A. Blanchard

Exemples d'espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 5, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A5_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/1950.

EXEMPLES D'ESPACES FIBRÉS

(Exposé de A. BLANCHARD, le 6.12.1949).

1.- Espaces fibrés.

Définition provisoire : Un espace topologique E est dit fibré de fibre F, s'il est partagé en classes d'équivalence toutes homéomorphes à un même espace F. L'espace quotient de E par cette relation d'équivalence est dit la base de E, et noté B. Par exemple, l'espace $E = B \times F$ est fibré, de façon naturelle, de fibre F et de base B ; un tel espace fibré sera dit trivial. Un espace fibré sera dit localement trivial, si toute fibre admet un voisinage saturé pour F et trivial pour la fibration définie par F.

Dans le cours de cet exposé, fibré sera souvent employé pour fibré localement trivial. (Rappelons que cette terminologie est provisoire).

Premiers exemples d'espaces fibrés.

Prenons pour E une hélice circulaire et pour F un ensemble dénombrable discret. Si l'on prend pour fibres les points situés sur une même génératrice du cylindre, E devient un espace fibré de base un cercle, qui n'est visiblement pas trivial.

Plus généralement un revêtement peut être considéré comme un espace fibré de fibre discrète.

Donnons maintenant des exemples d'espaces fibrés à fibre non discrète : Prenons un carré dont on a identifié deux côtés opposés après avoir renversé l'un d'eux (ruban de Möbius) et fibrons-le par les parallèles aux côtés identifiés. L'espace fibré ainsi obtenu a pour base un cercle et est visiblement localement trivial. Par contre, n'étant pas orientable, il n'est pas trivial.

Section :

C'est le choix, dans chaque fibre, d'un point variant continûment avec la fibre. Un espace trivial a toujours des sections, mais la réciproque n'est pas vraie (le ruban de Möbius n'est pas trivial, mais a une section, la "section médiane").

2.- Fibrations de sphères par sphères.

L'exemple le plus trivial est fourni par S^1, fibré par S^0 (deux points), la base étant S^1 . On va donner d'autres exemples.

S^3 <u>est fibré par</u> S^1 , <u>la base étant</u> S^2 .

Considérons S^3 comme la partie de C^2 formée des (x , y) tels que $x.\bar{x} + y.\bar{y} = 1$. Identifions les couples de la forme (x , y) et $(x.z , y.z)$. On obtient un espace fibré de fibre S^1 (car z est un nombre complexe arbitraire de module 1). La classe de (x , y) correspondant biunivoquement au rapport $x.y^{-1}$ (infini compris), on voit que la base est C compactifié par un point à l'infini, c'est-à-dire S^2 .

Trivialité locale : Soit $(x , y) \in S^3$ et supposons par exemple que $y \neq o$. Dans chaque classe jouissant de cette propriété, choisissons le couple (x , y) tel que y soit réel positif. On vérifie immédiatement que l'on a obtenu ainsi une section locale, à partir de laquelle on voit que l'espace est localement trivial (puisqu'il est "principal" - Voir paragraphe 4).

S^7 <u>est fibré par</u> S^3 , <u>la base étant</u> S^4 .

Il suffit de remplacer, dans les définitions précédentes, le corps C par le corps K des quaternions.

S^{15} <u>est fibré par</u> S^7 , <u>la base étant</u> S^8 .

Définition analogue avec les nombres de Cayley à la place des quaternions, mais il y a quelques précautions à prendre, vu le manque d'associativité.

On ne sait pas s'il existe d'autres exemples que les précédents de sphères fibrées par des sphères, la base étant une sphère.

Par contre, il est facile de fibrer les sphères de dimension impaires par des cercles, la base étant un espace projectif complexe. De même, les sphères de dimension égale à -1 (mod. 4) peuvent être fibrées par des sphères à 3 dimensions, la base étant un espace projectif quaternionien.

Ces espaces fibrés ne sont pas triviaux. En effet, le polynome de Poincaré de S^{15} par exemple, n'est pas le produit de celui de S^8 par celui de S^7 .

3.- <u>Espaces fibrés attachés à une variété différentiable.</u>

Soit V une variété différentiable et E l'espace des vecteurs tangents à V en ses différents points, topologisé au moyen de cartes locales par exemple. E est un espace fibré de fibre R^n et de base V (les différentes fibres étant formées des vecteurs tangents en un même point).

Cet espace admet toujours une section, par exemple celle qui fait correspondre à tout point le vecteur tangent nul en ce point. De façon générale, toute section de cet espace correspond à un champ de vecteurs continu. C'est ainsi que chercher un champ de vecteurs partout non nul revient à trouver une section ne coupant pas la section déjà définie. On sait que ce problème peut être impossible ; en effet, on peut démontrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré est le nombre (algébrique) des points d'intersection de deux sections quelconques et par suite, si elle n'est pas nulle, et seulement dans ce cas, comme on peut aussi le montrer, le problème est impossible.

Variété parallélisable.

Une variété V est dite parallélisable si l'espace E est un espace fibré trivial. Si n est la dimension de V, on voit immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que V soit parallélisable est qu'il existe n champs de vecteurs continus linéairement indépendants en tout point de V.

En particulier, la caractéristique d'Euler-Poincaré de V est nulle.

