in G \, , \; \text{et} \quad x.e = x$$

(e désignant l'élément neutre). De façon précise, on dit alors que G opère à droite dans E (cela veut dire qu'en écrivant à droite les opérateurs, comme nous l'avons fait, on a la relation d'associativité telle qu'elle a été écrite en (1)).

Si G opère dans E, G définit dans E une relation d'équivalence : deux points de E sont équivalents s'il existe un élément de G qui transforme l'un dans l'autre. Pour saturer un ensemble de E, on prend la réunion de cet ensemble et de tous ses transformés par les opérations de G ; donc le saturé d'un ensemble ouvert est ouvert : la relation d'équivalence est ouverte. Nous la supposerons toujours telle que l'espace quotient B (noté aussi E/G) soit séparé.

Lorsque G est un groupe compact, on voit facilement que E/G est toujours séparé.

On a vu (n° 1) que si E est compact (resp. localement compact), B est compact (resp. localement compact). La réciproque est vraie si G est un groupe compact (théorème de SERRE, Comptes Rendus, décembre 1949).

La notion d'homomorphisme (n°1) se précise dans le cas où la relation d'équivalence dans E est définie par un groupe d'opérateurs. Etant donnés deux espaces E et E', avec le même groupe d'opérateurs G, on appelle homomorphisme de E dans E' (sens plus restrictif que précédemment) une application continue f de E dans E' telle que

$$(2) \qquad f(x.s) = f(x).s \qquad \text{pour} \quad x \in E \quad \text{et} \quad s \in G \, .$$

En particulier, si E et E' ont même espace quotient B, on a la notion de B-homomorphisme et de B-isomorphisme.

Image réciproque : soit donné un espace E' avec groupe d'opérateurs G, et une application continue φ d'un espace B dans l'espace quotient $B' = E'/G$. Au numéro 1, on a défini un espace E et une application continue ouverte p de E sur B, ainsi qu'une application continue f de E dans E'. Ici, on peut en outre faire opérer (à droite) le groupe G sur E : en effet, E est sous-espace de $B \times E'$; faisons opérer G dans $B \times E'$ par la formule

$$(b , e').s = (b , e'.s) \ ;$$

le sous-espace E est stable par G , qui opère ainsi dans E . De plus, il est immédiat que la relation d'équivalence définie dans E par le groupe G n'est autre que celle définie par l'application p de E sur son espace quotient B .

<u>Transitivité</u> de l'opération "image réciproque" : évidente.

3.- <u>Espace fibré (en général)</u>.

Une structure du type défini au n° 1 est une structure d'espace <u>fibré</u> si toutes les classes d'équivalence de l'espace E sont homéomorphes entre elles. Ces classes prennent le nom de <u>fibres</u>, et l'espace B prend le nom d'<u>espace de base</u> (ou simplement de <u>base</u>).

<u>Exemple</u> : E est un espace produit $B \times F$, p étant l'application de $B \times F$ sur B définie par $(x , y) \longrightarrow x$. Un espace fibré de base B et de fibre homéomorphe à F est dit <u>trivial</u> s'il est B-isomorphe à l'espace $B \times F$ (muni de la structure fibrée qui vient d'être dite).

Pour tout sous-espace B' de la base B d'un espace fibré, on a une structure induite (cf. n°1). On voit aussitôt que c'est la structure d'un <u>espace fibré</u> E' de base B' ; les fibres sont homéomorphes aux fibres de l'espace E . Un espace fibré de base B est dit <u>localement trivial</u> si tout point de B possède un voisinage U tel que la structure induite sur U soit celle d'un espace fibré trivial de base U . Nous renvoyons à l'exposé 5 pour des exemples d'espaces fibrés localement triviaux mais non triviaux.

L'<u>image réciproque</u> d'une structure fibrée E' (de fibre homéomorphe à un espace F) est une structure fibrée E (de fibre aussi homéomorphe à F). Si E' est trivial, alors l'espace fibré E (image réciproque) est aussi trivial (c'est évident). Si E' est localement trivial, E est localement trivial.

