SÉMINAIRE HENRI CARTAN

WEN-TSÜN WU

Les classes caractéristiques d'un espace fibré. I : cohomologie des grassmanniennes

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. nº 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A16_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50

LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES D'UN ESPACE FIBRÉ

I : cohomologie des grassmanniennes.

(Exposé de WU WEN-TSÜN, le 24.4.1950)

Pour simplifier nous appellerons n-élément, dans un espace euclidien, toute variété linéaire de dimension n passant par l'origine. Soit $G_{n,N}$ la variété grassmannienne des n-éléments de l'espace euclidien R^{N+n}. D'après 8 (théorème 6) et 10 (théorème 2), $G_{n,N}$ est un espace classifiant (pour la dimension $N-1$) pour le groupe orthogonal $O(n)$, c'est-à-dire : les classes d'espace fibrés, localement triviaux, de groupe structural $O(n)$ sur un espace de base B, localement compact, paracompact, et de dimension $\leq N-1$, correspondent biunivoquement aux classes d'homotopie des applications f de B dans $G_{n,N}$. Les éléments de $f^{*}H^{*}(G_{n,N})$, pour un groupe de coefficients quelconques, sont ainsi des invariants de la structure fibrée correspondant à la classe d'homotopie de f ; on les appelle les <u>classes grassmanniennes</u> de cette structure. Pour étudier les propriétés et les relations entre ces divers classes grassmanniennes, ce qui constitue un premier pas vers le problème central de classification des espaces fibrés sur une base B donnée, il faut étudier d'abord la structure d'homologie de la variété $G_{n,N}$ elle-même. La structure additive de l'anneau $H^{*}(G_{n,N})$ a été essentiellement résolue avant la création de la théorie des espaces fibrés par M. Ehresmann, qui a donné une "subdivision cellulaire" de la variété $G_{n,N}$ de la manière suivante :

Prenons dans R^{N+n} une fois pour toutes une suite croissante $(\mathcal{K})$ de i-éléments K^{i} :

$$(\mathcal{K}) \qquad K^{1} \subset K^{2} \subset \ldots \subset K^{N+n-1} \subset K^{N+n} = R^{N+n} \quad .$$

Pour chaque suite d'entiers $a_1, \ldots, a_n$ telle que

$$(1) \qquad 0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq N \quad ,$$

l'ensemble des éléments $X \in G_{n,N}$ vérifiant les conditions de Schubert

$$(2) \qquad \dim (X \cap K^{a_i+i}) \geq i \quad , \qquad i = 1, \ldots, n \, ,$$

forme une pseudo-variété que nous désignerons par le symbole de Schubert $[a_1 \ldots a_n]^{*}$. Remarquons que les conditions ne sont pas en général indépendantes, par exemple, elles se réduisent aux conditions plus simples pour les pseudo-variétés dans le tableau suivant :

$$[N \dots N]^* = G_{n,N} \qquad \text{sans condition}$$

(3) $$[\underbrace{N-1 \dots N-1}_{k} \ \underbrace{N \dots N}_{n-k}]^* \qquad \dim (X \cap K^{N+k-1}) \geqslant k$$

$$[N-k \ \underbrace{N \dots N}_{n-1}]^* \qquad \dim (X \cap K^{N-k+1}) \geqslant 1$$

D'après (2), la pseudo-variété $[a_1 \dots a_i-1 \dots a_n]^*$, si elle est bien définie, est un sous-ensemble de la pseudo-variété $[a_1 \dots a_n]^*$. L'ensemble

$$[a_1 \dots a_n] = [a_1 \dots a_n]^* - \sum_i [a_1 \dots a_i-1 \dots a_n]^* \ ,$$

en négligeant les termes dans la somme n'ayant aucun sens, est alors une "cellule ouverte" homéomorphe à une boule ouverte de dimension $\sum a_i$. On peut démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> (Ehresmann).-

(a) L'ensemble des cellules ouvertes $[a_1 \dots a_n]$ forme une subdivision cellulaire de la variété $G_{n,N}$;

(b) Les chaînes $[a_1 \dots a_n]$ sont des cycles mod 2 de $G_{n,N}$ représentés géométriquement par les pseudo- variétés $[a_1 \dots a_n]^*$;

(c) Les classes $[\![a_1 \dots a_n]\!]$ de $[a_1 \dots a_n]$ forment une base additive de l'anneau d'homologie mod 2 $H_*(G_{n,N}, Z_2)$.

