WEN-TSÜN WU

Les classes caractéristiques d'un espace fibré. II

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 18, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A17_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES D'UN ESPACE FIBRÉ, II.

(Exposé de WU WEN-TSÜN, le 8.5.1950)

1.- Classe de Steenrod d'un espace fibré.

Soit E un espace fibré localement trivial sur une base B connexe par arcs, avec projection p . Pour la fibre F nous supposerons une fois pour toutes :

(1) $\pi_0(F) = \dots = \pi_{h-1}(F) = 0$, $\pi_h(F) \neq 0$, $\pi_1(F)$ abélien pour $h=1$.

[cf. exposé 3. $\pi_0(F)$ = groupe d'homologie de F des cycles entiers de dimension 0 avec somme de coefficients nulle ; $\pi_0(F) = 0$ signifie que F est connexe.] Dans ces conditions la fibre est toujours simple dans la dimension h , au sens d'Eilenberg.

Considérons un lacet ℓ commencé et fini au point $x \in B$, dans un ouvert U assez petit pour que E soit trivial sur U . Il existe alors une projection q_U de cette partie de E sur U sur la fibre F_x . Une déformation de F_x au-dessus de ℓ à F_x déforme au même temps une sphère S_x dans F_x dans une sphère S'_x dans F_x . La projection q_U projette cette déformation suivant une déformation dans F_x de S_x à S'_x ; donc S_x et S'_x définissent le même élément du groupe d'homotopie de F_x . Il en résulte que, étant donné un chemin quelconque $\ell = \widehat{xy}$ dans la base B , on obtient un isomorphisme bien déterminé h_ℓ de $\pi_h(F_x)$ sur $\pi_h(F_y)$ en déformant la fibre F_x au-dessus de ℓ dans la fibre F_y . Cet isomorphisme h_ℓ ne dépende que de la classe d'homotopie de ℓ et de plus, $h_\ell h_{\ell'} = h_{\ell'\ell}$ pour $\ell = \widehat{xy}$ et $\ell' = \widehat{yz}$. Il en résulte que le système de groupes $\pi_h(F_x)$ et le système d'isomorphismes h_ℓ forment un système de groupes locaux dans B , soit $\mathcal{G}(E)$ ou $\mathcal{G}$ (Exposé X de 1948-49).

Supposons que la base B soit un polyèdre avec une subdivision K , dont le bord de chaque cellule est topologiquement une sphère. Dans chaque cellule σ prenons un point représentatif $o(\sigma)$ (arbitraire mais fixe une fois pour toutes). L'isomorphisme $h_\ell : \pi_h(F_{o(\sigma)}) \longrightarrow \pi_h(F_{o(\sigma')})$, $\sigma' < \sigma$, est alors indépendant du chemin $\ell = \widehat{o(\sigma)o(\sigma')}$ choisi dans $\bar{\sigma}$ tel qu'on peut le désigner par $h_{\sigma',\sigma}$. Par rapport au système $\mathcal{G}_K$ de groupes $\pi_h(F_{o(\sigma)})$ et d'isomorphismes $h_{\sigma',\sigma}$ définissons des cochaînes u^r de dimension r comme des fonctions sur σ^r avec $u^r(\sigma^r) \in \pi_h(F_{o(\sigma^r)})$ et l'opérateur de cobord par

$$\delta u^r(\sigma^{r+1}) = \sum_{(\sigma^r)} [\sigma^r : \sigma^{r+1}]\, h_{\sigma^r \sigma^{r+1}}(u^r(\sigma^r)) ,$$

où $[\sigma : \sigma']$ est le coefficient d'incidence de σ et σ' orientés. On a $\delta\delta = 0$ tel qu'on peut définir comme d'habitude les groupes de cohomologie $H^r(K, \mathcal{G}_K)$.

