H. Cartan

Applications d'espaces localement compacts dans les polyèdres : dimension, problèmes d'homotopie et de prolongement

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 4, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A4_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

APPLICATIONS D'ESPACES LOCALEMENT COMPACTS DANS LES POLYÈDRES : DIMENSION, PROBLÈMES D'HOMOTOPIE ET DE PROLONGEMENT.

(Exposé de H. CARTAN, le 28.11.1949).

1.- Applications continues d'un espace localement compact X dans des polyèdres.

Soit un polyèdre P, fini ou infini, mais localement fini (donc localement compact). P sera supposé simplicial (s'il ne l'est pas, on le décompose). P est alors défini par un complexe simplicial abstrait K (exposé 1 de 48-49, n° 2), et s'identifie à un sous-espace du "cube" I^K (I désigne le segment $[0, 1]$) : un point de P est un système (λ_k) de nombres réels compris entre 0 et 1, tous nuls sauf un nombre fini, et dont la somme est égale à 1 ; l'indice k parcourt l'ensemble K, et l'ensemble des k tels que $\lambda_k \neq 0$ est un "simplexe" du complexe simplicial K.

Une application continue f de l'espace X dans P est alors définie par la donnée des coordonnées $\lambda_k = f_k(x)$ du transformé du point x par f ; les f_k sont des fonctions continues numériques, à valeurs dans le segment I, telles que :

1) dans l'ensemble (ouvert) U_k des points x où $f_k(x) > 0$, les f_j sont nulles sauf un nombre fini ;

2) la somme $\sum f_k$ est identique à <u>un</u> (cette somme a un sens, puisqu'en chaque point tous les termes sont nuls sauf un nombre fini).

Tout système de fonctions continues f_k, à valeurs dans I, définies dans un espace localement compact X, et satisfaisant aux conditions 1) et 2) ci-dessus, est appelé une <u>partition de l'unité</u> (éventuellement, on précise en disant qu'il s'agit de partition <u>de type fini</u>, cette expression signifiant que la condition 1) est remplie).

Un recouvrement ouvert de X est dit de type fini si chaque ensemble du recouvrement n'en rencontre qu'un nombre fini.

A chaque partition (f_k) (de type fini) associons le système des ouverts U_k définis comme ci-dessus : ce <u>recouvrement ouvert</u> est dit "associé à la partition" ; il est de type fini.

Etant donné un recouvrement ouvert de type fini $(V_k)_{k \in K}$, on dit qu'une partition de l'unité $(f_k)_{k \in K}$ est subordonnée au recouvrement si elle a le même ensemble d'indices K , et si, pour tout $k \in K$, l'ensemble U_k des points x tels que $f_k(x) \neq 0$ est contenu dans V_k .

On vient donc de voir ceci : une application continue f de X dans P définit un recouvrement ouvert de type fini de X , et une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Réciproquement :

Soit $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert de type fini, et (f_k) une partition subordonnée à ce recouvrement : alors (f_k) définit une application continue f de X dans le polyèdre $\widetilde{K_{\mathfrak{R}}}$ (réalisation topologique du "nerf" du recouvrement $\mathfrak{R}$; ce nerf est le complexe simplicial abstrait $K_{\mathfrak{R}}$ défini comme suit : ses "sommets" sont les ensembles du recouvrement $\mathfrak{R}$, et un ensemble de "sommets" est un "simplexe" si les ensembles correspondants du recouvrement ont une intersection non vide).

Problème : étant donné un recouvrement ouvert de type fini $\mathfrak{R}$, existe-t-il des partitions subordonnées à ce recouvrement ? Oui, si l'espace X est normal (i.e: deux fermés disjoints peuvent être séparés par deux voisinages ouverts disjoints). En effet, si (U_k) est un recouvrement ouvert de type fini d'un espace normal X , il existe un recouvrement ouvert (V_k) tel que $\overline{V_k} \subset U_k$; soit g_k une fonction continue à valeurs dans le segment $[0\ ,\ 1]$, telle que $g_k(x) = 1$ pour $x \in \overline{V_k}$, $g_k(x) = 0$ pour $x \notin U_k$. Soit $g(x) = \sum_k g_k(x)$, ce qui a un sens et est une fonction continue numérique, à valeurs ≥ 1 . Il suffit de poser $f_k(x) = g_k(x)/g(x)$ pour obtenir une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_k) .