Une variété de groupe est parallélisable (car il suffit de prendre n vecteurs linéairement indépendants en un point et de les translater à gauche). Par exemple S^1 et S^3 sont parallélisables (les sphères de dimension paires ne le sont pas, puisque leur caractéristique d'Euler-Poincaré est 2). On peut montrer, en utilisant les nombres de Cayley, que S^7 est également parallélisable (la question est ouverte pour beaucoup de sphères de dimensions impaires, en particulier S^{15}).

Au lieu d'étudier les champs de vecteurs sur V, on peut étudier les champs de tenseurs (avec, éventuellement, des conditions de symétrie). En particulier, si n est la dimension de la variété V, dire que l'espace des n-vecteurs tangents à V est trivial équivaut à dire que V est orientable.

Si l'on munit V d'une structure d'espace de Riemann (ce qui est toujours possible par exemple en procédant localement et en raccordant au moyen d'une partition de l'unité), on peut se borner à étudier les vecteurs tangents de longueur 1 et plus généralement les tenseurs de longueur 1. Par exemple, dans le cas d'une variété non orientable de dimension n et des n-vecteurs, on trouve ainsi le revêtement orientable à deux feuillets.

4.- Espaces fibrés principaux.

Définition : Un espace fibré est dit principal si sa fibration est obtenue de la façon suivante : il existe un groupe topologique G, qui opère sur E, espace fibré en question, de telle sorte que pour tout couple de points x, x' de E, il existe au plus un $g \in G$ avec $x' = x.g$. Les fibres sont par définition les $x.g$ où g parcourt G ; elles sont toutes homéomorphes à G. G est dit groupe structural de E.

Exemples :

Soit V une variété différentiable à 2 dimensions que nous supposerons de plus orientable. Soit E l'espace fibré des vecteurs tangents à V de longueur 1. E est un espace fibré principal de groupe structural S^1, comme on le voit immédiatement.

Soit E un espace et E° son revêtement universel. E° est un espace fibré principal de base E et de groupe structural le groupe de Poincaré de E.

Soit Γ un groupe topologique et G un sous-groupe fermé de Γ. Si l'on fait opérer G sur Γ par les translations à droite, on obtient un espace fibré principal de groupe structural G et de base l'espace homogène Γ/G.

Théorème : Pour qu'un espace fibré principal soit trivial, il faut et il suffit qu'il admette une section.

La nécessité est évidente. Pour voir la suffisance soit $x \in E$ et soit x° l'intersection de la fibre de x et de la section. En désignant par g l'élément bien déterminé de G tel que $x = x^\circ.g$, l'application $x \to (x^\circ, g)$ définit un homéomorphisme de E sur $B \times G$.

Corollaire : pour qu'un espace fibré principal soit localement trivial, il faut et il suffit que par tout point passe une section locale.

5.- Espaces fibrés principaux définis par les groupes de LIE.

Théorème : Soit Γ un groupe de Lie et G un sous-groupe fermé de Γ. Γ, considéré comme espace fibré principal de groupe structural G, est localement trivial.

Il suffit d'abord de montrer que l'élément neutre est contenu dans une section locale. Pour cela, on commence par choisir un voisinage de l'unité qui soit repérable par paramètres canoniques et dont la section avec G soit une variété linéaire (ce qui est possible d'après un théorème d'Elie Cartan). On peut alors, en restreignant le voisinage et en changeant au besoin de coordonnées, supposer que les classes modulo G sont définies dans ce voisinage par des équations $x_i = a_i$, les autres coordonnées étant arbitraires. La section locale est alors facile à définir, il suffit de faire justement ces autres x nuls. Pour plus de détails voir Chevalley - Theory of LIE groups, p. 109-110 .

Remarque : Si Γ fibré par G est trivial, l'espace homogène Γ/G est parallélisable : on prend en un point n vecteurs linéairement indépendants et on les transporte par des transformations de Γ , prises dans la section.

Cette remarque nous servira à montrer que certains espaces fibrés ne sont pas triviaux.

6.- Application aux groupes classiques.

Désignons par : SO(n) : le groupe orthogonal réel unimodulaire sur R^n .
SU(n) : le groupe unitaire complexe unimodulaire sur C^N .
Sp(n) : le groupe unitaire quaternionien sur K^n .

Si l'on prend pour sous-groupes des groupes précédents respectivement SO(n-1) , SU(n-1) et Sp(n-1) , on obtient des espaces fibrés de bases respectivement S^{n-1} , S^{2n-1} et S^{4n-1} . Par récurrence, on voit ainsi que ces groupes, appelés aussi groupes classiques, sont des extensions multiples de sphères, ce qui, comme on le verra, nous donnera des renseignements sur leurs groupes d'homotopie.

Remarque : Pour que SO(n) , fibré par SO(n-1) , soit trivial, il faut et il suffit que S^{n-1} soit parallélisable.

La nécessité a déjà été démontrée.

Pour la suffisance, soient X_i n-1 champs continus de vecteurs tangents à S^{n-1} . Le procédé de Schmidt permet de supposer que ces n-1 champs sont en tout point ortho-normaux. L'existence de la section se déduit alors du fait qu'il existe une rotation et une seule amenant une base orthonormale des vecteurs tangents en un point sur une base analogue (et de même orientation) en un autre point.

Ainsi les cas de parallélisme des sphères que nous avons rencontrés se traduisent par des résultats de trivialité pour les fibrations de groupes orthogonaux.