Une application φ d'une partie B' de B dans E est appelée une section dans E sur B' si $p\varphi$ = identité. Deux sections φ_0 et φ_1 sur B' sont F-homotopes s'il existe une application φ de $B' \times I$ dans E telle que

$$\varphi_0(x) = \varphi(x\times o) , \quad \varphi_1(x) = \varphi(x\times 1) \quad \text{et} \quad \varphi(x\times t) \in F_x , \text{ pour } x \in B' , t \in I .$$

Sous la condition (1) on peut alors démontrer, comme dans l'exposé 8 (théorème 5) :

<u>Proposition 1</u>.- (a) Il existe des sections dans E au-dessus du squelette K^h de K, de dimension h ; (b) Pour deux sections φ_0 et φ_1 sur K^h on peut trouver des sections φ'_0 et φ'_1 sur K^h, F-homotopes à φ_0 et φ_1 respectivement, telles que $\varphi_0 \equiv \varphi'_1 /K^{h-1}$.

Cela étant, considérons une section φ quelconque sur K^h. Pour chaque cellule orientée σ de dimension $h+1$ l'application $q_\sigma \varphi : \partial\sigma \longrightarrow F_{o(\sigma)}$ définit un élément $c_\varphi^{h+1}(\sigma)$ de $\pi_h(F_{o(\sigma)})$. (cf. exposé III, 2e partie). On obtient ainsi une cochaîne c_φ^{h+1} par rapport à $\mathcal{G}_K$. D'après cette définition, $c_\varphi^{h+1} = o$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une extension de section φ sur K^{h+1}. De plus, si φ est F-homotope à une section φ' sur K^h, on a $c_\varphi^{h+1} = c_{\varphi'}^{h+1}$.

Soient φ_0 et φ_1 deux sections sur K^h ; d'après la proposition 1 (b), elles sont homotopes respectivement aux sections φ'_0 et φ'_1 sur K^h, où $\varphi'_0 \equiv \varphi'_1/K^{h-1}$. Pour chaque cellule orientée σ^h, les applications $q_{\sigma^h}\varphi'_0$ et $q_{\sigma^h}\varphi'_1$ de σ^h dans $F_{o(\sigma^h)}$ qui coïncident sur $\partial\sigma^h$ définissent alors un élément $c^h_{\varphi'_0,\varphi'_1}(\sigma^h)$ de $\pi_h(F_{o(\sigma^h)})$ (Cf.Exp.3). On obtient ainsi une cochaîne c^h par rapport au $\mathcal{G}_K$.

<u>Lemme</u> : Si δ est l'opérateur de cobord du système $\mathcal{G}_K$, on a

$$\delta c_\varphi^{h+1} = o , \qquad \delta c^h_{\varphi'_0,\varphi'_1} = c^{h+1}_{\varphi_0} - c^{h+1}_{\varphi_1} . \qquad \text{(cf. 3, lemme 3).}$$

De plus, étant données φ et $c^{h+1} \in C^{h+1}(K, \mathcal{G}_K)$ homologue à c_φ^{h+1}, on peut trouver une section φ' sur K^h telle que $c_{\varphi'}^{h+1} = c^{h+1}$.

Pour le démontrer, considérons une cellule σ^{h+2} quelconque et soit L le complexe $|\sigma^{h+2}|$. L'obstruction de l'application $q_{\sigma^{h+2}}\varphi : L^h \to F_{o(\sigma^{h+2})}$ est alors une cochaîne $\bar{c}^{h+1}$ dans L qui prend ses valeurs dans $\pi_h(F_{o(\sigma^{h+2})})$.

La restriction du système $\mathcal{G}_K$ au complexe L étant un système "simple" dans L , la restriction de c_φ^{h+1} à L correspond à une cochaîne ordinaire dans L , qui n'èst autre que la cochaîne $\bar{c}^{h+1}$. Par conséquent on a $\hat{\delta} c_\varphi^{h+1}(\sigma^{h+2}) = \bar{\delta}\, \bar{c}^{h+1}(\sigma^{h+2})$, où $\bar{\delta}$ est l'opérateur de cobord dans L au sens ordinaire. D'après l'exposé 3 ("théorie d'Eilenberg"), $\bar{c}^{h+1}$ est un cocycle (ordinaire) dans L , par conséquent $\hat{\delta} c_\varphi^{h+1}(\sigma^{h+2}) = o$. La cellule σ^{h+2} étant quelconque, on a $\hat{\delta} c_\varphi^{h+1} = o$. L'autre formule du lemme est démontrée de la même façon.