4.- <u>Espace fibré principal</u>.

On va envisager une espèce importante de structure, qui particularise à la fois l'espèce de structure envisagée au n°2 et celle envisagée au n°3.

Un espace fibré principal E est un espace topologique E, où opère un groupe topologique G (appelé groupe structural), de manière que soit rempli l'axiome suivant :

(FP) : le graphe C de la relation d'équivalence définie par G est une partie fermée de $E \times E$; pour chaque point $(x, y) \in C$ il existe un $s \in G$ et un seul tel que $x.s = y$; en outre, en désignant par u l'application de C dans G ainsi définie, on suppose que u est une fonction continue.

Exemple : E est l'espace d'un groupe topologique Γ, dans lequel on fait opérer un sous-groupe fermé G par les translations à droite ; $B = \Gamma/G$ est l'espace homogène (des classes à gauche de Γ suivant G) ; on a ici $u(x, y) = x^{-1}y$, et c'est bien une fonction continue du couple (x, y) tel que $x^{-1}y \in G$.

En particulier, on peut prendre pour E le groupe d'opérateurs G lui-même, qui opère dans G par les translations à droite. Alors G est espace fibré principal dont la base se réduit à un point.

Pour justifier la dénomination d'"espace fibré principal", il faut montrer qu'un tel espace E est fibré pour la relation d'équivalence définie par G. Or, soit donné un point $x \in E$; l'application $s \longrightarrow x.s$ est un homéomorphisme de G sur la classe d'équivalence du point s. Ainsi : 1) E est espace fibré, et ses fibres sont homéomorphes à l'espace du groupe G ; 2) E s'identifie (comme ensemble) à un ensemble d'homéomorphismes de G sur les diverses fibres de l'espace E lui-même. Il est moins immédiat, dans le cas général, de lier la topologie de E à celles que l'on peut définir naturellement sur cet ensemble d'homéomorphismes.

Si E est localement compact, G et B le sont. Réciproquement (théorème de SERRE, loc. cit.), si G et B sont localement compacts, E est localement compact.

La notion d'homomorphisme définie au n°2 s'applique en particulier aux espaces fibrés principaux dont le groupe structural G est donné. Dans ce cas, un homomorphisme de E dans E' applique biunivoquement (et bicontinûment) les fibres de E sur les fibres de E'. En particulier, on a la notion de B-isomorphisme (pour deux espaces fibrés principaux de même base B et de même groupe G).

<u>Image réciproque</u> : on voit immédiatement que l'image réciproque d'une structure d'espace fibré principal (de groupe structural G) est un espace fibré principal (de groupe structural G).

<u>Remarque</u> : soit f un homomorphisme d'un E fibré principal (de groupe G) dans un E' fibré principal (de même groupe), et soit φ l'application continue de la base B dans la base B' , qui est définie par f . <u>Alors</u> E <u>est</u> B-<u>isomorphe à l'image réciproque</u> $\bar{\bar{E}}$ <u>de</u> E' <u>pour l'application</u> φ

Démonstration : l'application $x \to (p(x), f(x))$ de E dans $\bar{\bar{E}}$ (sous-espace de $B \times E'$) est continue, biunivoque, et applique E sur $\bar{\bar{E}}$. Montrons qu'elle est bicontinue : si un élément x de E varie de manière que $p(x)$ tende vers $p(x_0)$ et $f(x)$ vers $f(x_0)$, alors x tend vers x_0 ; en effet, l'application p étant ouverte, on a $x = y.s$ $(s \in G)$, y tendant vers x_0 , d'où $f(x) = f(y).s$, ce qui, d'après l'axiome (FP) entraîne que s tend vers l'élément neutre e , et alors $y.s = x$ tend vers x_0 .

