H. Cartan

Cohomologie réelle d'un espace fibré principal différentiable. I : notions d'algèbre différentielle, algèbre de Weil d'un groupe de Lie

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 19, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A18_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

COHOMOLOGIE RÉELLE D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE

I : Notions d'algèbre différentielle, algèbre de Weil d'un groupe de Lie.

(Exposé de H. CARTAN, le 15 mai 1950).

1.- Algèbres graduées.

Notion d'algèbre graduée A (degrés $\geqslant 0$). On note $a \longrightarrow \bar{a}$ l'automorphisme qui, à un $a \in A^p$ (c'est-à-dire de degré p), associe $(-1)^p a$.

Une dérivation, dans A, est un endomorphisme θ de la structure vectorielle, de degré pair, tel que

$$\theta(ab) = (\theta a)b + a(\theta b) .$$

(Un endomorphisme θ est dit de degré r s'il applique A^p dans A^{p+r} quel que soit p.)

Une antidérivation est un endomorphisme δ de degré impair, tel que

$$\delta(ab) = (\delta a)b + \bar{a}(\delta b) .$$

Si en outre δ est de degré $+1$, et si $\delta\delta = 0$, δ s'appelle une différentielle.

Soient δ_1 et δ_2 deux antidérivations ; alors $\delta_1\delta_1$ et $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1$ sont des dérivations. Le crochet $[\theta_1, \theta_2]$ de deux endomorphismes étant défini, comme d'habitude, par la formule

$$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1\theta_2 - \theta_2\theta_1 ,$$

le crochet de deux dérivations est une dérivation, le crochet d'une dérivation et d'une antidérivation est une antidérivation.

Une dérivation, ou une antidérivation, est déterminée quand elle est connue sur les sous-espaces A^0 et A^1 formés des éléments de degré 0 et 1, pourvu que l'algèbre A soit engendrée (au sens multiplicatif) par A^0 et A^1. Dans certains cas, on peut se donner arbitrairement les valeurs d'une dérivation (resp. d'une antidérivation) sur A^1, en posant qu'elle est nulle sur A^0 ; par exemple, lorsque A est l'algèbre extérieure d'un module dont les éléments sont de degré un (Pour tout ce qui concerne l'algèbre extérieure, voir BOURBAKI, Alg., Chapitre III).

Exemple : soit $\mathfrak{A}$ un module sur un anneau commutatif ayant un élément unité, et soit A l'algèbre extérieure du dual de ce module. Chaque élément x de $\mathfrak{A}$ définit un endomorphisme $i(x)$ de A, de degré -1, appelé "produit intérieur" par x : c'est l'antidérivation qui, sur le dual A^1 de $\mathfrak{A}$, est égale au "produit scalaire" définissant la dualité entre $\mathfrak{A}$ et A^1 :

$$i(x).x' = \langle x , x' \rangle \qquad \text{pour } x \in \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad x' \in A^1 .$$

On a alors

$$i(x).(x'_1 \wedge x'_2 \wedge \dots \wedge x'_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \langle x, x'_k \rangle \, x'_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x'_k} \wedge \dots \wedge x'_p$$

(le signe $\widehat{\ }$ signifie que le terme correspondant doit être supprimé). L'opérateur $i(x)$ est de carré nul : $i(x)i(x) = 0$; en effet, $i(x)i(x)$ est une dérivation, évidemment nulle sur A^0 et A^1.

2.- Variétés différentiables.

Pour simplifier l'exposition, nous nous bornerons aux variétés indéfiniment différentiables. Les champs de vecteurs tangents que l'on considérera seront toujours supposés indéfiniment différentiables ; de même pour les formes différentielles de tous degrés.

