Séminaire Henri Cartan

J-P. Serre

Extension des applications - homotopie

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. nº 1, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A1_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1949-1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/1950

EXTENSION DES APPLICATIONS - HOMOTOPIE

(Exposé de J-P. SERRE, le 7.11.1949).

Le présent exposé a pour but de présenter quelques-uns des problèmes relatifs aux applications continues d'un espace dans un autre. Ces problèmes sont fort loin d'être résolus, même pour des espaces aussi simples que les sphères ; les exposés ultérieurs traiteront certains cas particuliers, dus à Hopf, Hurewicz, Pontrjagin, Steenrod ... ; ici, nous nous bornerons à les poser et à donner quelques définitions essentielles.

Nous nous occuperons de deux problèmes, intimement liés d'ailleurs, le problème de l'extension des applications et celui de l'homotopie.

1.- Extension des applications.

Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie fermée de X et f une application continue de A dans Y. Peut-on prolonger f à tout X, c'est-à-dire, peut-on trouver une application continue de X dans Y dont la restriction à A soit f ?

Exemples :

1) Toute application constante est prolongeable.

2) Si Y est un intervalle, ouvert ou fermé, et si X est normal, le problème est toujours possible (théorème d'Urysohn. Voir Bourbaki, Topologie IX, page 4).

3) Par contre, soit $X = S^2$, A un cercle de X, Y un tore et f un homéomorphisme de A sur un cercle méridien du tore. On verra, en utilisant l'homologie, que f n'est pas prolongeable.

4) Si A est un rétracte de X, c'est-à-dire si l'application identique de A sur lui-même est prolongeable en une application continue de X sur A, le problème de prolongement est possible quel que soit Y (noter l'analogie avec la notion algébrique de projecteur).

Exemples de rétractes : tout facteur d'un produit direct est rétracte de l'espace entier. Un point, un segment, sont rétractes de tout espace (normal dans le cas du segment) qui les contienne (pour le voir dans le cas du segment on appliquera le théorème d'Urysohn à l'application identique du segment sur lui-même).

Remarque : on n'exige rien d'autre du prolongement que d'être continu. On pourrait fort bien se poser d'autres problèmes, par exemple celui du prolongement des homéomorphismes. Mais on ne sait pratiquement rien en dire (voir thèse d'Antoine).

Conditions homologiques .

Soient $H_n(A)$, $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ les n-ièmes groupes d'homologie de A , X et Y , à coefficients dans un groupe G (l'homologie pouvant être prise au sens singulier -ce sera le cas le plus fréquent- ou tchéquiste. On pourra aussi utiliser les groupes d'homologie de 2-ème espèce).

On sait que f définit un homomorphisme f° de $H_n(A)$ dans $H_n(X)$. Soit p° l'homomorphisme canonique, défini par l'application canonique p de A dans X , de $H_n(A)$ dans $H_n(X)$. Si f admet un prolongement g à tout X , on a : $f^\circ = g^\circ \circ p^\circ$.

D'où la condition nécessaire suivante, pour que le prolongement soit possible : Il doit exister un homomorphisme g° de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$ tel que : $f^\circ = g^\circ \circ p^\circ$. En particulier, le noyau de p° doit être contenu dans celui de f° . C'est ce qui n'avait pas lieu dans le troisième exemple donné ci-dessus.

Remarques : cette condition nécessaire n'est suffisante que dans des cas très particuliers (par exemple (Hopf) si X est de dimension $n + 1$, et si $Y = S^n$). On peut donner des conditions analogues en cohomologie, faisant alors intervenir la structure multiplicative ; on peut aussi faire intervenir de nouvelles notions homologiques (produits de Steenrod, par exemple) pour renforcer ces conditions et essayer de les rendre suffisantes pour des classes de plus en plus vastes d'espaces.

2.- Homotopie.

Soit X et Y deux espaces topologiques, f et g deux applications continues de X dans Y ; on dit que f et g sont homotopes s'il existe une application continue F de $X\times I$ dans Y telle que : $F(x , o) = f(x)$ et $F(x , 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. (I désigne le segment $[o , 1]$) .

On dit aussi que f et g sont continûment déformables l'une en l'autre

On voit aussitôt que l'homotopie est une relation d'équivalence, compatible avec la composition des applications. Ses classes sont dites classes d'homotopie.