De deux recouvrements (U_k) et (V_j) (n'ayant pas forcément le même ensemble d'indices), on dit que (V_j) est plus fin que (U_k) si tout ensemble V_j est contenu dans au moins un ensemble U_k .

Problème : X localement compact étant donné, existe-t-il un recouvrement ouvert de type fini, plus fin qu'un recouvrement ouvert arbitrairement donné ? Si oui, X est dit paracompact (notion due à Dieudonné, Annales E.N.S., 1944, p. 65-76) (N.B: **Dieudonné donne une définition valable pour tout espace X séparé** , mais ici on se borne aux X localement compacts). Tout espace compact est paracompact (trivial) (d'ailleurs, dans un espace compact, tout recouvrement ouvert de type fini est fini). Un espace paracompact est normal (Dieudonné, loc. cit.). Conséquence : si X est paracompact, il existe toujours une partition de l'unité dont le recouvrement associé est plus fin qu'un recouvrement ouvert donné arbitrairement. Nous dirons brièvement : il existe des partitions de l'unité arbitrairement fines.

Remarque : on peut sans peine caractériser, parmi les X localement compacts, ceux qui sont paracompacts. Pour cela, il faut et il suffit que X soit réunion de sous-espace ouverts disjoints (dont chacun est donc aussi fermé) dont chacun est réunion dénombrable de sous-ensembles compacts. Une condition équivalente est : X possède au moins un recouvrement de type fini par des ouverts relativement compacts.

Tout sous-espace fermé d'un espace paracompact est paracompact.

Proposition 1.- Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert de type fini, $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$ le polyèdre qu'il définit. Chaque partition de l'unité dont le recouvrement associé est plus fin que $\mathcal{R}$ définit (de plusieurs façons) une application continue de X dans $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$; toutes ces applications (quelle que soit la partition à laquelle elles correspondent) sont homotopes.

Soit $\mathcal{R}'$ le recouvrement associé à une partition, $\mathcal{R}'$ étant plus fin que $\mathcal{R}$. Pour chaque application simpliciale $\widetilde{K_{\mathcal{R}'}} \to \widetilde{K_{\mathcal{R}}}$ (qui associe à un ensemble de $\mathcal{R}'$ un ensemble de $\mathcal{R}$ le contenant), composons l'application $X \to \widetilde{K_{\mathcal{R}'}}$ définie par la partition, avec $\widetilde{K_{\mathcal{R}'}} \to \widetilde{K_{\mathcal{R}}}$. Par définition, on obtient ainsi toutes les applications de X dans $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$ définies par la partition. Ces applications (quelle que soit la partition dont le recouvrement associé $\mathcal{R}'$ est plus fin que $\mathcal{R}$) définissent chacune une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{R}$. Pour montrer qu'elles sont toutes homotopes, il suffit d'utiliser la structure affine de l'espace des partitions subordonnées à $\mathcal{R}$.

Approximation d'une application f d'une partie fermée A de X , dans un polyèdre P . On suppose X paracompact. L'application f de A dans P définit un recouvrement ouvert, de type fini, de A . La réunion des ensembles de ce recouvrement a pour complémentaire (dans X) un ensemble B fermé, donc paracompact ; si $\dim(X - A) \leq n$, la dimension de B est $\leq n$.
Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$, de type fini, de X , dont la trace sur A est un recouvrement plus fin que celui défini par f . Associons à $\mathcal{R}$ une partition de l'unité (φ_k) dans l'espace X . Les restrictions à A des φ_k définissent donc un recouvrement de A qui est plus fin que celui défini par f . Les φ_k définissent une application φ de X dans $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$, qui applique A dans un sous-polyèdre $\widetilde{K_{\mathcal{R}'}}$ de $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$. Conformément à la proposition 1 , on

a une application f' de A dans P , composée de $A \to \widetilde{K_{\mathcal{R}'}}$ (restriction de φ) , et d'une application simpliciale $\widetilde{K_{\mathcal{R}'}} \to P$. Dans A , les applications f et f' sont homotopes (d'après la proposition 1).

