H. Cartan

Carrés de Steenrod, I

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. nº 14, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A14_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

CARRÉS DE STEENROD, I.

(Exposé de H. CARTAN, le 13.3.1950).

Bibliographie : N. E. Steenrod, Products of cocycles and Extensions of Mappings, Annals of Math., 48, 1947, p. 290-320).

1.- Rappel sur les cochaînes d'Alexander d'un espace localement compact.

Dans ce premier exposé, la théorie des carrés de Steenrod, pour un espace topologique (loc. compact, éventuellement paracompact) sera faite dans le cadre des cochaînes et de la cohomologie de Čech-Alexander (cf. exposé 6 de 1948-49).

Soit d'abord E un ensemble abstrait (sans structure topologique). Pour tout groupe abélien G, le groupe $C^m(E, G)$ des cochaînes de degré m, à valeurs dans G, n'est autre que l'ensemble des fonctions $f(x_0, \dots, x_m)$ de $m+1$ variables de E, à valeurs dans G, ensemble dans lequel une addition est définie de façon évidente. Le cobord δf d'une cochaîne f de degré m est la cochaîne de degré $m+1$ définie par

$$\delta f(x_0,\dots,x_{m+1}) = f(x_1,\dots,x_{m+1}) - f(x_0,x_2,\dots,x_{m+1}) + \dots + (-1)^{m+1} f(x_0,\dots,x_m) .$$

On a $\delta\delta f = 0$. L'opérateur cobord δ définit un groupe de cohomologie $H^m(E, G)$ pour chaque degré m, et ce groupe est d'ailleurs nul pour $m \geq 1$.

Supposons de plus donnée une application bilinéaire φ de $G \times G$ dans un groupe abélien G' (on pourrait, plus généralement, faire intervenir 3 groupes, mais c'est sans intérêt pour la suite) ; on définit alors le "produit" $p(f, g)$ de 2 cochaînes f et g, de degrés m et n, comme la cochaîne de degré $m+n$ donnée par la formule

$$(1) \quad p(f,g).(x_0, \dots, x_{m+n}) = \varphi(f(x_0, \dots, x_m), g(x_m, \dots, x_{m+n})) .$$

On a alors la formule fondamentale

$$(2) \quad \delta p(f, g) = p(\delta f, g) + (-1)^m p(f, \delta g) .$$

Si maintenant E est le support d'une structure topologique, on définit le support d'une cochaîne f (de degré m) comme étant l'ensemble fermé $\sigma(f)$ que voici : on identifie E à la diagonale de $E \times E \times \dots \times E = E^{m+1}$, f à une fonction définie dans E^{m+1}, et le support est le complémentaire (dans la diagonale) de l'ensemble des points de la diagonale au voisinage desquels f est identiquement nulle. Il est évident que

$\sigma(\delta f) \subset \sigma(f)$, et $\sigma(p(f, g)) \subset \sigma(f) \cap \sigma(g)$.

Il en résulte ceci : soit $\check{C}^m(E, G)$ le quotient du groupe $C^m(E, G)$ par le sous-groupe des cochaînes de support vide, et définissons de même $\check{C}^m(E, G')$; alors les opérations $f \to \delta f$ et $(f, g) \to p(f, g)$ passent au quotient, et satisfont encore à la condition (2). Cette fois, les groupes de cohomologie $\check{H}^m(E, G)$ et $\check{H}^m(E, G')$ ne sont plus nuls, en général : ce sont les groupes de cohomologie (de Čech-Alexander) de l'espace E ; en outre, grâce à la relation (2), les produits $p(f, g)$ définissent des applications bilinéaires ("cup-product")

$$\check{H}^m(E, G) \times \check{H}^n(E, G) \to \check{H}^{m+n}(E, G') .$$

2.- Les produits de Steenrod.

Dans les groupes de cochaînes $\check{C}(E, G)$ et $\check{C}(E, G')$ on va définir toute une série de produits, généralisant le produit p défini ci-dessus. Pour cela, il suffira de les définir dans les groupes $C(E, G)$ et $C(E, G')$ de cochaînes de l'ensemble abstrait E , puis de vérifier une propriété des supports de ces produits, pour obtenir lesdits produits après passage au quotient.