Dans ce qui suit le groupe des coefficients sera exclusivement Z_2.

Une remarque : nous avons défini les cycles $[a_1 \dots a_n]$ à partir d'une suite $(\mathcal{K})$, or les <u>classes</u> $[\![a_1 \dots a_n]\!]$ n'en dépendent pas.

Le groupe Z_2 étant un corps, le groupe $H^p(G_{n,N})$, qui est par définition le groupe des homomorphismes de $H_p(G_{n,N})$ dans Z_2, est isomorphe à $H_{nN-p}(G_{n,N})$, où $nN = \dim G_{n,N}$. Nous désignerons par $\{\!\{a_1 \dots a_n\}\!\}$, $\sum a_i = p$, la classe de $H^p(G_{n,N})$ définie par

$$\{\!\{a_1 \dots a_n\}\!\} \ ([\![b_1 \dots b_n]\!]) = [\![N-a_n \dots N-a_1]\!] \ [\![b_1 \dots b_n]\!] \ , \ \sum a_i = \sum b_i \ .$$

En particulier, $\{\!\{0 \dots 0\}\!\} = 1$, la classe unité de $G_{n,N}$.

Parmi les éléments $\{\!\{a_1 \dots a_n\}\!\}$ de $H^*(G_{n,N})$, les classes

$\{\!\{\underbrace{0 \dots 0}_{n-k}\underbrace{1 \dots 1}_{k}\}\!\}$, $k = 1 , \dots , n$, ont un intérêt particulier, car on verra que ces éléments engendrent l'anneau $H^*(G_{n,N})$. Pour les structures fibrées sphériques de groupe structural $O(n)$, les classes grassmanniennes correspondantes seront identifiées, dans le second exposé, aux classes de Stiefel-Whitney, réduites éventuellement mod 2 , définies par l'obstruction dans divers structures fibrées associées à la structure donnée. Nous adoptons donc les notations classiques :

$$W^k = \{\{\underbrace{0 \ldots 0}_{n-k}\underbrace{1 \ldots 1}_{k}\}\} \quad , \qquad k = 1 , \ldots , n .$$

Nous posons aussi

$$\bar{W}^h = \{\{\underbrace{0 \ldots 0}_{n-1}h\}\} \quad , \qquad h = 1 , \ldots , N .$$

$$W^o = \bar{W}^o = \{\{0 \ldots 0\}\} = 1 .$$

Avant de déterminer la structure multiplicative de l'anneau $H^*(G_{n,N})$, considérons d'abord quelques applications canoniques des variétés grassmanniennes comme suit :

Soit $G_{N,n}$ (homéomorphe à $G_{n,N}$) la var. gr. des N-éléments de R^{N+n} . Pour $X \in G_{n,N}$, soit $f(X) = Y$ l'élément de $G_{N,n}$ complètement orthogonal à X . On obtient ainsi une application $f : G_{n,N} \longrightarrow G_{N,n}$. Définissons la subdivision cellulaire de $G_{n,N}$ par rapport à la suite $(\mathcal{K})$ et celle de $G_{N,n}$ par rapport à la suite

$$(\mathcal{L}) \qquad L^1 \subset \ldots \subset L^{N+n-1} \subset L^{N+n} = R^{N+n} \quad ;$$

les deux suites sont supposées vérifier les conditions suivantes :

$$(4) \qquad K^r \text{ et } L^{N+n-r} \text{ sont complètement orthogonales, } r=1,\ldots N+n-1 .$$

Les cycles, etc. de $G_{N,n}$ seront distingués de ceux de $G_{n,N}$ en ajoutant un prime. Il est évident que les deux conditions

$$\dim (X \cap K^{N+k-1}) \geqslant k \quad , \qquad \dim (X \cap K^{N-k+1}) \geqslant 1$$

sont respectivement équivalentes à $(f(X) = Y)$:

$$\dim (Y \cap L^{n-1+k}) \geqslant 1 \quad , \qquad \dim (Y \cap L^{n+k-1}) \geqslant k .$$