En résumé : f est homotope à une application f' , obtenue en composant la restriction (à A) d'une application de X dans le polyèdre $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$, et une application simpliciale d'un sous-polyèdre $\widetilde{K_{\mathcal{R}'}}$ dans P . Par suite, pour prolonger f' , il suffit de savoir prolonger l'application $\widetilde{K_{\mathcal{R}'}} \to P$ en une application de $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$ dans P (problème étudié dans l'exposé précédent 3). Si f' est prolongeable, alors f sera aussi prolongeable, en vertu du lemme (dont la place eût été dans l'exposé) :

Lemme : Soit X paracompact, et A fermé contenu dans X . Toute application continue de A dans un polyèdre P , qui, dans A , est homotope à une application prolongeable à X , est elle-même prolongeable à X .

Il suffit de prouver que toute application de A dans un polyèdre P est prolongeable à un voisinage de A (lorsque A est une partie fermée d'un espace paracompact X) . Or c'est vrai si A est compact, car alors l'image de A est contenue dans un polyèdre fini, auquel on applique l'exposé 1 , p. 5 Si A n'est pas compact, il suffit de faire la démonstration quand X est réunion dénombrable de compacts, $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_j \subset \ldots$. La restriction de f à $A \cap X_1$ se prolonge à un voisinage compact V_1 de $A \cap X_1$; d'où une f_1 sur $A \cup (V_1 \cap X_1) = A_1$. La restriction de f_1 à $A_1 \cap X_2$ se prolonge à un voisinage compact V_2 de ... , etc. .

On peut aussi prouver : si f et g (applications de X dans un polyèdre P) coïncident sur une partie fermée $A \subset X$, elles sont homotopes (dans X) à deux applications f' et g' qui coïncident sur un voisinage de A .

2.- Dimension d'un espace localement compact.

(N.B.: dans tout ce qui suit, on considère seulement des espaces localement compacts X jouissant de la propriété suivante : X possède des recouvrements ouverts arbitrairement fins de dimension finie. Rappelons qu'un recouvrement est dit de dimension $\leq n$, si son "nerf" est de dimension $\leq n$, c'est-à-dire si chaque point de l'espace appartient au plus à n+1 ensembles du recouvrement. Tout sous-espace fermé d'un tel espace X jouit de la même propriété).

Définition : on dit que $\dim X \leq n$ s'il existe des recouvrements ouverts de dimension $\leq n$, arbitrairement fins.

On dit que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ et $\dim X \not\leq n-1$.

Si $\dim X \leq n$ et si A est un sous-espace fermé de X , alors $\dim A \leq n$: c'est immédiat.

Théorème 1.- Si $\dim X \leq n$, toute application continue, dans la sphère S^n , d'une partie fermée A de X est prolongeable à X .

(C'est une conséquence immédiate du théorème de prolongement d'une application, dans S^n , d'un sous-polyèdre d'un polyèdre de dimension $\leq n$).

Réciproque du théorème 1.- Supposons seulement que tout sous-espace compact $X' \subset X$ jouisse de la propriété $\Pi_n(X')$: toute application continue, dans S^n , d'une partie fermée de X' est prolongeable en une application continue de X' dans S^n . Alors $\dim X \leq n$.