Du lemme précédent on déduit ainsi :

<u>Théorème 1</u>.- (Steenrod.) Les cochaînes c_φ^{h+1} sont des cocycles par rapport au système $\mathcal{G}_K$ (cocycles d'obstruction) dont la classe $C^{h+1} \in H^{h+1}(K , \mathcal{G}_K)$ est indépendante de la section φ sur K^h . La condition $C^{h+1} = o$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section au-dessus de K^{h+1} .

Pour l'invariance topologique de C^{h+1} ainsi que la définition de classe de Steenrod dans le cas où la base B est un espace quelconque cf.[2]. Tout ce qui est dit dans cet exposé s'étend alors aux espaces fibrés sur une base quelconque. Cela étant, on a

<u>Théorème 2</u>.- Si f^*E est l'image réciproque sur B' de l'espace fibré E sur B par une application $f : B' \longrightarrow B$, on a $C^{h+1}(f^*E) = f^*C^{h+1}(E)$.

2.- <u>Classes de Stiefel-Whitney d'un espace fibré en sphères.</u>

Considérons maintenant le cas particulier où la fibre est une sphère S de dimension n-1 , le groupe structural étant le groupe orthogonal O(n) . On peut alors parler de deux points <u>orthogonaux</u> sur la même fibre S_x . A l'espace fibré donné E on peut associer un système d'espaces fibrés $E^{(k)}$, $k = 1 , 2 , \dots n$ $(E^{(n)} = E)$, ayant pour fibres :

$V_{n-k+1,n}$ = variété de Stiefel des suites de (n-k+1)-vecteurs orthonormés dans R^n $(V_{n,n} = O(n))$.

On a

$$\pi_i(V_{n-k+1,n}) = o , \quad 0 < i < k-1 ;$$

$$\pi_{k-1}(V_{n-k+1,n}) \approx \begin{cases} Z_o , & k \text{ impair ou } k = n \\ Z_2 , & k \text{ pair} \neq n . \end{cases}$$

En tous cas la classe de Steenrod de $E^{(k)}$ est bien définie, soit $W^k \in H^k(B , \mathcal{G}^{(k)})$, où $\mathcal{G}^{(k)} = \left\{\pi_{k-1}(V_{n-k+1,n,(x)}) , h_\ell^{(k)}\right\}$. Cette classe est appelée la <u>classe de Stiefel-Whitney</u> de dimension k de l'espace fibré E ,

$k = 1, \dots n$. Remarquons que le groupe structural $O(n)$ ne joue aucun rôle dans la définition de W^n mais est essentiel pour définir les autres W^k.

Les homomorphismes canoniques de $\pi_{k-1}(V_{n-k+1,n})$ ($\approx Z_0$ ou Z_2) sur Z_2 induisent d'une manière évidente des homomorphismes $\rho : H^i(B, \mathcal{G}^{(k)}) \longrightarrow H^i(B, Z_2)$. Les classes ρW^k seront appelées <u>les classes réduites de Stiefel-Whitney</u>.

Les systèmes $\mathcal{G}^{(k)}$ pour k impair et $k = n$ sont isomorphes entre eux. En effet, ils sont tous isomorphes à un système (défini à un isomorphisme près) $\mathcal{Z} = \{Z_{o,(x)}, h_\ell\}$ défini de la manière suivante : Posons $Z_{o,(x)} = Z_o$; pour chaque point $x \in B$ prenons une orientation (arbitraire mais fixe une fois pour toutes) de la fibre sphère S_x ; pour $\ell = \widehat{xy}$, h_ℓ sera l'isomorphisme de $Z_{o,(x)}$ sur $Z_{o,(y)}$ qui applique l'élément $+1$ de $Z_{o,(x)}$ sur l'élément $+1$ ou -1 de $Z_{o,(y)}$ selon que, si l'on déforme la sphère S_x à la sphère S_y au-dessus de ℓ, les deux orientations de S_x et S_y vont coïncider ou non.