<u>Espace trivial</u> : soit B un espace topologique (séparé) et G un groupe topologique. Sur l'espace produit $B \times G$, définissons une structure d'espace fibré principal en faisant opérer G dans $B \times G$, par

$$(x , y).s = (x , ys) .$$

L'axiome (FP) est bien rempli. Un espace fibré principal, de groupe G et de base B , est dit <u>trivial</u> s'il est B-isomorphe à l'espace $B \times G$ tel qu'il vient d'être défini.

Cherchons les B-<u>automorphismes</u> de l'espace trivial $B \times G$: a priori un B-automorphisme a la forme $(x , y) \to (x , f(x , y))$, où f est une application continue de $B \times G$ dans G . Soit F un tel automorphisme ; on doit avoir en outre $F(z.s) = F(z).s$, ce qui donne ici $f(x , ys) = f(x,y)s$, d'où en particulier $f(x , s) = f(x.e)s$ (en désignant par e l'élément neutre de G). Ainsi $f(x , y) = u(x) y$, où u est une application continue de B dans G ; réciproquement, toute fonction f de ce type convient. Résumons : les B-automorphismes de l'espace fibré principal trivial $B \times G$ sont les automorphismes de la forme

$$(3) \qquad (x , y) \longrightarrow (x , u(x)y) ,$$

où u est une application continue (arbitraire) de B dans G .

Un espace fibré principal E , de base B , groupe structural G , est dit localement trivial si tout point de la base B possède un voisinage U au-dessus duquel E est trivial (c'est-à-dire : tel que la structure d'espace fibré principal de base U , induite par E , soit une structure d'espace trivial).

L'image réciproque d'un espace trivial (resp. localement trivial) est un espace trivial (resp. localement trivial).

5.- Sections dans un espace fibré principal.

Dans un espace fibré (principal ou non) E , de base B , on a défini (exposé 5) ce qu'on appelle une section : c'est une application continue σ de B dans E , telle que $p \circ \sigma$ soit l'application identique de B . (Remarque : on envisage aussi parfois des sections non continues ; nous ne le ferons pas ici). Alors σ est un homéomorphisme de B sur un sous-espace fermé de E .

Proposition 1.- Dans un espace fibré principal, une section est définie par une application continue f de E dans le groupe structural G , telle que $f(x.s) = s^{-1}f(x)$; et réciproquement, toute telle application f correspond à une section et une seule.

Démonstration : 1°) partons d'une section σ : à $x \in E$ associons l'élément $t \in G$ tel que $x.t$ soit dans la section (N.B: par abus de langage, on appelle aussi "section" l'image de B par σ) . Posons $f(x) = t$; la fonction f ainsi définie est continue, d'après l'axiome (FP), et elle satisfait à

$$(4) \qquad f(x.s) = s^{-1}f(x) .$$

2°) partons d'une application continue f de E dans G satisfaisant à (4). L'application $x \to x.f(x)$ de E dans E est continue ; l'image de x ne dépend que de la classe d'équivalence de x , puisque si on remplace x par $x.s$, $x.f(x)$ n'est pas changé ; par passage au quotient, on obtient une application continue σ de B dans E , qui est une section.

Proposition 2.- S'il existe une section d'un espace fibré principal E , il est trivial (la réciproque étant évidente). (cf. exposé 5, théorème du paragraphe 4).

Démonstration : soit une section $\sigma : B \to E$. Définissons un B-homomorphisme de $B \times G$ sur E , à savoir : $(b , s) \to \sigma(b).s$. Pour vérifier que c'est un B-isomorphisme, il suffit de définir un B-homomorphisme réciproque de E sur $B \times G$, à savoir :

$x \longrightarrow (p(x) , f(x))^{-1})$. (f désigne l'application que la proposition 1 associe à la section.)

Remarque : à la fonction f attachée à une section, associons la fonction $\bar{f}$ définie par $\bar{f}(x) = (f(x))^{-1}$. D'après (4) , $\bar{f}$ est un homomorphisme de E dans G (G étant considéré comme espace fibré principal de groupe G , de base réduite à un point).