Démonstration de cette réciproque : on observe d'abord que la propriété $\Pi_n(X)$ entraîne $\Pi_{n+1}(X)$. [Voici pourquoi : supposons que X vérifie Π_n ; soient A une partie fermée de X , et f une application continue de A dans S^{n+1} . Considérons S^n comme l'équateur de S^{n+1} , et soit $B = f^{-1}(S^n) \subset A$. Il existe une application continue g de X dans S^n , qui coïncide avec f sur B ; sur A , f et g (considérées comme applications dans S^{n+1}) sont homotopes, car $f(x)$ et $g(x)$ ne sont jamais diamétralement opposés ; puisque $g(x)$ est prolongeable à X , f l'est aussi (Exp. 1, théorème 1).]

Soit alors $\mathcal{R}$ un recouvrement de X , de dimension finie, arbitrairement fin, et formé d'ouverts relativement compacts. Choisissons une application $f : X \longrightarrow \widetilde{K_{\mathcal{R}}}$ dans la classe définie par $\mathcal{R}$. Pour tout entier k , soient X_k l'image réciproque du k-squelette P_k de $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$, et f_k la restriction de f à X_k . On va montrer que f_n se prolonge en une application continue g_n de X dans P_n , de manière que $g_n(x)$ appartienne au plus petit simplexe fermé contenant x ; alors l'image réciproque, par g_n , du recouvrement canonique de P_n sera un recouvrement ouvert arbitrairement fin de dimension $\leq n$. Pour prouver l'existence de g_n , on définit, par récurrence descendante sur $k \geq n$, une application g_k de X dans P_k de la manière suivante : $g_k = f_k$ pour k assez grand (en fait : pour k au moins égal à la dimension de $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$) ; g_k coïncide avec g_{k+1} sur X_k , et se déduit de g_{k+1} en utilisant la propriété Π_k pour les compacts contenus dans X .

Corollaire.- Pour que $\dim X \leq n$, il faut et il suffit que $\dim Y \leq n$ pour tout sous-espace compact $Y \subset X$.
(Remarque : ceci pourrait servir de définition à la dimension d'un espace localement compact X , sans aucune hypothèse restrictive sur X).

Notion de $\mathcal{R}$-application : c'est une application continue f de X dans un espace Y , telle que l'image réciproque de chaque point de Y soit "petite d'ordre $\mathcal{R}$ " ($\mathcal{R}$ désigne un recouvrement ouvert de X).

Théorème 2.- Pour qu'un espace X soit de dimension $\leq n$, il faut et il suffit que, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de X , il existe une $\mathcal{R}$-application de X dans un polyèdre de dimension $\leq n$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de faire la démonstration quand X est compact (d'après le corollaire précédent). Alors l'image réciproque de tout ensemble "assez petit" du polyèdre P (qu'on peut supposer fini) est encore petite d'ordre $\mathcal{R}$. Prenons une subdivision P' de P , assez fine pour que le recouvrement de X défini par l'application de X dans P' soit plus fin que $\mathcal{R}$. Comme ce recouvrement est de dimension $\leq n$, X possède bien des recouvrements ouverts arbitrairement fins de dimension $\leq n$.

Corollaire du théorème 2 : la dimension du produit de 2 espaces est au plus égale à la somme des dimensions de ces espaces.

(Elle peut être plus petite que la somme).

On remarquera que la dimension d'un espace quotient peut être plus grande que la dimension de l'espace lui-même (courbe de Peano).

3.- Cohomologie de Čech. (Voir aussi Séminaire 1948/49, VI ; et les derniers exposés, consacrés à la théorie axiomatique de la cohomologie de Čech).

