H. Cartan

Problèmes d'homotopie et de prolongement : théorie des obstructions

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A3_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

PROBLÈMES D'HOMOTOPIE ET DE PROLONGEMENT : théorie des obstructions.

(Exposé de H. CARTAN, le 21.11.1949).

1.- Rappel de définitions.

Soit f une application d'un espace X dans un espace Y (N.B: "application" signifiera toujours "application continue"). Elle définit un homomorphisme $\bar{f}$ du groupe d'homologie singulière $H_n(X)$ dans le groupe d'homologie singulière $H_n(Y)$, et un homomorphisme $\bar{f}^*$ du groupe de cohomologie singulière $H^n(Y, G)$ dans le groupe de cohomologie singulière $H^n(X, G)$ (la cohomologie étant relative à un groupe G de coefficients) (à ce sujet, cf. exposé V de 48-49, n° 4). Nous introduirons en outre la notion suivante, formulée par exemple pour la cohomologie :

Soient f et g deux applications de X dans Y, dont les restrictions à une partie A de X sont identiques. On leur associe un homomorphisme $(f, g)^*$ de $H^n(Y, G)$ dans $H^n(X \bmod A, G)$, de la façon suivante : soit donné un cocycle α de Y ; à chaque simplexe singulier de X, associons l'élément de G, différence des valeurs de α sur les images de ce simplexe par f et g respectivement. La fonction des simplexes singuliers de X que l'on obtient ainsi est une cochaîne à valeurs dans G, qui s'annule sur les simplexes contenus dans A, et dont le cobord est nul. C'est donc un cocycle de $X \bmod A$, et sa classe dans $H^n(X \bmod A, G)$ ne dépend que de la classe de α dans $H^n(Y, G)$. Ceci définit l'homomorphisme $(f, g)^*$.

Propriétés de $(f, g)^*$:

$$(f, g)^* + (g, f)^* = 0 \quad , \quad (f, g)^* + (g, h)^* + (h, f)^* = 0 \, ;$$

si on compose $(f, g)^*$ et l'homomorphisme canonique de $H^n(X \bmod A, G)$ dans $H^n(X, G)$, on obtient l'homomorphisme $\bar{f}^* - \bar{g}^*$.

Rappelons d'autre part qu'il existe un homomorphisme canonique

(1) $\quad H^n(X \bmod A, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X \bmod A), G)$ (cf exposé IV de 48-49, n°4), et que, le groupe des chaînes singulières de X modulo A étant libre, c'est un homomorphisme du premier groupe sur le second. Autrement dit, le groupe des homomorphismes de $H_n(X \bmod A)$ dans G s'identifie

à un groupe quotient du groupe de cohomologie $H^n(X \bmod A , G)$. On peut démontrer (voir Eilenberg-MacLane, Group extensions and Homology, Ann. of Math., 43, 1942, p. 757-831 ; et aussi un article de Cartan et Eilenberg à paraître) que le noyau de l'homomorphisme (1) est isomorphe au groupe d'extensions $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X \bmod A) , G)$, et en particulier est nul si $H_{n-1}(X \bmod A)$ est un groupe libre, ou même, plus particulièrement, s'il est nul. Dans ce cas, le groupe de cohomologie $H^n(X \bmod A , G)$ s'identifie canoniquement au groupe des homomorphismes de $H_n(X \bmod A)$ dans le groupe G .

Première partie : applications d'un espace X dans un espace Y asphérique en dimensions $< n$.

2.- Cas où X est la sphère S^n .

Nous dirons qu'un espace Y est asphérique en dimensions $< n$ si les groupes d'homotopie $\pi_i(Y)$ sont nuls pour $0 \leq i < n$ ($\pi_0(Y) = 0$ signifie que l'espace Y est connexe) ; si $n = 1$, on suppose en outre que $\pi_1(Y)$ est abélien. Ces conditions impliquent toujours que Y est n-simple. On rappelle (cf. exposé 2) que $\pi_n(Y)$ s'identifie alors canoniquement au groupe d'homologie (à coefficients entiers) $H_n(Y)$.