L'homotopie peut s'interpréter en termes de *connexion d'espace fonctionnel* de la façon suivante : supposons que X soit localement compact et munissons l'espace $C(X , Y)$ des applications continues de X dans Y de la topologie de la convergence compacte (Bourbaki, Top. X, page 2). Si Z est un espace localement compact, les applications continues de Z dans $C(X , Y)$ correspondent biunivoquement (et même bicontinûment) aux applications continues de $X \times Z$ dans Y . Ceci, appliqué au cas où $Z = I$, montre que :

Si X *est localement compact, les classes d'homotopie des applications continues de* X *dans* Y *ne sont autres que les composantes connexes par arc de* $C(X , Y)$.

Ainsi, l'étude de l'homotopie n'est autre que l'étude de la connexion par arc de l'espace fonctionnel $C(X , Y)$. Dans le même ordre d'idées, on peut étudier la *connexion locale* de cet espace (voir plus loin), ou bien le groupe fondamental (on est alors conduit, lorsque X est une sphère, aux *groupes d'homotopie de* Y) .

Invariance de l'homologie par homotopie

Soient, comme précédemment, $H_n(X)$, $H_n(Y)$, f° et g° . On a :
Si f *et* g *sont homotopes,* $f^\circ = g^\circ$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 1 de l'exposé 9 de l'an dernier. Deux cycles singuliers, images d'un même cycle de X par f et g sont homologues parce que leur différence est le bord du "prisme singulier" défini par l'homotopie.

Comme pour le problème de l'extension des applications, cette condition "homologique" n'est pas suffisante en général pour que f et g soient homotopes.

Type d'homotopie

On dit que deux espaces ont même type d'homotopie s'il existe une application continue f de X dans Y et une application continue g de Y dans X , telles que : $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'application identique. Cette relation est visiblement une relation d'équivalence dans l'"ensemble" de tous les espaces topologiques (si l'on peut dire ...) .

L'intérêt de cette notation est que deux espaces du même type d'homotopie se conduisent exactement de la même manière vis-à-vis de tous les problèmes d'homotopie. Par exemple, si E est un autre espace topologique, on vérifie immédiatement que les classes d'homotopie de $C(X, E)$ et de $C(Y, E)$ se correspondent biunivoquement (comme celles de $C(E, X)$ et de $C(E, Y)$). En particulier, X et Y auront même groupe fondamental (et, plus généralement, mêmes groupes d'homotopie, toroïdaux ...). Enfin, f et g définissent des homomorphismes f° et g° de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$ et de $H_n(Y)$ dans $H_n(X)$ respectivement qui sont tels que $f^\circ \circ g^\circ = 1$ et $g^\circ \circ f^\circ = 1$; X et Y ont donc même homologie.

Exemples : soit A un rétracte de X, tel que la rétraction soit homotope à l'application identique. Alors A et X ont même type d'homotopie. Exemples :

A réduit à un point, X un cube. (De façon générale, un espace du type d'homotopie d'un point est dit rétractile. Les problèmes d'homotopie sont triviaux pour un tel espace.)

A est un cercle, X un "tore plein" dont A est un cercle parallèle.

En général, le type d'homotopie n'est pas déterminé par les propriétés homologiques. C'est cependant le cas pour les complexes simpliciaux finis, simplement connexes, à 4 dimensions, à condition toutefois d'enrichir l'homologie.

3.- Homotopie et extension des applications.

Le problème qui consiste à chercher si deux applications f et g de X dans Y sont homotopes, est un problème d'extension d'application dans l'espace $X \times I$: il s'agit bien en effet de trouver une application de $X \times I$ dans Y qui se réduise sur $X \times (o)$ à f et sur $X \times (1)$ à g. Si l'on essaie d'écrire, pour ce problème particulier d'extension, les conditions homologiques établies plus haut, on retombe sur la condition : $f^\circ = g^\circ$.

Cherchons, en particulier, si une application f de X dans Y est homotope à une application constante (on dit aussi que f est inessentielle). Ceci conduit à un problème d'extension dans $X \times I$, où l'on a identifié les points de $X \times (1)$. Par exemple, pour qu'une application de la sphère S^n soit inessentielle, il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable à la boule B^{n+1}. Ceci se généralise immédiatement à un complexe simplicial fini, en introduisant le "cône" de base ce complexe. Cette traduction "géométrique" du problème est souvent commode.