Soit $\mathcal{R}'$ un recouvrement de type fini de X , plus fin qu'un recouvrement $\mathcal{R}$ de type fini. Alors toutes les applications simpliciales de $\widetilde{K_{\mathcal{R}'}}$ dans $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$ (qui, à un ensemble de $\mathcal{R}'$, associent un ensemble de $\mathcal{R}$ le contenant) sont homotopes (prop. 1), donc elles définissent le même homomorphisme des groupes de cohomologie : $H^*(\widetilde{K_{\mathcal{R}}}) \longrightarrow H^*(\widetilde{K_{\mathcal{R}'}})$ (coefficients quelconques, fixés une fois pour toutes). Transitivité (évidente) de ces homomorphismes. Il y a donc une limite inductive (direct limit) des groupes $H^*(\widetilde{K_{\mathcal{R}}})$, avec des homomorphismes canoniques des $H^*(\widetilde{K_{\mathcal{R}}})$ dans cette limite inductive. Cette limite inductive est le groupe de cohomologie de Čech $\check{H}(X)$, X étant localement compact et paracompact. (N.B: cette définition ne concorde avec celle de Čech que si X est compact, pour X non compact, c'est la bonne généralisation de la définition de Čech). On peut montrer que les groupes de cohomologie ainsi obtenus sont ceux qui sont donnés par l'axiomatique des faisceaux.

Proposition 2.- Si $\dim(X) \leq n$, les groupes de cohomologie $\check{H}^p(X)$ sont nuls pour $p > n$, quel que soit le groupe de coefficients.

C'est évident d'après la définition de ces groupes, et d'après la définition de la dimension.

Théorie relative : Soit A une partie fermée de X . Pour chaque recouvrement $\mathcal{R}$ de X , soit $\mathcal{R}_A$ le recouvrement de A induit par $\mathcal{R}$; alors $\widetilde{K_{\mathcal{R}_A}}$ s'identifie à un sous-polyèdre de $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$. On peut considérer la limite inductive des $H^*(\widetilde{K_{\mathcal{R}}} \bmod \widetilde{K_{\mathcal{R}_A}})$; c'est, par définition le groupe de cohomologie relative $\check{H}(X \bmod A)$.

Proposition 3.- On a une suite exacte d'homomorphismes canoniques

$$\ldots \longrightarrow \check{H}^n(X \bmod A) \longrightarrow \check{H}^n(X) \longrightarrow \check{H}^n(A) \longrightarrow \check{H}^{n+1}(X \bmod A) \longrightarrow \ldots$$

(pour tout système de coefficients).

En effet, on a une telle suite exacte pour la cohomologie du polyèdre $\widetilde{K_{\mathcal{R}}}$ et de son sous-polyèdre $\widetilde{K_{\mathcal{R}_A}}$ (cf. exposés II et IV de 1948/49). Or la limite inductive d'une famille de suites exactes est une suite exacte (trivial).

Remarque : si $\dim(X-A) \leq n$, alors $\check{H}^p(X \bmod A) = 0$ pour $p > n$.

Rappelons sans démonstration le fait bien connu : par X compact, le groupe $\check{H}(X \bmod A)$ ne dépend que de l'espace $X - A$, et s'identifie au groupe de cohomologie(de Čech) "de deuxième espèce", ou "à supports compacts", de l'espace localement compact $X - A$ (Voir exposé VI de 1948/49, et théorie des faisceaux).

Effet d'une application continue : soit f une application continue de X dans X', qui transforme une partie fermée $A \subset X$ dans une partie fermée $A' \subset X'$. L'image réciproque de tout recouvrement ouvert de type fini de X' est un recouvrement ouvert de type fini de X ; on en déduit, après passage à la limite inductive, un homomorphisme des groupes de cohomologie :

$$\check{H}^n(X' \bmod A') \longrightarrow \check{H}^n(X \bmod A) .$$

Transitivité de ces homomorphismes.

Soient maintenant deux applications continues f et g de X dans Y, dont les restrictions à A fermé soient identiques. De même qu'on l'a vu au début de l'exposé 3, (il s'agissait alors de cohomologie singulière), on en déduit un homomorphisme $(f, g)^*$ de $\check{H}(Y)$ dans $\check{H}(X \bmod A)$ (groupe de coefficients quelconque). Cet homomorphisme se définit par passage à la limite inductive. L'homomorphisme $(f, g)^*$ relatif aux groupes de cohomologie de Čech jouit de propriétés analogues à celles indiquées dans 3 pour la cohomologie singulière.