Ce résultat s'interprète ainsi : les classes d'application de la sphère S^n dans l'espace Y correspondent canoniquement aux éléments du groupe d'homologie $H_n(Y)$. Si on explicite cette correspondance en remontant à la définition de l'isomorphisme $\pi_n(Y) \to H_n(Y)$, on trouve ceci : le choix d'une orientation de S^n définissant un des 2 éléments générateurs du groupe $H_n(S^n)$ (qui est isomorphe au groupe additif des entiers Z) , une application f de S^n dans Y définit un homomorphisme $\bar{f}$ de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$, et l'élément de $H_n(Y)$, image par $\bar{f}$ de l'élément générateur de $H_n(S^n)$, est précisément celui qui est associé à la classe d'homotopie de l'application f . - Ceci vaut, en particulier, si Y est aussi une sphère S^n ; l'homomorphisme $\bar{f}$ est alors caractérisé par un entier (une fois les sphères X et Y orientées), qui s'appelle le degré (brouwérien) de l'application f.

Ainsi une classe d'applications de S^n dans un espace Y asphérique en dimensions $< n$ est caractérisée par l'homomorphisme de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$ qu'elle définit ; et, pour tout homomorphisme de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$, il existe une application donnant naissance à cet homomorphisme. Or (n°1 ci-dessus) le groupe des homomorphismes de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$ est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie $H^n(S^n , H_n(Y))$, puisque $H_{n-1}(S^n)$ est un groupe libre (en effet, il est nul si $n \geq 2$, et isomorphe à Z si $n = 1$). Sous cette forme, le résultat va être généralisé à des espaces X plus généraux que la sphère S^n .

3.- Classe caractéristique, obstruction, déviation.

Le groupe d'homologie $H_{n-1}(Y)$ de l'espace Y (asphérique en dimensions $< n$) est nul si $n \geq 2$, libre si $n = 1$. Donc le groupe de cohomologie

$$H^n(Y , H_n(Y))$$

s'identifie au groupe des endomorphismes de $H_n(Y)$. A l'endomorphisme identique de $H_n(Y)$ correspond ainsi un élément bien déterminé de $H^n(Y,H_n(Y))$, que nous appellerons la classe fondamentale de l'espace Y .

On peut aussi définir la classe fondamentale comme suit : on sait (exposé 2) que l'homologie et la cohomologie de l'espace Y peuvent être étudiées en considérant uniquement des simplexes singuliers (ou des "cubes singuliers") dont toutes les faces de dimension $\leq n-1$ sont appliquées en un même point y . Un simplexe de dimension n est alors un cycle, et par suite définit un élément de $H_n(Y)$. A chaque simplexe de dimension n associons l'élément de $H_n(Y)$ qu'il définit ; la fonction ainsi définie est une cochaîne, et même un cocycle, à valeurs dans le groupe $H_n(Y)$. D'ailleurs il n'y a pas de cobord de dimension n , autre que zéro (puisque tous les simplexes de dimension $n-1$ sont nuls ; le cas $n = 1$ doit être envisagé à part : les simplexes de dimension 0 ne sont pas nuls, mais les cobords de dimension 1 sont nuls néanmoins). Ainsi le groupe $H^n(Y , H_n(Y))$ s'identifie au groupe des cocycles de dimension n , à valeurs dans $H_n(Y)$; et le cocycle défini plus haut n'est autre que la "classe fondamentale" de l'espace Y . On remarquera qu'il n'est pas nul si $H_n(Y) \neq 0$.

Soit maintenant f une application d'un espace X dans l'espace Y , asphérique en dimensions $< n$. Elle définit un homomorphisme

$$H^n(Y , H_n(Y)) \longrightarrow H^n(X , H_n(Y)) .$$

l'image de la classe fondamentale s'appelle la classe caractéristique de l'application f . C'est un élément $\gamma(f)$ de $H^n(X , H_n(Y))$. On notera que si f est l'application identique de Y dans Y , sa classe caractéristique n'est autre que la classe fondamentale de Y . La classe caractéristique d'une application constante est nulle.