Nous allons montrer maintenant que, sous des conditions très générales, le problème d'extension d'une application f d'une partie fermée A d'un

espace X dans un espace Y, ne dépend que de la classe d'homotopie de f.
Pour cela, démontrons d'abord le théorème suivant :

Théorème 1.- Avec les notations précédentes, supposons que X soit normal et qu'il existe un voisinage U de A et une application continue $f(x, t)$ de $U \times I$ dans Y, telle que $f(x, o) = f(x)$. Alors, si f est prolongeable à X, il existe une application continue de $X \times I$ dans Y, qui coïncide avec f pour $t = o$ et pour tout $x \in A$.
(en particulier, $f(x, 1)$ est prolongeable à X)

A cause de la normalité de X, il existe une fonction réelle et continue $u(x)$, comprise entre o et 1, prenant la valeur o sur le complémentaire de U et 1 sur A. Posons : $g(x,t) = f(x,t.u(x))$. La fonction g donne le prolongement cherché. Le théorème 1 est particulièrement utile lorsque l'espace Y jouit de la propriété suivante :
pour toute application f d'une partie fermée A d'un espace normal X dans Y, il existe un prolongement de f à un voisinage U de A. Un tel espace est dit rétracte absolu de voisinage (définition de Borsuk, légèrement généralisée). On a :

Théorème 2 : Tout complexe simplicial fini est un rétracte absolu de voisinage. Ce théorème sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme : Soit Y un sous-espace d'un cube, tel qu'il existe un voisinage O de Y dont Y soit rétracte. Alors Y est un rétracte absolu de voisinage.

En effet on peut prolonger f en une application continue g de X dans le cube. Posons $U = g^{-1}(O)$; U est un voisinage de A. En composant g et la rétraction de O sur X on obtient une application continue de U dans Y qui prolonge f, c.q.f.d.

Montrons maintenant que la condition du lemme est remplie lorsque Y est un complexe simplicial fini. On peut considérer Y comme un sous-complexe d'un simplexe S, lequel est homéomorphe à un cube. Soit S' la subdivision barycentrique de S et Q le sous-complexe de S' formé des simplexes dont tous les sommets sont centres de gravité de faces de S n'appartenant pas à Y. Q est fermé et $Q \cap Y = \emptyset$. Y est rétracte de $\complement Q$. En effet, soit σ un simplexe de S n'appartenant pas à Y, et soit φ_σ la projection conique de centre le centre de gravité de σ sur la frontière de σ. $\complement Q$ est conservé par les φ_σ, et en combinant entre eux les φ_σ, on a la rétraction cherchée. (cf. exposé IX de l'an dernier).

La méthode donne même une rétraction homotope à l'application identique, puisqu'il en est de même des φ_σ. On en déduit facilement qu'il existe un nombre $\varepsilon > o$, tel que si deux applications d'un espace X dans Y sont voisines d'ordre ε, elles sont homotopes. Ceci montre en particulier, que si X est compact, C(X , Y) est localement connexe par arc, et répond à une question posée plus haut.

Soit maintenant X un espace normal, tel que X x I soit normal (ce sera toujours le cas si X est métrisable, ou localement compact et paracompact) et soit A une partie fermée de X . En combinant les théorèmes 1 et 2 on obtient :

Théorème 3.- Soit X un espace vérifiant les conditions précédentes, A une partie fermée de X , Y un complexe simplicial fini et f(x , t) une application continue de A x I dans Y telle que f(x , o) soit prolongeable à X . Alors f(x , t) est prolongeable à X x I .

(Avec les hypothèses précédentes sur X et Y , on voit bien qu'une application homotope à une application prolongeable est elle-même prolongeable. En outre, on peut choisir les prolongements de façon qu'ils soient encore homotopes).

Au lieu de faire des hypothèses sur X et Y , nous allons en faire sur A et X . Pour cela, démontrons le lemme suivant :

Lemme : Soit X un espace normal et Y un sous-espace fermé de X , homéomorphe à un rétracte absolu de voisinage (par exemple, un complexe simplicial fini). Alors Y est rétracte d'un de ses voisinages dans X (ce qui justifie dans une certaine mesure la terminologie).

En effet, cela revient à prolonger l'application identique de Y sur Y en une application d'un voisinage de Y sur Y .

En combinant ce lemme avec le théorème 1, on trouve :

Théorème 4 : Soit X un complexe simplicial fini, A un sous-complexe fermé de X , Y un espace topologique quelconque et f(x , t) une application continue de A x I dans Y telle que f(x , o) soit prolongeable à X. Alors, f est prolongeable à X x I .

BIBLIOGRAPHIE

EILENBERG : Extension and classification of continuous mappings. (Lectures in Topology - Michigan, 1941).

HUREWICZ et WALLMAN : Dimension theory - Chapter VI (Princeton mathematical Series, n°4, 1941)