Les champs de vecteurs tangents constituent un module T sur l'anneau des fonctions numériques (indéfiniment différentiables). Le module dual T' est le module des formes différentielles de degré un ; son algèbre extérieure $A(T')$ est l'algèbre des formes différentielles de tous degrés (les fonctions ne sont autres que les formes différentielles de degré 0). La différentiation extérieure, notée d, est une "différentielle" sur $A(T')$, au sens du numéro 1. Chaque élément x de T définit, outre le produit intérieur $i(x)$ (qui opère sur $A(T')$), une "transformation infinitésimale" $\theta(x)$ qui opère aussi bien sur T que sur T' et $A(T')$: c'est une dérivation (de degré 0) sur $A(T')$, qui est entièrement caractérisée par les deux conditions :

$$\theta(x)d = d\,\theta(x)$$
$$\theta(x).f = i(x).df \quad \text{pour une fonction } f .$$

Si x et y sont des champs de vecteurs tangents, le crochet $[x , y]$ désigne le champ de vecteurs $\theta(x).y$; cette notation se justifie par la relation

$$(1) \qquad \theta([x , y]) = \theta(x)\,\theta(y) - \theta(y)\,\theta(x) .$$

En outre, sur l'algèbre différentielle $A(T')$, on a les relations

$$(2) \qquad \theta(x)i(y) - i(y)\,\theta(x) = i([x , y]) ,$$

$$\theta(x) = i(x)d + di(x) \quad (3)$$

Cette relation, compte tenu de $dd = 0$, implique que d et $\theta(x)$ commutent.

3.- Groupes de Lie.

Soit G un groupe de Lie. Les champs de vecteurs tangents, invariants par les translations à gauche, forment un espace vectoriel $\mathfrak{A}(G)$ sur le corps réel ; cet espace est en dualité avec l'espace vectoriel $\mathfrak{A}'(G)$ des formes différentielles de degré un, invariantes à gauche. L'algèbre extérieure $A(G)$ de l'espace $\mathfrak{A}'(G)$ est l'algèbre des formes différentielles de tous degrés, invariantes à gauche ; les éléments de degré 0 (fonctions constantes) s'identifient aux scalaires (multiples de l'unité).

Chaque élément $x \in \mathfrak{A}(G)$ définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de G, qui ne sont autres que les translations à droite par un sous-groupe à un paramètre de G. La transformation infinitésimale $\theta(x)$ de ce groupe opère dans $\mathfrak{A}(G)$: d'où le crochet $[x , y]$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$. De plus, $\theta(x)$ opère dans $A(G)$, et $A(G)$ est stable pour les produits intérieurs $i(x)$ relatifs aux x de $\mathfrak{A}(G)$. Les relations (1), (2) et (3) sont vérifiées dans $A(G)$.

Ici, on peut expliciter l'opérateur différentiel d de $A(G)$: désignons par $e(x')$ la multiplication (à gauche) par un élément $x' \in A^1(G)$ dans l'algèbre extérieure $A(G)$; alors, en prenant dans $\mathfrak{A}(G)$ et son dual $\mathfrak{A}'(G) = A^1(G)$ deux bases duales (x_k) et (x'_k), on a

$$d = \frac{1}{2} \sum_k e(x'_k)\, \theta(x_k) \quad . \quad (4)$$

(Cette formule a été donnée par KOSZUL dans sa Thèse (Bull. Soc. Math. de France, t.78,(1950) p. 65-127 ; appliquée aux éléments de degré un de $A(G)$, ce n'est pas autre chose que "les équations de Maurer-Cartan").

4.- Espace fibré principal.

Soit $\mathcal{E}$ un espace fibré principal, localement trivial, de groupe G. On suppose que $\mathcal{E}$ est une variété indéfiniment différentiable, et que G est un groupe de Lie connexe. Sans nous référer à la notion générale d'espace fibré principal, nous supposons ce qui suit :

1) G opère (à droite) dans $\mathcal{E}$ d'une manière indéfiniment différentiable, et G est simplement transitif sur chaque classe d'équivalence (fibre)

2) l'espace $\mathcal{B}$ ("espace de base"), quotient de $\mathcal{E}$ par la relation d'équivalence définie par G, est une variété indéfiniment différentiable

3) chaque point de $\mathcal{B}$ possède un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ tel que l'image réciproque de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{E}$ soit isomorphe (comme variété indéfiniment différentiable) au produit $\mathcal{U} \times G$, la transformation définie par un élément s de G étant alors $(u, g) \longrightarrow (u, gs)$.