Par conséquent (cf. (3))

$$f\,[\underbrace{N-1 \ldots N-1}_{k}\ \underbrace{N \ldots N}_{n-k}] \sim [n-k\ \underbrace{n \ldots n}_{N-1}]' \quad ,$$

$$f\,[N-k\ \underbrace{N \ldots N}_{n-1}] \sim [\underbrace{n-1 \ldots n-1}_{n-k}\ \underbrace{n \ldots n}_{k}]' \quad .$$

f étant un isomorphisme de l'anneau $H_*(G_{n,N})$ sur $H_*(G_{N,n})$, on peut en déduire :

$$f^* \{\{\underbrace{0 \ldots 0}_{N-1}k\}\}' = \{\{\underbrace{0 \ldots 0}_{n-k}\underbrace{1 \ldots 1}_{k}\}\} ,$$

$$f^* \{\{\underbrace{0 \ldots 0}_{N-k}\underbrace{1 \ldots 1}_{k}\}\}' = \{\{\underbrace{0 \ldots 0}_{n-1}k\}\} ,$$

On a donc :

Proposition 1.- $f^* W'^h = \bar{W}^h$, $h = 1 , \ldots , N$; $f^* \bar{W}'^k = W^k$, $k=1,\ldots n$.

Soit maintenant $N' > N$ et $R^{N'+n} \supset R^{N+n}$. On peut alors considérer $G_{n,N}$ comme une sous-variété de la variété grassmannienne $G_{n,N'}$ des n-éléments dans $R^{N'+n}$. Soit g l'application identique correspondante. Les cycles, etc. de $G_{n,N'}$ seront distingués de ceux de $G_{n,N}$ en ajoutant un prime. On a alors, comme précédemment,

$$g^* \{\{a_1 \ldots a_n\}\}' = \{\{a_1 \ldots a_n\}\} .$$

Il en résulte que, si une structure fibrée au groupe structural $O(n)$ sur une base B correspond à l'application $f : B \longrightarrow G_{n,N}$ ou $f' : B \longrightarrow G_{n,N'}$, on aura $f' \simeq gf$ et $f'^* \{\{a_1 \ldots a_n\}\}' = f^* \{\{a_1 \ldots a_n\}\}$. C'est-à-dire : les classes grassmanniennes définies comme l'image réciproque des classes de la variété grassmannienne $G_{n,N}$ ne dépendent de N qu'en apparence.

Théorème 2 (Chern).- L'anneau $H^*(G_{n,N})$ est engendré par les classes W^k , $k = 1 , \ldots , n$, c'est-à-dire : toute classe grassmannienne (mod 2) est un polynome en W^k par les $\cup$-produits.

Ce théorème résulte des formules de multiplication suivantes :

$$\{\{a_1 \ldots a_n\}\} \cup \{\{0 \ldots 0h\}\} = \sum e_{b_1 \ldots b_n} \{\{b_1 \ldots b_n\}\} , \quad h=1,\ldots N , \tag{5}$$

où la sommation s'étend à toutes les classes $\{\{b_1 \ldots b_n\}\}$ avec $\sum a_i + h = \sum b_i$ et

$$e_{b_1 \ldots b_n} = \begin{cases} 1 , & \text{pour } a_i \leq b_i \leq a_{i+1} \; (a_{n+1}=N), \; i=1,\ldots n ; \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases} \tag{6}$$

En effet, arrangeons les classes de $G_{n,N}$ dans un ordre lexicographique $\prec$ tel que $\{\{r_1 \ldots r_n\}\} \prec \{\{s_1 \ldots s_n\}\}$ si $r_1 = s_1 \ldots r_i = s_i$, $r_{i+1} < s_{i+1}$. La classe d'ordre le plus petit $\{\{0 \ldots 01\}\}$, étant elle-même une classe W^h , supposons que toutes les classes d'ordre inférieur à la classe

$\{\{a_1 \ldots a_n\}\}$ soient des polynomes par rapport aux classes $\bar{W}^h$ par le $\cup$-produit. La formule (5) donne alors

$$\{\{a_1 \ldots a_n\}\} = \{\{0a_2 \ldots a_n\}\} \cup \{\{0 \ldots 0a_1\}\} + \sum e_{b_1 \ldots b_n} \{\{b_1 \ldots b_n\}\} ,$$

où toutes les classes figurant dans le côté droit sont, d'après (6), d'un ordre inférieur à la classe $\{\{a_1 \ldots a_n\}\}$, et par conséquent cette dernière est aussi un polynome par rapport aux $\bar{W}^h$. On déduit ainsi de (5) et (6) par induction que l'anneau $H^*(G_{n,N})$ est engendré par les classes $\bar{W}^h$, $h=1,\ldots N$, en nombre N .