Ainsi : pour qu'un espace fibré principal E , de groupe structural G , soit trivial, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme de E dans G . Donc : pour que E soit localement trivial, il faut et il suffit que, au voisinage de tout point de l'espace de base, il existe un "homomorphisme local" de E dans G . Alors, la transitivité de la notion d'homomorphisme montre que :

Proposition 3.- Si E fibré principal, de groupe G , possède un homomorphisme dans un E' fibré principal, de même groupe G , et si E' est localement trivial, alors E est localement trivial.

Comme application, signalons le théorème de GLEASON :

si G est un groupe compact de Lie, tout espace fibré principal de groupe structural G est localement trivial (au moins si l'espace de base est normal). On le montre en construisant (grâce à la mesure de Haar) un homomorphisme de E dans un groupe de Lie Γ , surgroupe de G , considéré comme espace fibré principal de groupe G . Or on sait que si Γ est un groupe de Lie, et G un sous-groupe fermé (compact ou non), Γ est un espace fibré localement trivial, quand on le considère comme fibré principal de groupe structural G . (cf. exposé 5 , théorème du paragraphe 5).

En élargissant les hypothèses faites sur le groupe structural G , et en particularisant celles faites sur l'espace de base B , on obtient d'autres critères suffisants pour qu'un espace fibré principal soit localement trivial. On peut démontrer que c'est le cas lorsque G est localement compact, localement connexe et métrisable, et que B est une variété ; mais la démonstration est difficile et nous entraînerait hors du cadre de ces exposés.

6.- Espace fibré à groupe structural.

On va définir une généralisation de la notion d'espace fibré principal, qui sera en même temps une particularisation de la notion générale d'espace fibré (définie au n°3). Avant de donner une définition en forme, voici quelques considérations heuristiques.

Soit E un espace fibré de base B, de fibres homéomorphes à un espace F (il s'agit de structure fibrée dans le sens général défini au n°3). Considérons deux homéomorphismes f_1 et f_2 de F sur une même fibre de E ; on peut écrire $f_2 = f_1 \circ \sigma$, où σ est un automorphisme de la fibre-type F. On peut dire (de façon vague) que le groupe des automorphismes de F opère à droite dans l'ensemble (non topologisé) des homéomorphismes de F sur les fibres de l'espace E.

En gros, introduire un groupe structural G dans la structure fibrée de E, c'est se donner un groupe G d'automorphismes de la fibre-type F, et un ensemble H d'homéomorphismes de F sur les fibres de E, de manière à satisfaire à la condition suivante : pour toute fibre de E, il existe dans H des homéomorphismes de F sur cette fibre, et ils se déduisent de l'un (quelconque) d'entre eux en faisant opérer (à droite) tous les automorphismes de F qui appartiennent à G.

Observons que cet ensemble H peut être considéré, topologie mise à part, comme un espace dans lequel le groupe G opère à droite, de telle manière que si deux éléments de H sont congrus suivant G, il existe un seul élément de G qui transforme l'un dans l'autre. En gros, H se comporte donc comme un espace fibré principal, de même base B que l'espace fibré E, et de groupe structural G.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition en forme d'une structure fibrée avec groupe structural. Partons d'un espace fibré principal H, de groupe G, de base B ; et donnons-nous en outre un espace topologique F dans lequel G opère à gauche (ceci veut dire que, les opérations étant notées $x \to s.x$, on a $s.(t.x) = (st).x$). Toutes ces données permettent de définir un espace fibré, que nous noterons (H, F), de base B et de fibres homéomorphes à F ; cet espace sera dit "espace fibré associé" à l'espace fibré principal H, (et à la manière dont G opère dans F). Voici comment : dans l'espace produit $H \times F$, faisons opérer G (à droite) en posant