On notera E l'algèbre des formes différentielles (indéfiniment différentiables) de l'espace $\mathcal{E}$, munie de sa graduation et de l'opérateur d de différentiation extérieure. Tout vecteur x de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ définit un champ de vecteurs tangents à $\mathcal{E}$: en effet, chaque fibre de $\mathcal{E}$ s'identifie à G, d'une manière bien définie à une translation à gauche de G près ; donc un champ invariant à gauche, sur G, se transporte sur chaque fibre d'une seule manière. Ainsi, chaque $x \in \mathfrak{A}(G)$ définit dans l'algèbre E un produit intérieur $i(x)$ et une transformation infinitésimale $\theta(x)$. Cette dernière est celle du sous-groupe à un paramètre de G (opérant à droite dans $\mathcal{E}$) défini par l'élément x de l'algèbre de Lie. Dans E, les opérateurs d, $i(x)$ et $\theta(x)$ satisfont aux relations (1), (2) et (3).

L'algèbre B des formes différentielles (indéfiniment différentiables) de l'espace de base $\mathcal{B}$ s'identifie à une <u>sous-algèbre</u> de E, stable pour d : la sous-algèbre des éléments annulés par tous les opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ relatifs aux x de $\mathfrak{A}(G)$.

D'une manière générale, soit E une algèbre différentielle graduée où opèrent des antidérivations $i(x)$ (de degré -1 et de carré nul) et des dérivations $\theta(x)$ (de degré 0) correspondant aux éléments x d'une algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$, de manière à satisfaire à (1), (2) et (3). Nous dirons, pour abréger, que G <u>opère dans</u> E. Cela étant, nous appellerons <u>éléments basiques</u> de E les éléments annulés par tous les $i(x)$ et les $\theta(x)$; ils forment une sous-algèbre graduée B, <u>stable pour</u> d (en vertu de (3)). On appelle <u>**invariants**</u> les éléments de E annulés par les $\theta(x)$; ils forment une sous-algèbre I_E <u>stable pour</u> d.

Un problème important consiste à chercher des relations entre les algèbres de cohomologie $H(E)$ et $H(B)$, la cohomologie étant prise, dans chaque cas, par rapport à l'opérateur différentiel d. Dans les cas intéressants, $H(I_E) \longrightarrow H(E)$ est un isomorphisme sur.

5.- <u>Connexion infinitésimale dans un espace fibré principal</u>.

Une connexion infinitésimale est définie par la donnée, en chaque point P de l'espace fibré $\mathcal{E}$, d'un <u>projecteur</u> φ_P de l'espace tangent à $\mathcal{E}$ au point P sur le sous-espace des vecteurs tangents à la fibre au point P de manière que :

1) φ_P soit fonction indéfiniment différentiable du point P ;

2) les projecteurs φ_P se transforment les uns dans les autres par les opérations du groupe G .

L'existence de connexions infinitésimales se démontre ainsi : la variété des vecteurs tangents à $\mathcal{E}$ étant considérée comme espace où opère G , il s'agit de trouver un homomorphisme de cet espace dans l'espace vectoriel $\mathfrak{A}(G)$ où G opère par les transformations du groupe adjoint (le mot "homomorphisme" étant pris au sens des exposés 6 , 7 et 8 , cet homomorphisme étant de plus assujetti à avoir une valeur donnée sur la sous-variété des vecteurs tangents aux fibres de $\mathcal{E}$. Or un tel prolongement d'homomorphisme est possible ici, parce que l'espace $\mathfrak{A}(G)$ est rétractile ; en effet, on est ramené à prolonger une section dans un espace fibré dont la fibre est $\mathfrak{A}(G)$.