Soient $\bar{W}'^k$, $k = 1,\ldots,n$, en nombre n , les classes correspondantes de la variété $G_{N,n}$. Ce qui précède montre que l'anneau $H^*(G_{N,n})$ est engendré par $\bar{W}'^k$. Les deux variétés $G_{n,N}$ et $G_{N,n}$ étant homéomorphes, dans l'homéomorphisme défini par l'application canonique $f : G_{n,N} \longrightarrow G_{N,n}$, on déduit de la proposition 1 que l'anneau $H^*(G_{n,N})$ est engendré par les classes W^k , $k = 1 , \ldots n$, en nombre n , ce qui démontre le théorème 2.

Il en résulte qu'on peut exprimer les n classes W^k à l'aide des N classes $\bar{W}^h$ et réciproquement, ce qui revient à résoudre les équations suivantes, comme on le vérifie directement :

<u>Proposition 2</u>.- $\sum_{(h+k=r)} \bar{W}^h \cup W^k = 0$, $r > 0$.

Pour démontrer le théorème 2, il suffit donc de démontrer la formule de multiplication générale (5), qui est équivalente par dualité à la formule

$$(7) \quad [N-a_n \ldots N-a_1].[N-h\ N \ldots N] \sim \sum e_{b_1 \ldots b_n} [N-b_n \ldots N-b_1] .$$

D'autre part, la multiplication pour les classes de dimensions complémentaires a été déterminée depuis longtemps par Ehresmann :

$$(8) \quad \begin{aligned} &[a_1 \ldots a_n] . [N-a_n \ldots N-a_1] = 1 , \\ &[a_1 \ldots a_n] . [b_1 \ldots b_n] = 0 \text{ autrement, où } \textstyle\sum a_i + \sum b_i = nN . \end{aligned}$$

En faisant l'intersection avec $[b_1 \ldots b_n]$ des deux côtés de (7), (5) est ainsi équivalent au système d'équations :

$$(9) \quad [N-a_n \ldots N-a_1] . [N-h\ N \ldots N] . [b_1 \ldots b_n] = e_{b_1 \ldots b_n} .$$

En remarquant que la pseudo-variété $[N \ldots N]$ coïncide avec la variété $G_{n,N}$ tout entière, on voit que la formule (8) est un cas particulier de (9) et (6), correspondant à $h = 0$. Pour démontrer le théorème 2, il ne faut donc plus que ces dernières formules à démontrer.

Le principe de la démonstration est comme suit :

Définissons les pseudo-variétés $[N-a_n \dots N-a_1]^*$, $[b_1 \dots b_n]^*$ et $[N-h\ N \dots N]^*$ par rapport aux diverses suites telles qu'elles soient en position générale. Il n'y a alors qu'un nombre fini d'éléments isolés communs à toutes les trois pseudo-variétés dont on peut déterminer les indices d'intersection. Pour les détails cf. le mémoire original de Chern [5].

Nous allons maintenant démontrer :

<u>Théorème 3</u>.- Il n'existe aucune relation générale non-triviale par $\cup$-produits entre les classes grassmanniennes W^k, $k = 1, \dots n$ pour les structures fibrées de groupe structural $O(n)$.

Cela veut dire que, étant donné un polynome $F_p(x_k)$ quelconque en variables $x_1 \dots x_n$, à coefficients dans Z_2, non identiquement 0, et de <u>poids</u> p, (ce qui veut dire que pour chaque terme $x_{i_1} \dots x_{i_r}$ de $F_p(x_k)$ dont le coefficient n'est pas nul, on a $i_1 + \dots + i_r = p$), on peut toujours trouver un espace et une structure fibrée de groupe structural $O(n)$ pour laquelle $F_p(W^k) \neq 0$ (avec les $\cup$-produits comme multiplication).