(5) $$(x, y).s = (x.s, s^{-1}.y) \quad \text{pour } x \in H, y \in F, s \in G.$$

Ceci définit $H \times F$ comme espace fibré principal de groupe G, d'où un espace (noté (H, F)) quotient de $H \times F$ par la relation d'équivalence définie par G . Définissons une application continue p de (H , F) sur B , de la manière suivante : q désignant l'application de H sur sa base B , $(x , y) \to q(x)$ est une application continue de $H \times F$ sur B , compatible avec la relation d'équivalence définie dans $H \times F$ par G ; d'où, par passage au quotient, l'application continue p cherchée de (H , F) sur B . On vérifie facilement que p est une application <u>ouverte</u>. Cherchons l'image réciproque (pour p) d'un point de B : le choix d'un point x de H (au-dessus du point donné de B) définit un homéomorphisme de F sur la classe d'équivalence (dans (H , F)) de $q(x)$, à savoir celui qui, à un point $y \in F$, associe la classe de (x , y) dans (H , F) .

Tout cela prouve que l'application p de $(H , F) = E$ sur B définit sur E une structure d'espace fibré de base B , de fibres homéomorphes à F . Tel est l'espace fibré associé à H , et à l'espace F dans lequel opère G . Sur cet espace $E = (H , F)$, la structure d'<u>espace fibré à groupe structural</u> G est définie par la donnée des deux applications continues

$$H \times F \to E \qquad \text{et} \qquad E \to B \quad ,$$

dont la première est définie par les opérations de G dans $H \times F$.

<u>Remarque</u> : la première de ces applications associe à chaque élément de H un homéomorphisme de F sur une fibre de E , conformément aux considérations développées dans l'introduction heuristique.

Par définition, un B-<u>isomorphisme</u> de E sur E' (E et E' étant deux espaces fibrés de même base B , et de même groupe structural G) doit provenir d'un B-isomorphisme de H sur H' (H et H' étant les espaces fibrés principaux servant à définir E et E' respectivement). Cela signifie qu'on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} H \times F \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, leftrightarrow] \\ H' \times F \arrow[r] & E' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

En particulier, un espace E sera dit <u>trivial</u> s'il est B-isomorphe à l'espace associé à l'<u>espace fibré principal trivial</u> $B \times G$. Cela veut dire que E s'identifie à $B \times F$ de manière que l'application canonique de $H \times F$ sur E (où $H = B \times G$) soit

$$((b.s) , y) \to (b , s.y) \quad .$$

<u>Remarque</u> : la condition, pour un espace fibré à groupe structural, d'être

trivial, est plus restrictive que la condition d'être trivial pour un espace fibré sans groupe structural. Cela tient à ce que l'espèce de structure est plus riche.

On détermine aisément les B-automorphismes d'un espace fibré trivial $B \times F$, de groupe structural G ; ce sont les applications

$$(b, y) \longrightarrow (b, u(b).y) ,$$

où u est une application continue (quelconque) de B dans G.

<u>Espace localement trivial</u> : définition évidente. Si E est localement trivial, on peut recouvrir la base B par des <u>ouverts</u> U_i, et, pour chacun d'eux, choisir un isomorphisme φ_i de $p^{-1}(U_i)$ sur $U_i \times F$, de manière que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ soit un automorphisme de $(U_i \cap U_j) \times F$, de la forme

(6) $\qquad (x, y) \longrightarrow (x, u_{ji}(x).y)$, où u_{ji} est une application continue de $U_i \cap U_j$ dans le groupe structural G. L'isomorphisme réciproque de φ_i s'appelle une <u>carte locale</u> de l'espace fibré $E = (H, F)$. Alors, si l'intersection de U_i, U_j et U_k n'est pas vide, on a, dans cette intersection,

(7) $\qquad u_{ki} = u_{kj} \circ u_{ji}$.

La connaissance de : 1°) la fibre type F, munie de son groupe G (opérant à gauche) ; 2°) du recouvrement (U_i) de B, et des applications continues u_{ji} de $U_i \cap U_j$ dans G, permet de reconstituer l'espace fibré E : on prend la somme topologique des espaces $U_i \times F$, et E est quotient de cet espace-somme par la relation d'aquivalence suivante :

$$(x_i, y) \equiv (x_j, y') \text{ si } x_j = x_i \ (\in U_i \cap U_j) \text{ et } y' = u_{ji}(x_i).y .$$

L'espace fibré principal H se reconstitue aussi : on prend la somme topologique des espaces $U_i \times G$, et on en fait le quotient par la relation d'équivalence :

$$(x_i, s) \equiv (x_j, s') \text{ si } x_j = x_i \ (\in U_i \cap U_j) \text{ et } s' = u_{ji}(x_i)s .$$

Le groupe G opère à droite dans ce quotient, d'une manière évidente.