Soient f et g deux applications de X dans Y, dont les restrictions à une partie A de X sont égales. L'homomorphisme $(f, g)^*$ défini au n° 1 applique $H^n(Y, H_n(Y))$ dans $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$; l'image de la classe fondamentale s'appelle la déviation du couple (f, g) ; c'est un élément $\gamma(f, g)$ de $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$.

Enfin, soit A une partie d'un espace X, et f une application de A dans Y. On appelle obstruction de l'application f (relativement à X) l'image de l'élément $\gamma(f) \in H^n(A, H_n(Y))$ dans l'homomorphisme canonique

$$H^n(A, H_n(Y)) \longrightarrow H^{n+1}(X \bmod A, H_n(Y))$$ (cf. exposé V de 48-49, n° 5). L'obstruction de f sera notée $\beta(f)$; c'est un élément dont l'image dans $H^{n+1}(X, H_n(Y))$ est nulle (à cause des propriétés de suite exacte : même référence).

4.- Théorèmes de prolongement et d'homotopie.

Les théorèmes suivants résultent immédiatement de l'invariance des notions homologiques par homotopie :

Théorème A.- Soit Y un espace asphérique en dimensions $< n$, et soit f une application, dans Y, d'un sous-espace A d'un espace X. Pour que f soit prolongeable en une application de X dans Y, il faut que l'obstruction $\beta(f)$ soit nulle.

Théorème B.- Soit Y un espace asphérique en dimensions $< n$, et soient f et g deux applications de X dans Y, dont les restrictions à un sous-espace A de X sont égales. Pour que f et g soient homotopes modulo A (c'est-à-dire pour qu'il existe une déformation de f dans g dans laquelle la restriction de f à A reste constante), il faut que la déviation $\gamma(f, g)$ soit nulle. En particulier (si A est vide) : pour que deux applications f et g de X dans Y soient homotopes, il faut que les classes caractéristiques $\gamma(f)$ et $\gamma(g)$ soient égales.

On se propose d'imposer désormais aux espaces X et Y des conditions restrictives, moyennant lesquelles les conditions données dans les théorèmes précédents sont non seulement nécessaires mais suffisantes. On se bornera, dans le présent exposé, au cas où X est un polyèdre (fini ou infini, mais localement fini), sans faire sur Y de nouvelles hypothèses. Dans l'exposé suivant, on supposera que Y est en outre un polyèdre, et il ne sera plus nécessaire de supposer que X soit un polyèdre ; mais alors on considérera la cohomologie de Čech de l'espace X, et non plus la cohomologie singulière.

Dans cet exposé, X étant désormais un polyèdre, il n'y a pas lieu de distinguer entre cohomologie singulière, cohomologie de Čech, et cohomologie simpliciale (relative à la décomposition en cellules du polyèdre X) .

Dans tout ce qui suit, Y est toujours supposé asphérique en dimensions $< n$, et A désigne un sous-polyèdre (fermé) du polyèdre X . On se propose d'établir les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.- 1er cas $n \geq 2$. Supposons que les groupes de cohomologie $H^{i+1}(X \bmod A , \pi_i(Y))$ soient nuls pour $i \geq n+1$, ce qui est notamment le cas si l'espace $X - A$ est de dimension $\leq n+1$, ou si $\pi_i(Y) = 0$ pour $i > n$. Alors, pour qu'une application f de A dans Y soit prolongeable à X , il faut et il suffit que son obstruction $\beta(f) \in H^{n+1}(X \bmod A, H_n(Y))$ soit nulle.

2e cas $n = 1$. La même conclusion est valable, pourvu que l'espace Y soit i-simple pour tout entier $i \leq \dim(X-A)$.