La donnée d'une connexion infinitésimale dans $\mathcal{E}$ revient à la donnée d'une application linéaire f du dual $\mathfrak{A}'(G)$ de $\mathfrak{A}(G)$ dans le sous-espace E^1 de l'algèbre E (algèbre des formes différentielles de $\mathcal{E}$) , telle que :

$$(5) \qquad \begin{cases} i(x).f(x') = i(x).x' & \text{(scalaire de } E \text{, c'est-à-dire fonction constante sur } \mathcal{E}\text{)} ,\\ \theta(x).f(x') = f(\theta(x).x') , \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathfrak{A}(G)$ et tout $x' \in A^1(G)$.

Ceci permet de définir la notion abstraite de "connexion algébrique" dans une algèbre différentielle E dans laquelle opère un groupe G (au sens de la fin du numéro 4) : ce sera une application linéaire de $A^1(G)$ dans E^1 qui satisfasse aux conditions (5) .

Soit donc une connexion algébrique dans une algèbre différentielle graduée E dans laquelle opère G . Supposons en outre que, dans E , on ait $vu = (-1)^{pq}uv$ pour u de degré p et v de degré q , ce qui est bien le cas si E est une algèbre de formes différentielles. Alors on peut prolonger f en un homomorphisme (multiplicatif) de l'algèbre $A(G)$ dans l'algèbre E (transformant l'élément unité dans l'élément unité) ; notons encore f ce prolongement. On a, pour tout $u \in A(G)$,

$$(5)' \qquad \begin{cases} i(x).f(u) = f(i(x).u) \\ \theta(x).f(u) = f(\theta(x).u) \end{cases}$$

Mais, si x' est un élément de $A^1(G)$, on n'a pas, en général, $d(f(x')) = f(dx')$. L'application $x' \longrightarrow d(f(x')) - f(dx')$ de $A^1(G)$ dans

E^2 n'est autre que le tenseur de courbure de la connexion.

L'élément $d(f(x')) - f(dx')$ n'est pas, en général, un élément basique ; néanmoins il est annulé par tous les produits intérieurs $i(x)$. Démonstration :

$i(x)d(f(x')) = \theta(x).f(x') - d.(i(x).f(x')) = f(\theta(x).x')$ d'après (5), et, d'après (5)' ,

$i(x).f(dx') = f(i(x).dx') = f(\theta(x).x' - di(x).x') = f(\theta(x).x')$.

6.- L'algèbre de Weil d'une algèbre de Lie.

Désignons par $S(G)$ l'"algèbre symétrique" du dual $\mathfrak{A}'(G)$ de $\mathfrak{A}(G)$: si on prend une base (x'_k) dans $\mathfrak{A}'(G)$, $S(G)$ s'identifie à l'algèbre des polynomes par rapport aux lettres x'_k (commutant deux à deux). $S(G)$ s'identifie aussi canoniquement à l'algèbre des formes multilinéaires symétriques sur l'espace vectoriel $\mathfrak{A}(G)$.

On distinguera l'espace $\mathfrak{A}'(G)$ comme sous-espace $A^1(G)$ de $A(G)$, et comme sous-espace $S^1(G)$ de $S(G)$: on a un isomorphisme canonique h de $A^1(G)$ sur $S^1(G)$. On notera souvent $\tilde{x}'$ l'élément $h(x')$, pour $x' \in A^1(G)$.

Définissons une application linéaire $\tilde{f}$ de $S^1(G)$ dans E^2 , en posant

$$\tilde{f}(\tilde{x}') = d(f(x')) - f(dx') \quad .$$

Pour que $\tilde{f}$ conserve les degrés, on convient que les éléments de $S^1(G)$ sont de degré 2 ; ceci conduit à graduer $S(G)$ en posant que les éléments de $S^p(G)$ sont de degré 2p . L'application $\tilde{f}$ se prolonge alors en un homomorphisme multiplicatif de l'algèbre (commutative) $S(G)$ dans l'algèbre E , homomorphisme qui conserve les degrés. On notera encore $\tilde{f}$ l'homomorphisme prolongé.