La remarque précédente donne une simplification pour l'étude des classes W^k lorsque B est un polyèdre avec une subdivision K avec coefficients d'incidence $[\sigma : \sigma']$: Considérons un complexe K' avec mêmes cellules que K mais des coefficients d'incidence éventuellement différents : $[\sigma : \sigma']' = \varepsilon[\sigma : \sigma']$, où $\varepsilon = +1$ ou -1 selon que h_ℓ applique l'élément $+1$ de $Z_{o,o(\sigma)}$ sur l'élément $+1$ ou -1 de $Z_{o,o(\sigma')}$, où ℓ est un arc dans $\bar{\sigma}$ ($\sigma' < \sigma$). Disons que K' est un complexe <u>localement isomorphe</u> à K. On peut alors considérer les classes $W^k(E)$ non comme des classes "locales" dans le complexe K, mais comme des classes "ordinaires" dans le complexe K' —— C'est ce qu'a fait Whitney.

<u>Théorème 3</u>.- Pour k impair $2W^k = o$.

Nous dirons que l'espace fibré E est <u>orientable</u> si les systèmes $\mathcal{G}^{(k)}$ sont simples, ou, intuitivement, si l'on peut orienter continûment les fibres sphères sur toute la base B. On a alors :

<u>Théorème 4</u>.- Une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace fibré soit orientable est que $\rho W^1(E) = o$.

Dans le premier exposé nous avons introduit pour un espace fibré E de groupe structural $O(n)$ un système de classes mod 2, $\mathcal{W}^k(E)$, $k = 1, \dots n$, comme les images inverses des classes $\mathcal{W}^k = \{\{\underbrace{o \dots o}_{n-k}\underbrace{1 \dots 1}_{k}\}\}$ de la var. gr. $G_{n,N}$. Dans le cas où la fibre est la sphère de dimension $n-1$, on peut identifier ces classes avec les classes réduites de Stiefel-Whitney :

Théorème 5.- $\rho W^k(E) = \mathfrak{W}^k(E)$, $k = 1, \ldots n$.

Ce théorème est dû à Pontrjargin. Nous indiquons sa démonstration comme suit : Considérons l'espace fibré $\mathcal{E}$, de base $G_{n,N}$ dont la fibre au-dessus d'un élément $X \in G_{n,N}$ est la sphère unité dans cet élément. Soient W^k les classes de Stiefel-Whitney de $\mathcal{E}$. D'après le théorème 2, il suffit de démontrer $\rho W^k = \{\{\underbrace{o \ldots o}_{n-k}\underbrace{1 \ldots 1}_{k}\}\}$, $k = 1, \ldots n$. Pour cela prenons dans R^{N+n} un système de $n-k+1$ vecteurs orthonormés $e_1, \ldots e_{n-k+1}$. Pour chaque élément $X \in G_{n,N}$ soit x_i la projection orthogonale de e_i sur X . Les vecteurs x_i dans X sont linéairement dépendants si et seulement si $\dim (X \cap R^{N+k-1}) \geq k$, où R^{N+k-1} est l'élément orthogonal aux vecteurs e_i . D'après l'exposé précédent, les éléments X satisfaisant à cette condition forment une pseudo-variété $v_k = [\underbrace{N-1 \ldots N-1}_{k} \ \underbrace{N \ldots N}_{n-k}]^*$ de dimension $nN-k$ dont la classe de cohomologie duale est la classe $\mathfrak{W}^k$. Pour X non $\in v_k$ on peut alors "orthonormaliser" les vecteurs x_i dans X tels qu'on obtienne un système Φ de $n-k+1$ sections orthonormées dans $\mathcal{E}$ sur $G_{n,N}-v_k$. Prenons maintenant une subdivision simpliciale K' de $G_{n,N}$ telle que v_k soit un sous-complexe L' de K' . Soit K la subdivision duale de K' . Le système Φ définit dans K un cocycle d'obstruction $w^k \in W^k$. Ce qui reste à vérifier est alors que ρw^k est dual au cycle mod 2 porté par la pseudo-variété v_k .

BIBLIOGRAPHIE

[1] STEENROD, Annals of Math., 44 (1943) p.610-627.

[2] STEENROD, Annals of Math., 43 (1942) p.116-131.

[3] STIEFEL, Comm. Math. helvetici, 8 (1936) p.305-343.

[4] WHITNEY, Proc. nat. Acad. Sci., U.S.A., 26 (1940) p.143-153 ; Michigan Lectures, (1941) p.114-126.

[5] PONTRJAGIN, C.R.Acad. Sci., URSS, 35 (1942) p.34-37 (Théorème 3).