Théorème 2.- 1er cas $n \geq 2$. Supposons que les groupes de cohomologie $H^i(X \bmod A , \pi_i(Y))$ soient nuls pour $i \geq n+1$, ce qui est notamment le cas si l'espace $X-A$ est de dimension $\leq n$, ou si $\pi_i(Y) = 0$ pour $i > n$. Alors, pour que deux applications f et g de X dans Y , dont les restrictions à A sont égales, soient homotopes modulo A , il faut et il suffit que la déviation $\gamma(f , g) \in H^n(X \bmod A , H_n(Y))$ soit nulle. De plus, si $H^{i+1}(X \bmod A , \pi_i(Y)) = 0$ pour $i \geq n+1$, alors, étant donnés arbitrairement une application f de X dans Y et un élément γ de $H^n(X \bmod A , H_n(Y))$, il existe une application g de X dans Y , dont la restriction à A est égale à la restriction de f à A , et qui est telle que $\gamma(f , g) = \gamma$.

En particulier (si A est vide) : si les groupes $H^i(X , \pi_i(Y))$ et $H^{i+1}(X , \pi_i(Y))$ sont nuls pour $i \geq n+1$, les classes d'applications de X dans Y correspondent biunivoquement aux éléments du groupe de cohomologie $H^n(X ; H_n(Y))$.

2e cas $n = 1$. Les mêmes conclusions sont valables, pourvu que l'espace Y soit i-simple pour tout entier $i \leq \dim(X-A)$ (resp. $i < \dim(X-A)$) .

Cas particulier : l'espace Y est la sphère S^n . Dans ce cas, ce sont les groupe de cohomologie à coefficients entiers de X et de $X \bmod A$ qui interviennent, une fois qu'on a identifié $H_n(S^n)$ au groupe Z , grâce à une orientation de la sphère S^n .

Cas où le groupe d'homologie $H_{n-1}(X)$ est libre : alors les classes d'applications de X dans Y correspondent biunivoquement aux homomorphismes $H_n(X) \to H_n(Y)$ des groupes d'homologie à coefficients entiers. L'homomorphisme qui est ainsi associé à une application f n'est autre que $\bar{f}$ (voir n°1 ci-dessus) ; et il existe toujours une f telle que $\bar{f}$ soit un homomorphisme donné à l'avance.

La démonstration des théorèmes 1 et 2 sera donnée à la fin de la deuxième partie de cet exposé.

Deuxième partie : la théorie d'Eilenberg.

Dans tout ce qui suit, et jusqu'à nouvel ordre, Y est supposé connexe mais n'est plus supposé asphérique en dimensions $< n$. Toutefois, on supposera que Y est n-simple, pour simplifier l'exposition (mais l'hypothèse n'a rien d'essentiel, semble-t-il).

5.- Définition des cochaînes $b^{n+1}(f)$ et $c^n(f, g)$.

X désigne un polyèdre, X^n son squelette de dimension n, A un sous-polyèdre. Pour toute application f de X^n dans Y, on définit une cochaîne de dimension $n+1$ du polyèdre X, à valeurs dans le groupe d'homotopie $\pi_n(Y)$. Pour cela, étant donnée une (n+1)-cellule orientée σ_{n+1} de X, on lui associe l'élément de $\pi_n(Y)$ défini par l'application f de son bord orienté. La cochaîne ainsi définie est notée $b^{n+1}(f)$.

Lemme 1 : Pour toute application f de $X^n \cup A$ dans Y, $b^{n+1}(f)$ est un cocycle ; ce cocycle s'annule sur A (i.e: sur les (n+1)-cellules contenues dans A), et peut donc être considéré comme un cocycle de X modulo A. Pour que $b^{n+1}(f) = 0$, il faut et il suffit que f soit prolongeable à $X^{n+1} \cup A$.

Il suffit de montrer que $b^{n+1}(f)$ est un cocycle, le reste étant évident. Soit σ une (n+2)-cellule orientée de X ; il faut montrer que la somme des éléments de $\pi_n(Y)$ définis par les restrictions de f aux bords des (n+1)-cellules orientées du bord de σ, est nulle. Cela revient à la propriété suivante : quand on a une (n+1)-cellule, et une décomposition de cette cellule en (n+1)-cellules partielles, l'élément de $\pi_n(Y)$ défini par l'application f du bord de la grande cellule est égal à la somme des éléments de $\pi_n(Y)$ définis par les bords respectifs des cellules partielles ; ceci se prouve par récurrence sur le nombre des cellules partielles.