Pour le démontrer, soient W^k les classes dans la variété $G_{n,N}$, et $\bar{W}'^k$ celles de $G_{N,n}$, où $N \geq p$. Ecrivons chaque terme non-nul de $F_p(\bar{W}'^k)$ sous la forme $\bar{W}'^{i_1} \dots \bar{W}'^{i_r}$ avec $0 < i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n$,

$i_1 + \dots i_r = p$ et arrangeons les termes dans un ordre $\lll$ tel que $\bar{W}'^{i_1} \dots \bar{W}'^{i_r} \lll \bar{W}'^{j_1} \dots \bar{W}'^{j_s}$ si $r < s$ ou $r = s$, $i_1 = j_1, \dots i_t = j_t$, $i_{t+1} < j_{t+1}$.

D'après les formules (5), (6), on peut exprimer chaque terme $\bar{W}'^{i_1} \dots \bar{W}'^{i_r}$ comme une somme de classes $\{\{a_1 \dots a_n\}\}'$ dont le plus grand d'après l'ordre $\prec$ introduit précédemment est la classe $\{\{\underbrace{0 \dots 0}_{N-r} i_1 \dots i_r\}\}$. Il en résulte que pour un F_p non identiquement nul, il y a au moins un terme non nul dans l'expansion de F_p, à savoir la classe $\{\{\underbrace{0 \dots 0}_{N-r} i_1 \dots i_r\}\}$ pour laquelle le terme $\bar{W}'^{i_1} \dots \bar{W}'^{i_r}$ est le plus grand dans l'ordre $\lll$. L'élément $F_p(\bar{W}'^k)$ est alors un élément non nul de $H^*(G_{N,n})$. D'après la proposition 1, on voit donc que $F_p(W^k)$ est aussi un élément non nul de $H^*(G_{n,N})$.

Par conséquent, $F_p(x_k)$ étant donné à l'avance, on peut toujours choisir un entier $N \geq p$; l'espace fibré canoniquement défini sur la variété $G_{n,N}$ nous fournit alors un exemple pour lequel $F_p(W^k) \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

Montrons enfin une autre application de la proposition 1 . Soit M une variété différentiable de dimension n différentiablement plongée dans un espace euclidien R^{N+n} . On peut alors associer deux structures fibrées, resp. de groupes structuraux $O(n)$ et $O(N)$ sur M comme base, à savoir une structure tangente et une structure normale. Pour chaque point x de M , soient X le n-élément parallèle à l'espace tangent de M au point x ; les deux structures fibrées correspondent alors respectivement aux applications $g : x \longrightarrow X$ et fg , où $f : G_{n,N} \longrightarrow G_{N,n}$ est l'application canonique de la proposition 1 . En désignant par W_T^k , $\bar{W}_T^h$ les classes grassmanniennes de la structure tangente et par W_N^h , $\bar{W}_N^k$ celles de la structure normale, on déduit de la proposition 1 :

Théorème 4 (Théorème de dualité de Whitney).-

$$W_T^k = \bar{W}_N^k \quad , \quad k = 1 , \dots n \ ;$$
$$\bar{W}_T^h = W_N^h \quad , \quad h = 1 , \dots N \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] WHITNEY, Proc. nat. Acad. Sci.,U.S.A.,21 (1935) p.64-68.

[2] STIEFEL, Comm. Math. helvetici, 8 (1936) p.305-343.

[3] WHITNEY, Bull. amer. Math. Soc., 43 (1937) p.785-805.

[4] STEENROD, Annals of Math., 45 (1944) p.294-311.

[5] CHERN, Annals of Math., 49 (1948) p.362-372.

[6] WHITNEY, Proc. nat. Acad. Sci., U.S.A., 26 (1940) p.143-153 ; Michigan Lectures, (1941) p.133.

[7] EHRESMANN, J. de Math. pures et appl., 102 (1937) p.69-100.

[8] PONTRJAGIN, C.R. Acad. Sci., URSS, 35 (1942) p.34-37.

Pour l'introduction de la notion de classes de Stiefel-Whitney, cf. [1], [2]. La définition générale des classes caractéristiques comme images réciproques des classes dans les variétés grassmanniennes est due à Pontrjagin, cf.[8].

Pour le théorème de Steenrod-Whitney cf. [3], [4].

Pour l'homologie des variétés grassmanniennes, cf. [7], [8].

Pour la structure multiplicative de $H^*(G_{n,N})$ mod 2, cf. [5].

Pour le théorème de dualité de Whitney, cf. [6].