L'algèbre de Weil de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ est l'algèbre graduée $W(G) = A(G) \otimes S(G)$, produit tensoriel des algèbres graduées $A(G)$ et $S(G)$. Les homomorphismes $f : A(G) \longrightarrow E$, et $\tilde{f} : S(G) \longrightarrow E$, définissent un homomorphisme $\bar{f}$ de $W(G)$ dans E . On va définir, sur $W(G)$ (indépendamment de l'algèbre E et de la connexion f) des opérateurs $i(x)$, $\theta(x)$ et une différentielle δ , de telle manière que, pour toute connexion f dans une algèbre différentielle graduée E (avec $vu = (-1)^{pq}uv$) , l'homomorphisme $\bar{f}$ défini par f soit compatible avec les $i(x)$, les $\theta(x)$ et les opérateurs différentiels δ (dans $W(G)$) et d (dans E).

Définition de $i(x)$: $i(x)$ est déjà défini sur $A(G)$ (identifié à la sous-algèbre des éléments $u \otimes 1$, 1 étant l'élément unité). Sur $S^1(G)$ (identifié au sous-espace des $1 \otimes \widetilde{x'}$) , convenons que $i(x)$ est l'opérateur <u>nul</u>. Prolongeons $i(x)$ en une antidérivation de l'algèbre $A(G) \otimes S(G)$; c'est possible d'une seule manière ; l'antidérivation $i(x)$ est nulle sur $S(G)$ et, sur $W(G)$, son carré est nul. Cela étant, on a bien, pour tout $\alpha \in W(G)$,

$$i(x).\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(i(x).\alpha) ,$$

parce qu'il en est ainsi lorsque α est dans $A(G)$ (relation (5)') , et lorsque α est dans $S(G)$ (car alors les 2 membres sont nuls).

<u>Définition de</u> $\theta(x)$: $\theta(x)$ est déjà défini sur $A(G)$; on va le définir sur $S^1(G)$, et on le prolongera en une dérivation (de degré 0) sur $W(G) = A(G) \otimes S(G)$. Or soit $x' \in A^1(G)$, et $\widetilde{x'} = h(x')$; posons

$$\theta(x).\widetilde{x'} = h(\theta(x).x') \text{ ; ceci définit } \theta(x) \text{ sur } S^1(G) .$$

Pour tout $\alpha \in W(G)$, on a alors

$$\theta(x).\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(\theta(x).\alpha) ,$$

parce qu'il en est ainsi lorsque α est dans $A(G)$ (relation (5)') , et lorsque α est un élément $\widetilde{x'}$ de $S^1(G)$:

$$\theta(x).\widetilde{f}(\widetilde{x'}) = \widetilde{f}(\theta(x).\widetilde{x'}) \text{ , comme on le vérifie aussitôt, grâce à (5)' .}$$

<u>Définition de l'opérateur différentiel</u> δ <u>de</u> $W(G)$. La relation

$$d(f(x')) = f(dx') + \widetilde{f}(\widetilde{x'}) \quad \text{conduit à poser}$$

(6) $$\delta x' = dx' + \widetilde{x'} = dx' + h(x') .$$

La relation

$$i(x)d.\widetilde{f}(\widetilde{x'}) = \theta(x).\widetilde{f}(\widetilde{x'}) = \widetilde{f}(\theta(x).\widetilde{x'}) \quad \text{conduit à poser}$$

(7) $$i(x).\delta\widetilde{x'} = \theta(x).\widetilde{x'} \text{ , ou, ce qui revient au même,}$$