Quelques définitions : soit Y un polyèdre asphérique en dimensions $< n$ (cf. exposé 3, n° 2). On a (dans 3) défini la classe fondamentale de Y ; c'est un élément de $\check{H}^n(Y, H_n(Y))$ (pour Y, la cohomologie de Čech s'identifie à la cohomologie singulière). Comme dans 3, on en déduit :

la classe caractéristique d'une application f de X (paracompact) dans Y : c'est un élément $\gamma(f)$ de $\check{H}^n(X, H_n(Y))$, image de la classe fondamentale par l'homomorphisme $\check{H}^n(Y, H_n(Y)) \longrightarrow \check{H}^n(X, H_n(Y))$ défini par f.

– la déviation d'un couple (f, g) d'applications de X dans Y, qui coïncident sur une partie fermée A de X : c'est un élément $\gamma(f, g)$ de $\check{H}^n(X \bmod A, H_n(Y))$, image de la classe fondamentale par l'homomorphisme

$(f\ ,\ g)^*$ de $\check{H}^n(Y\ ,\ H_n(Y))$ dans $\check{H}^n(X \bmod A\ ,\ H_n(Y))$.

- l'obstruction d'une application f de A dans Y (A : partie fermée de X paracompact) : c'est un élément $\beta(f)$ de $\check{H}^{n+1}(X \bmod A\ ,\ H_n(Y))$, image de la classe caractéristique de f (élément de $\check{H}^n(A\ ,\ H_n(Y))$ par l'homomorphisme canonique $\check{H}^n(A\ ,\ H_n(Y)) \longrightarrow \check{H}^{n+1}(X \bmod A\ ,\ H_n(Y))$.

4.- Théorèmes de prolongement et d'homotopie.

Dans tout ce paragraphe, X désigne un espace localement compact satisfaisant aux conditions du par. 2 ; A désigne une partie fermée de X , et Y un polyèdre asphérique en dimensions $< n$ (par ex., une sphère de dimension n).

Il s'agit de transposer à ce cas les théorèmes 1 et 2 de l'exposé précédent (3) , dans lesquels X était un polyèdre, et A un sous-polyèdre (il est vrai qu'alors Y n'était pas nécessairement un polyèdre).

Théorème 3.- (correspond au théorème 1). On suppose $\dim X \leq n+1$. Alors, pour qu'une application f de A dans Y soit prolongeable à X , il faut et il suffit que l'obstruction $\beta(f) \in \check{H}^{n+1}(X \bmod A\ ,\ H_n(Y))$ soit nulle. Ceci n'est vrai, en toute rigueur, que pour $n \geq 2$; si $n = 1$, on suppose en outre que l'espace Y est i-simple pour tout entier $i \leq n+1$, et alors la conclusion subsiste.

La condition est évidemment nécessaire, et tout revient (comme dans 3) à montrer qu'elle est suffisante. Pour cela, on se ramène au cas des polyèdres (comme dans 3), grâce à la méthode d'approximation expliquée à la fin du paragraphe 1 du présent exposé. Nous laissons au lecteur le détail de la démonstration.

Théorème 4.- (correspond au théorème 2). On suppose $\dim X \leq n$. Alors, pour que deux applications f et g de X dans Y , qui coïncident sur A , soient homotopes modulo A , il faut et il suffit que la déviation $\gamma(f\ ,\ g) \in \check{H}^n(X \bmod A\ ,\ H_n(Y))$ soit nulle. De plus, étant donnée une f de X dans Y , et un élément arbitraire γ de $\check{H}^n(X \bmod A\ ,\ H_n(Y))$, il existe une application g de X dans Y , égale à f sur A , et telle que la déviation $\gamma(f\ ,\ g)$ soit précisément γ . En particulier (A étant supposé vide) : les classes d'applications de X dans Y sont en correspondance biunivoque avec les éléments du groupe de cohomologie (de Čech) $\check{H}^n(X\ ,\ H_n(Y))$.