Soient maintenant deux applications f et g de X^n , dont les restrictions à X^{n-1} sont égales. On définit une n-cochaîne $c^n(f , g)$, à valeurs dans $\pi_n(Y)$, de la façon suivante : pour toute n-cellule orientée σ_n , les applications f et g définissent deux cellules singulières orientées, de même bord, dont la "différence" peut être considérée comme l'application d'une n-sphère orientée ; d'où un élément de $\pi_n(Y)$, qu'on associe à la cellule σ_n . Et ceci définit la cochaîne $c^n(f , g)$. Si f , g , h sont 3 applications de X^n dans Y , dont les restrictions à X^{n-1} sont égales, on a

$$c^n(f , g) + c^n(g , f) = 0 \quad , \quad c^n(f , g) + c^n(g , h) + c^n(h , f) = 0 .$$

Lemme 2 : Si les applications f et g sont définies sur $X^n \cup A$ et si leurs restrictions à $X^{n-1} \cup A$ sont égales, la cochaîne $c^n(f , g)$ s'annule sur A , et peut donc être considérée comme une cochaîne de X mod A . Pour que $c^n(f , g) = 0$, il faut et il suffit que f et g soient homotopes modulo $X^{n-1} \cup A$. De plus, f étant donnée, ainsi qu'une n-cochaîne arbitraire c^n de X mod A (à valeurs dans $\pi_n(Y)$) , il existe une application g de $X^n \cup A$ dans Y , dont la restriction à $X^{n-1} \cup A$ est égale à la restriction de f , et telle que $c^n(f , g)$ soit précisément égale à c^n .

Seule la dernière affirmation de l'énoncé a besoin d'être démontrée. Il faut prouver ceci : étant donnée une application f d'une n-cellule σ , et une application φ d'une n-sphère S^n dans Y , on identifie σ à un hémisphère de S^n ; on se propose de trouver une application ψ de S^n dans Y , homotope à φ , et dont la restriction à σ soit précisément l'application f . Or ceci est possible grâce au théorème de prolongement des homotopies (exposé 1).

Lemme 3 : On a la relation fondamentale

$$\delta(c^n(f , g)) = b^{n+1}(f) - b^{n+1}(g) \quad ,$$

où δ désigne, comme d'habitude, l'opérateur cobord.

Corollaire : si 2 applications f et g de $X^n \cup A$ qui coïncident sur $X^{n-1} \cup A$, sont prolongeables à $X^{n+1} \cup A$, la cochaîne $c^n(f , g)$ est un cocycle de X mod A .

Pour démontrer le lemme 3 , on considère une (n+1)-cellule de X , et les applications f et g de son bord ; puis on utilise la commutativité et l'associativité de la loi de composition du groupe $\pi_n(Y)$ (ne pas oublier que si $n = 1$, on a supposé que Y est 1-simple, ce qui veut dire que $\pi_1(Y)$ est abélien).

6.- Rôle des cochaînes $b^{n+1}(f)$ et $c^n(f , g)$ dans les problèmes de prolongement et les problèmes d'homotopie.

Proposition 1.- Soit f une application de $X^n \cup A$ dans Y. Pour qu'il existe une application g de $X^{n+1} \cup A$ dans Y, dont la restriction à $X^{n-1} \cup A$ soit égale à la restriction de f, il faut et il suffit que le cocycle $b^{n+1}(f)$ soit le cobord d'une cochaîne de X mod A ; autrement dit, que l'élément de $H^{n+1}(X \text{ mod } A , \pi_n(Y))$ défini par $b^{n+1}(f)$ soit nul.