(7)' $$\delta\widetilde{x'} = \sum_k x'_k \otimes \theta(x_k).\widetilde{x'} \quad ((x_k) \text{ et } (x'_k) \text{ étant 2 bases duales.})$$

Ayant ainsi défini δ sur $A^1(G)$ et sur $S^1(G)$, on le prolonge en une antidérivation (de degré +1) sur $W(G) = A(G) \otimes S(G)$. Les relations (6) et (7) permettent d'expliciter : appelons h l'antidérivation qui transforme $x' \in A^1(G)$ en $\widetilde{x'} \in S^1(G)$ et est nulle sur $S(G)$:

(8) $$h = \sum_k i(x_k)e(\widetilde{x'_k}) \quad (e(\widetilde{x'_k}) \text{ désigne la multiplication par } \widetilde{x'_k})$$

On voit que δ est somme de 3 antidérivations

(9) $$\delta = d_A + d_S + h ,$$

où d_A prolonge d sur $A(G)$ et est nulle sur $S(G)$, d_S prolonge δ sur $S(G)$ et est nulle sur $A(G)$. Introduisons $\theta_A(x)$, égal à $\theta(x)$ sur $A(G)$ et nul sur $A(G)$, et $\theta_S(x)$, égal à $\theta(x)$ sur $S(G)$ et nul sur $A(G)$; alors

(10) $$d_A = \frac{1}{2} \sum e(x'_k)\, \theta_A(x_k) \qquad \text{(d'après (4))}$$

(11) $$d_S = \sum e(x'_k)\, \theta_S(x_k) \qquad \text{(d'après (7)')} .$$

Les formules (8), (9), (10), (11) explicitent l'opérateur δ .
Pour tout $\alpha \in W(G)$, on a bien

$\bar{f}(\delta\alpha) = d(\bar{f}(\alpha))$, car c'est vrai si α est dans $A^1(G)$ ou dans $S^1(G)$, d'après (6) et (7) . Ainsi, $\bar{f}$ est compatible avec d et δ .

La relation analogue à (3) :

$$\theta(x) = i(x)\delta + \delta i(x)$$

a lieu sur $W(G)$. En effet, $i(x)h + hi(x) = 0$, $\theta_A(x) = i(x)d_A + d_A i(x)$, et $\theta_S(x) = i(x)d_S + d_S i(x)$.

De là, on déduit facilement que δ commute avec les $\theta(x)$.

Montrons enfin que δ est une différentielle : $\delta\delta = 0$. Il suffit de montrer que la dérivation $\delta\delta$ est nulle sur $A^1(G)$ et $S^1(G)$. Or, pour tout $x \in \mathfrak{A}(G)$, $i(x)\delta\delta = \delta\delta i(x)$ s'annule sur $A^1(G)$ et $S^1(G)$; il reste à montrer que la composante de $\delta\delta\, \tilde{x}'$ dans $S^2(G)$ est nulle ; or cela revient à l'identité

$$\sum_k e(\tilde{x}'_k)\ \theta_S(x_k) = 0 , \quad \text{ce qui est bien vérifié.}$$

On a ainsi défini l'algèbre de Weil $W(G)$ avec tous ses opérateurs $i(x)$, $\theta(x)$ et δ , qui satisfont à (1), (2) et (3) (où d serait remplacé par δ) ; δ est une différentielle, explicitée par les formules (8), (9), (10), (11). De plus, chaque fois qu'on a une connexion algébrique f dans une algèbre différentielle graduée E où opère un groupe G (satisfaisant à $vu = (-1)^{pq}uv$) , f se prolonge en un homomorphisme $\bar{f}$ de $W(G)$ dans E , compatible avec les graduations et tous les opérateurs.