<u>Définition d'un espace fibré par des cartes locales</u>. Dans ce qui précède on supposait donné à l'avance un espace fibré E à groupe structural G, E étant supposé localement trivial. Sans supposer E connu à l'avance, supposons seulement qu'on ait un recouvrement ouvert (U_i) d'un espace B, et

des applications continues u_{ji} de $U_i \cap U_j$ dans G, qui satisfassent à la condition (7). Le procédé précédent (passage au quotient dans un espace-somme) définit alors un espace fibré principal H et un espace fibré associé de fibre F (lorsqu'on s'est donné un espace F dans lequel G opère à gauche).

Exemple : c'est ainsi qu'on définit le prolongement d'une variété différentiable : l'espace des vecteurs tangents (qui est lui-même une variété) est muni d'une structure d'espace fibré à groupe structural, l'espace de base étant la variété initiale, la fibre étant l'espace vectoriel de dimension n (n étant la dimension de la variété donnée), et le groupe G étant le groupe des automorphismes linéaires de l'espace vectoriel de dimension n. Dans chaque U_i, on fait choix de coordonnées locales, et u_{ji} est la transformation linéaire définie par les dérivées partielles du changement de coordonnées locales

Remarques finales : 1) Soit H un espace fibré principal de groupe G, et F un espace dans lequel G opère à gauche. On vient de voir comment l'espace fibré $(H, F) = E$, de fibre F et de groupe structural G, est défini (c'est un quotient de $H \times F$). Supposons en outre qu'un groupe topologique Γ opère à droite dans F, les opérations de Γ étant permutables avec celles (à gauche) de G. Alors on peut faire opérer Γ (à droite) dans l'espace fibré associé E : on fait d'abord opérer Γ dans $H \times F$, par $(x, y).\gamma = (x, y.\gamma)$; ces opérations sont compatibles avec la relation d'équivalence définie par G dans $H \times F$, d'où l'on déduit les opérations de Γ dans $(H, F) = E$. En particulier, prenons pour F le groupe G lui-même, dans lequel on fait opérer G à droite par les translations à droite et à gauche par les translations à gauche ; alors G opère à droite dans l'espace fibré (H, G). On vérifie qu'il est canoniquement isomorphe à l'espace fibré principal H lui-même.

2) Soit E un espace fibré (ordinaire) dont la fibre F est localement compacte, et qui est localement trivial (au sens du n°3). Un tel espace peut toujours être considéré comme espace fibré à groupe structural G, G désignant le groupe de tous les homéomorphismes de F sur F, muni de la topologie suivante : un automorphisme de F a pour limite l'automorphisme identique si cet automorphisme et l'automorphisme réciproque convergent, uniformément sur tout compact de F, vers l'identité. Démonstration succincte : puisque E est localement trivial, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de la base B, tel que E soit trivial au-dessus de chaque U_i. Considérons, pour chaque

U_i , une carte locale, c'est-à-dire un isomorphisme de $U_i \times F$ sur $p^{-1}(U_i)$. Dans $U_i \cap U_j$, le changement de carte se définit par $(x , y) \longrightarrow (x , f_{ji}(x , y))$. Or une application continue f_{ji} de $(U_i \cap U_j) \times F$ dans F peut s'écrire $u_{ji}(x).y$, où u_{ji} est une application continue de $U_i \cap U_j$ dans le groupe G de tous les automorphismes de F , topologisé comme il a été dit ; s'il en est ainsi, c'est parce que la fibre F a été supposée localement compacte (cf. BOURBAKI, Topologie générale, Chapitre X, page 21, proposition 9).