Démonstration : c'est nécessaire, car alors $b^{n+1}(g) = 0$ (lemme 1), et $c^n(f , g)$ s'annule sur A (lemme 2) ; d'après le lemme 3, $b^{n+1}(f)$ est le cobord d'une cochaîne s'annulant sur A. - C'est suffisant : soit c^n une cochaîne s'annulant sur A, et telle que $b^{n+1}(f) = \delta c^n$; d'après le lemme 2, il existe une application g de $X^n \cup A$ dans Y, dont la restriction à $X^{n-1} \cup A$ est égale à la restriction de f, et qui est telle que $c^n(f , g) = c^n$. D'après le lemme 3, on a $b^{n+1}(g) = 0$; le lemme 1 dit alors que g est prolongeable à $X^{n+1} \cup A$.

Proposition 2.- Soient f et g deux applications de X dans Y, dont les restrictions à $X^{n-1} \cup A$ sont égales. Pour qu'il existe une application g' de X dans Y, égale à f sur $X^n \cup A$, et homotope à g modulo $X^{n-2} \cup A$, il faut et il suffit que l'élément de $H^n(X \text{ mod } A, \pi_n(Y))$ défini par le cocycle $c^n(f , g)$ soit nul (remarquer que $c^n(f , g)$ est un cocycle, d'après le corollaire du lemme 3).

Démonstration : tout d'abord, l'existence d'une telle application g' équivaut à la condition suivante : les restrictions de f et de g à $X^n \cup A$ sont homotopes modulo $X^{n-2} \cup A$. C'est encore une conséquence facile du théorème sur le prolongement des homotopies (exposé 1). Cela dit, soit B le polyèdre, produit de $X^n \cup A$ par I (I désignant le segment $[0,1]$). Soit C le sous-polyèdre de B, réunion de $A \times I$, $X^n \times \{0\}$ et $X^n \times \{1\}$. Soit φ l'application de $B^n \cup C$ définie comme suit :
$\varphi(x , t) = f(x) = g(x)$ si $x \in X^{n-1} \cup A$ (et t quelconque dans I), $\varphi(x , 0) = f(x)$ si $x \in X^n$, $\varphi(x , 1) = g(x)$ si $x \in X^n$. Cherchons le cocycle $b^{n+1}(\varphi)$: si σ_n est une n-cellule de X, sa valeur sur la (n+1)-cellule $\sigma_n \times I$ est égale à la valeur de $c^n(f , g)$ sur σ_n. Or on

cherche précisément à quelle condition il existe une application ψ de $B^{n+1} \cup C$ $(=B)$ dans Y, qui soit égale à φ sur $B^{n-1} \cup C$; d'après la proposition 1, il faut et il suffit, pour cela, que $b^{n+1}(\varphi)$ soit le cobord d'une cochaîne s'annulant sur C ; or ceci exprime justement que $c^n(f, g)$ est le cobord d'une cochaîne de X s'annulant sur A. Ce qui achève la **démonstration.**

7.- Application de la théorie d'Eilenberg à la démonstration des théorèmes 1 et 2 (ci-dessus, n° 4).

Démonstration du théorème 1.- L'espace Y étant à nouveau supposé asphérique en dimensions $< n$, on identifie $\pi_n(Y)$ à $H_n(Y)$. On a déjà montré (théorème A) que la condition de l'énoncé est nécessaire ; on va montrer qu'elle est suffisante. Or, l'application f de A dans Y étant donnée, on peut la prolonger de proche en proche en une application f' de $X^n \cup A$ dans Y, puisque les groupes d'homotopie $\pi_i(Y)$ sont nuls pour $i \leq n-1$. Alors le cocycle $b^{n+1}(f')$ est défini, ainsi que sa classe dans $H^{n+1}(X \bmod A, H_n(Y))$. On constate que cette classe n'est autre que l'obstruction $\beta(f)$. Elle est donc nulle, et la proposition 1 montre qu'il existe une application g_n de $X^{n+1} \cup A$ dans Y, égale à f' sur $X^{n-1} \cup A$. Alors l'élément $b^{n+2}(g_n)$ est défini ; sa classe dans $H^{n+2}(X \bmod A, \pi_{n+1}(Y))$ est nulle, puisque ce groupe a été supposé nul ; donc (proposition 1) il existe une application g_{n+1} de $X^{n+2} \cup A$ dans Y, égale à g_n sur $X^n \cup A$. On pourra continuer ainsi indéfiniment ; sur chaque squelette X^p, les applications g_n, g_{n+1}, ... finissent par être les mêmes, donc on obtient une application g de tout X dans A, et la restriction de g à A est égale à l'application donnée f. C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 2.- Ici encore, il suffit de montrer que la condition du théorème est suffisante. Soient donc 2 applications f et g de X dans Y, dont les restrictions à A sont égales. Par application répétée de la proposition 2, et grâce au fait que les $\pi_i(Y)$ sont nuls pour $i \leq n-1$, on trouve qu'il existe une application g' de X dans Y, homotope à g modulo A, et égale à f sur $X^{n-1} \cup A$. La cochaîne $c^n(f, g')$ est alors définie ; c'est un cocycle dont la classe est un élément de $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$. On constate que c'est précisément la déviation $\gamma(f, g)$.