L'application bilinéaire $\varphi : G \times G \to G'$ est supposée donnée une fois pour toutes. Pour chaque entier $i \geq 0$, on va définir une application bilinéaire p_i qui applique

$$C^m(E, G) \times C^n(E, G) \quad \text{dans} \quad C^{m+n-i}(E, G')$$

(on introduira aussi p_i pour $i < 0$, en convenant que $p_i = 0$ pour $i < 0$). Le produit p_o ne sera autre, par définition, que le produit p défini au paragraphe 1, et qui a conduit au "cup-product". Cela fait, on établira une formule fondamentale (ci-dessous, formule (I)) généralisant la formule (2), après quoi on verra dans quelle mesure cette formule permet de faire passer les opérations p_i à la cohomologie.

Voici une première définition, approximative, de $p_i(f, g)$ pour deux cochaînes f (de degré m) et g (de degré n) :

(3) $p_i(f, g).(x_o, \ldots, x_{m+n-i})$ est une somme d'éléments de G' , dont chacun est du type $\pm\varphi(f(x_{i_o}, \ldots, x_{i_m}), g(x_{j_o}, \ldots, x_{j_n}))$, les suites d'indices $i_o, \ldots, i_m$ et $j_o, \ldots, j_n$ étant toutes deux strictement croissantes, et la réunion de ces deux suites étant tout l'ensemble $(0, 1, \ldots, m+n-i)$. (On ne dit pas que toutes les suites d'indices satisfaisant à ces conditions interviennent effectivement dans l'expression de

$p_i(f , g)$; pour plus de précisions, voir Steenrod, p.292).

En vue de donner une définition complète de $p_i(f , g)$, introduisons (cf. exposé 7 de 1948-49, p.5) l'opérateur T_a (a désignant un point de E) qui, à chaque cochaîne f de degré $m \geq 1$, associe la cochaîne $h(x_o , \dots , x_{m-1}) = f(a , x_o , \dots , x_{m-1})$ de degré $m-1$. On a

$$(4) \qquad \delta T_a f + T_a \delta f = f \qquad (\text{degré de } f \geqslant 1) .$$

On peut convenir que $T_a f = 0$ si f est de degré 0 . Observons que, pour définir une cochaîne f , il suffit de se définir $T_a f$ pour chaque a .

Nous allons maintenant définir les $p_i(f , g)$, et, en même temps, les $\overline{p_i}(f , g)$ relatifs à l'application bilinéaire $\overline{\varphi}$ définie par

$$\overline{\varphi}(\alpha , \beta) = \varphi(\beta , \alpha) .$$

On pose $p_o(f , g) = p(f , g)$ (produit défini par la formule (1)) ; puis, pour chaque $i \geqslant 1$, on pose $p_i(f , g) = 0$ si le degré m de f est 0 ; si $m \geq 1$, on définit $p_i(f , g)$ par $T_a p_i(f , g)$:

$$(5) \qquad T_a p_i(f , g) = p_i(T_a f , g) + (-1)^{m(n+1)}\overline{p_{i-1}}(T_a g , T_a f) .$$

Pour $\overline{p_i}$, on pose la formule analogue :

$$T_a \overline{p_i}(f , g) = \overline{p_i}(T_a f , g) + (-1)^{m(n+1)} p_{i-1}(T_a g , T_a f) .$$

Ces formules définissent bien $p_i(f , g)$ par récurrence sur le degré m de f , une fois p_{i-1} et $\overline{p_{i-1}}$ connus. n désigne le degré de g .