En particulier, prenons pour E l'algèbre $A(G)$, f étant l'application identique de $A^1(G)$ dans $A^1(G)$; alors $\bar{f}$ est l'identité sur $A(G)$, et est nul sur $S^+(G)$ (on note $S^+(G)$ la somme des $S^p(G)$ pour $p \geq 1$) ; $\bar{f}$ identifie ainsi $A(G)$ au quotient de l'algèbre $W(G)$ par l'idéal engendré par $S^+(G)$; cette identification est compatible avec toutes les structures.

Remarque : si G est un groupe abélien, l'opérateur δ de l'algèbre de Weil se réduit à h .

7.- Classes caractéristiques (réelles) d'un espace fibré principal.

Soit de nouveau E l'algèbre des formes différentielles de l'espace $\mathcal{E}$, fibré principal de groupe G . Soit f une connexion ; d'où un homomorphisme $\bar{f}$ de $W(G)$ dans E , compatible avec tous les opérateurs. Les éléments basiques de $W(G)$ sont transformés par $\bar{f}$ dans des éléments de l'algèbre B des formes différentielles de l'espace de base $\mathcal{B}$. Or la sous-algèbre des éléments basiques de $W(G) = A(G) \otimes S(G)$ n'est autre que la sous-algèbre des éléments invariants de $S(G)$. On notera $I_S(G)$ cette sous-algèbre ; on n'oubliera pas que les éléments de $I_S^p(G)$ sont de degré $2p$. L'étude de la structure de $I_S(G)$ (algèbre des formes multilinéaires symétriques sur $\mathfrak{A}(G)$, invariantes par le groupe adjoint) sera faite dans l'exposé suivant.

La formule (11) montre : pour qu'un élément de $S(G)$ soit un cocycle (c'est-à-dire pour que son δ soit nul), il faut et il suffit qu'il soit invariant. Ici, $\bar{f}$ transforme donc les éléments de $I_S(G)$ dans des cocycles de B , c'est-à-dire des cocycles de l'espace de base. Ils sont de degrés pairs ; on les appelle les cocycles caractéristiques de la connexion. Ils forment une sous-algèbre de B , appelée la sous-algèbre caractéristique de B .

En passant des cocycles de B à leurs classes de cohomologie dans l'algèbre $H(B)$, on obtient un homomorphisme d'algèbres graduées

$$I_S(G) \longrightarrow H(B) \quad , \text{ qui applique } I_S^p(G) \text{ dans } H^{2p}(B) .$$

On verra dans un exposé ultérieur que cet homomorphisme est indépendant du choix de la connexion : c'est un invariant de la structure fibrée de l'espace $\mathcal{E}$. La sous-algèbre de $H(B)$, image de $I_S(G)$ par cet homomorphisme, s'appelle la sous-algèbre caractéristique de $H(B)$, ses éléments sont les classes caractéristiques de la structure fibrée.

8.- L'algèbre de Weil comme algèbre universelle.

Dans l'exposé suivant, on prouvera le théorème : la cohomologie de $W(G)$ est triviale. Cela signifie que $H^m(W(G)) = 0$ pour tout $m \geqslant 1$, $H^0(W(G))$ se réduisant au corps des scalaires. On a un théorème analogue pour la sous-algèbre $I_W(G)$ des éléments invariants de $W(G)$. Ce théorème vaut sans aucune hypothèse sur le groupe de Lie G .

Ceci est lié au rôle d'"algèbre universelle" que joue $W(G)$, du point de vue de l'homologie. L'algèbre $W(G)$ joue le rôle d'une algèbre de cochaînes d'un espace fibré qui serait classifiant (exposé 8, numéro 4) pour <u>tous</u> les espaces fibrés principaux de groupe G . L'algèbre $I_S(G)$ joue alors le rôle de l'algèbre de cohomologie de l'espace de base d'un tel espace classifiant (cf. cohomologie de la grassmannienne, lorsque G est le groupe orthogonal), et l'homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow H(B)$ correspond alors à l'homomorphisme de la cohomologie de la base de l'espace classifiant dans la cohomologie de la base de l'espace fibré étudié.