Si on suppose cette déviation nulle, la proposition 2 montre qu'il existe une application g_n de X dans Y, égale à f sur $X^n \cup A$, et homotope à

g' modulo $X^{n-2} \cup A$. Comme les groupes $H^i(X \bmod A , \pi_i(Y))$ sont supposés nuls pour $i \geq n+1$, on pourra continuer indéfiniment. La suite $g_n, g_{n+1}, \dots$ a pour limite f , et cette limite est homotope à g modulo A . Ceci démontre la première partie du théorème 2.

Démontrons la deuxième partie : supposons $H^{i+1}(X \bmod A , \pi_i(Y)) = 0$ pour $i \geq n+1$, donnons-nous arbitrairement une application f de X dans Y , et un élément γ de $H^n(X \bmod A , H_n(Y))$. Il s'agit de montrer qu'il existe une application g de X dans Y , dont la restriction à A est égale à la restriction de f , et qui est telle que la déviation $\gamma(f , g)$ soit précisément γ . Soit c un cocycle de la classe de γ ; d'après le lemme 2, il existe une application g' de $X^n \cup A$ dans Y , qui est égale à f sur $X^{n-1} \cup A$, et est telle que $c^n(f , g') = c$. Puisque c est un cocycle, le lemme 3 montre que $b^{n+1}(g') = b^{n+1}(f)$; d'après le lemme 1 , $b^{n+1}(f)$ est nul, donc $b^{n+1}(g')$ est nul, et a fortiori l'obstruction de g' est nulle. Appliquons le théorème 1 à g' : g' se prolonge en une application g de X dans Y , en vertu des hypothèses faites. Or la déviation $\gamma(f , g)$ est la classe de $c^n(f , g')$, c'est donc bien l'élément γ donné à l'avance. C.Q.F.D.

8.- Application : condition pour qu'un polyèdre soit du type d'homotopie de la sphère S^n .

Utilisant le théorème 2, on démontre aisément :

Pour qu'un polyèdre X (fini ou infini, mais localement fini) soit du même type d'homotopie que la sphère S^n $(n \geq 1)$, il faut et il suffit que :

1° X ait mêmes groupes d'homologie (à coefficients entiers) que S^n ;

2° le groupe fondamental $\pi_1(X)$ soit nul.

(Rappelons que deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une application f de X dans Y et une application g de Y dans X , telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes respectivement à l'application identique de Y et l'application identique de X). Dans le cas présent, on construit de telles applications, grâce au théorème 2 ; c'est possible parce que les groupes $H^{i+1}(X , \pi_i(S^n))$ et $H^i(X , \pi_i(X))$ sont nuls pour $i \geq n+1$, grâce aux hypothèses faites sur les groupes d'homologie de X .

Le cas de la sphère S^1 est un peu plus délicat. On trouve :

X est du type d'homotopie de S^1 si X est connexe, $\pi_1(X)$ isomorphe à Z , les groupes d'homologie $H_i(X)$ nuls pour $i \geq 2$, et si enfin X est i-simple pour $i \leq \dim X$.