Pour $i = 0$, $m \geq 1$, la formule (5) est encore valable, c'est-à-dire compatible avec la définition déjà donnée de $p_o(f , g) = p(f , g)$. Pour i quelconque, on vérifie par récurrence que $p_i(f , g)$ satisfait à la condition (3) ; en particulier :

$$p_i(f , g) = 0 \quad \text{si} \quad i > \inf(m,n) .$$

Enfin, (5) montre que $p_m(f , f) = \overline{p_{m-1}}(T_a f , T_a f)$, d'où, par récurrence sur m :

$$(6) \qquad p_m(f , f).(x_o , \dots , x_m) = \varphi(f(x_o , \dots , x_m) , f(x_o , \dots , x_m)) .$$

3.- <u>La formule fondamentale du cobord.</u>

C'est la formule :

$$(\mathrm{I}) \quad \delta p_i(f , g) = p_i(\delta f , g) + (-1)^m p_i(f , \delta g) + (-1)^{m+n+i} p_{i-1}(f , g) + \\ + (-1)^{m+n+mn}\overline{p_{i-1}}(g , f) ,$$

et la formule analogue obtenue en permutant les rôles de p_i et $\overline{p_i}$.

Cette formule généralise (2) (à laquelle elle se réduit pour $i = 0$) ; on la démontre par récurrence sur i , et, pour chaque i , par récurrence sur le degré m de f (rappelons que n est le degré de g). Pour $i \geq 2$, $m = 0$, elle est triviale (tout est nul) ; on doit donc d'abord la vérifier pour $i = 0$, $m = 0$, et pour $i = 1$, $m = 0$, c'est-à-dire :

$\delta p_0(f , g) = p_0(\delta f , g) + p_0(f , \delta g)$ pour $m = 0$ (ce qui est immédiat),

$p_1(\delta f , g) + (-1)^{n+1}p_0(f , g) + (-1)^n\overline{p_0}(g , f) = 0$ pour $m = 0$; ceci se vérifie ainsi :

$T_a p_1(\delta f , g) = (-1)^{n+1}\overline{p_0}(T_a g , T_a f)$, d'où $p_1(\delta f , g).(x_0 , \dots , x_n) = \varphi(f(x_n) - f(x_0) , g(x_0 , \dots , x_n))$, ce qui entraîne la formule à démontrer.

Reste à faire la vérification de (I) par récurrence : supposons (I) vérifié pour $i-1$ (et m quelconque), et montrons (I) pour i , par récurrence sur m : on doit prouver que, pour tout $a \in E$,

$$(6) \quad T_a \delta p_i(f , g) = T_a p_i(\delta f , g) + (-1)^m T_a p_i(f , \delta g) + \\ + (-1)^{m+n+i}T_a p_{i-1}(f , g) + (-1)^{m+n+mn}T_a\overline{p_{i-1}}(g , f) .$$

Or le premier membre est, d'après (4)

$$(7) \quad p_i(f , g) - \delta T_a p_i(f , g) = p_i(f , g) - \delta p_i(T_a f , g) \\ - (-1)^{m(n+1)}\delta\,\overline{p_{i-1}}(T_a g , T_a f) .$$

Dans le second membre de (7) figurent les δ de deux quantités auxquelles on peut déjà appliquer la formule (I) ; on constate alors sans difficulté l'égalité des deux membres de (6). C.Q.F.D.

Remarque : La formule (I), appliquée pour $i = 1$ à deux cocycles f et g , montre que $p_0(f , g)$ est cohomologue à $(-1)^{mn}\overline{p_0}(g , f)$: on retrouve une propriété connue du cup-product dans la cohomologie.

4.- Supports ; produits de Steenrod dans un espace topologique.

On a évidemment $\sigma(p_i(f , g)) \subset \sigma(f) \cap \sigma(g)$, d'après la condition (3). En particulier, si $\sigma(f)$ est vide, $\sigma(p_i(f , g))$ est vide pour toute cochaîne g ; donc, quand on fait le quotient du groupe des cochaînes par le sous-groupe des cochaînes de support vide, les p_i définissent des applications bilinéaires (notées encore p_i) de $\check{C}^m(E , G) \times \check{C}^n(E , G)$ dans

$\check{C}^{m+n-i}(E\ ,\ G')$. Les relations (6) et (I) restent vraies après le passage au quotient. C'est ainsi qu'on obtient les "i-produits" dans le groupe des cochaînes de Čech-Alexander.

De plus, si f et g sont à support compact, il en est de même de $p_i(f\ ,\ g)$. Donc les p_i opèrent aussi dans le groupe gradué des cochaînes à support compact.