Les conclusions du théorème 4 ne valent, en réalité, que si $n \geq 2$. Pour $n = 1$, elles valent pourvu que l'on suppose en outre que l'espace Y soit i-simple pour tout $i \leq n$ (resp. $i < n$) .

Nous laissons au lecteur le détail de la démonstration du théorème 4 , que l'on ramène au théorème analogue pour les polyèdres (théorème 2 de 3) , grâce à la méthode d'approximation du présent exposé (fin du paragraphe 1).

On peut appliquer les théorèmes précédents notamment quand Y est une sphère de dimension n . Mais, pour $n = 1$, la nullité des groupes d'homotopie $\pi_i(S^1)$ pour $i \geq 2$ permet de donner les extensions suivantes des théorèmes 1 et 2 de l'exposé 3 :

<u>Théorème 3 bis.</u>-

Soit A une partie fermée de X . Pour qu'une application f de A dans S^1 puisse se prolonger à X , il faut et il suffit que l'obstruction $\beta(f) \in \check{H}^2(X \bmod A , Z)$ soit nulle.

<u>Théorème 4 bis.</u>-

Soit A une partie fermée de X . Pour que deux applications f et g de X dans S^1 , qui coïncident sur A , soient homotopes modulo A , il faut et suffit que la déviation $\gamma(f , g) \in \check{H}^1(X \bmod A , Z)$ soit nulle. Les classes d'applications de X dans S^1 correspondent biunivoquement aux éléments du groupe de cohomologie (de Čech) de l'espace X , à coefficients entiers.

<u>Application du théorème de prolongement</u> : <u>caractérisation cohomologique de la dimension.</u>

<u>Lemme</u> : Si $\dim(X) \leq n+1$, et si $\check{H}^{n+1}(X \bmod A , Z) = 0$ pour toute partie fermée A de X , alors toute application de A dans S^n se prolonge en une application de X dans S^n .

C'est une conséquence immédiate du théorème 3 .

D'après la réciproque du théorème 1 , on voit que, dans les hypothèses du lemme, la dimension de X est $\leq n$. Réciproquement, il est clair que si $\dim(X) \leq n$, alors $\check{H}^{n+1}(X \bmod A , Z) = 0$ pour toute partie fermée A de X . D'où :

<u>Théorème 5.</u>- Si X est de dimension finie, la dimension de X est <u>le plus grand</u> des entiers n tels qu'il existe une partie fermée A de X satisfaisant à $\check{H}^n(X \bmod A , Z) \neq 0$. (Les coefficients entiers, pour la cohomologie, jouent un rôle privilégié pour la caractérisation de la dimension ; on voit que cela tient à ce que le groupe d'homologie $H_n(S^n)$ est isomorphe à Z).

Remarque : si X est compact (cas auquel on peut se ramener, puisque la dimension d'un espace non compact est la borne supérieure des dimensions des compacts contenus), le groupe de cohomologie $\check{H}^n(X \bmod A , Z)$ qui intervient dans la caractérisation de la dimension n'est autre que le groupe de cohomologie à supports compacts du sous-espace ouvert $X-A$.

Exemples : l'espace R^n est de dimension (topologique) égale à n , car la cohomologie à supports compacts d'une boule ouverte n'est pas nulle pour la dimension n .

Un polyèdre de dimension (simpliciale) n est de dimension (topologique) n .

Pour qu'une partie fermée de R^n soit de dimension n , il faut et il suffit qu'elle possède au moins un point intérieur. (c'est suffisant, d'après le théorème 5 ; c'est nécessaire, car si A n'a pas de point intérieur dans R^n , alors, dans toute triangulation de R^n chaque n-simplexe contient un point qui n'appartient pas à A , ce qui permet (par projection centrale dans chaque n-simplexe) de trouver une ε-application de A dans un polyèdre de dimension $n-1$) .