Soit toujours E un espace topologique (localement compact, éventuellement paracompact). Au lieu de deux groupes G , G' , considérons deux systèmes G , G' de coefficients locaux (cf. 1948-49, exposé 10). Supposons donnée une application bilinéaire de $G \times G$ dans G' (au sens des systèmes locaux). Les formules qui explicitent les produits $p_i(f\ ,\ g)$ ayant un caractère local, donneront un sens à ces produits si f et g sont des cochaînes de E , relatives au système local G ; et $p_i(f\ ,\ g)$ sera une cochaîne de E relative au système local G' . Les i-produits ainsi définis satisfont encore à la relation fondamentale (I) .

Exemple : prenons pour G un système d'"entiers tordus", et pour G' le système des entiers ordinaires ; la multiplication des entiers définit une application bilinéaire (symétrique) de $G \times G$ dans G' ; d'où un système de i-produits.

A partir de maintenant, on s'intéressera seulement aux deux cas suivants :

1) l'application bilinéaire φ est symétrique, i.e: $\varphi = \overline{\varphi}$. Alors on a $p_i = \overline{p_i}$ (se vérifie par récurrence sur la formule (5)).

2) l'application bilinéaire φ est antisymétrique, i.e: $\varphi = -\overline{\varphi}$. Alors $p_i = -\overline{p_i}$ (vérification par récurrence). Remarquer que, dans ce cas, $\varphi(x\ ,\ x)$ est un élément d'ordre 2 du groupe G' .

Dans chacun de ces deux cas, la formule (I) s'écrit de manière à ne faire intervenir que p_i et p_{i-1} (remplacer $\overline{p_{i-1}}$ par p_{i-1} , resp. par $-p_{i-1}$) .

5.- Etude algébrique de la structure définie par des i-produits.

Laissant provisoirement de côté la considération de l'espace topologique E , nous voulons étudier, en général, la situation algébrique suivante (qui est celle que nous avons rencontrée dans les cochaînes d'Alexander de E , resp. dans les cochaînes à support compact) :

On se donne deux groupes différentiels gradués (degrés ≥ 0 , opérateur δ de degré $+1$) A et A' , munis d'applications bilinéaires p_i et $\overline{p_i}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1°) p_i applique $A^m \times A^n$ dans A'^{m+n-i} ; $p_i = 0$ pour $i < 0$;

2°) $p_i = \overline{p_i}$ (cas symétrique) , ou $p_i = -\overline{p_i}$ (cas antisymétrique) ;

3°) la relation (I) est satisfaite.

Chaque fois qu'il en sera ainsi (sans autre hypothèse), nous dirons qu'on a un <u>système de i-produits</u> (symétriques, resp. antisymétriques).

De (I) on déduit immédiatement :

$$\text{(II)}\quad \delta p_i(f,f) = (-1)^i p_{i-1}(f,f) + (-1)^m \overline{p_{i-1}}(f,f) \quad \text{si} \quad \delta f = 0 \ ;$$

$$\text{(III)}\quad (-1)^{i+1} p_i(f,g) + (-1)^m \overline{p_i}(g,f) = \delta p_{i+1}(f,g) \quad \text{si} \quad \delta f = 0 \ , \ \delta g = 0 \ ;$$

(g de degré m)

$$\text{(IV)}\quad p_i(\delta g, \delta g) = \delta p_i(g, \delta g) + \delta \overline{p_{i-1}}(g,g) + (-1)^i p_{i-1}(g, \delta g) - (-1)^n \overline{p_{i-1}}(g, \delta g) + (-1)^i \overline{p_{i-2}}(g,g) - (-1)^n p_{i-2}(g,g) \ .$$

(dans (IV), n désigne le degré de g).

Introduisons les groupes quotients $A/2A$ et $A'/2A'$, munis de leurs graduations et de leurs opérateurs δ . On a des homomorphismes canoniques des groupes de cohomologie

$$H^m(A) \longrightarrow H^m(A/2A) \quad , \qquad H^m(A') \longrightarrow H^m(A'/2A') \ .$$

D'autre part, p_i définit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $(A/2A) \times (A/2A)$ dans $A'/2A'$, qui satisfait aux relations (I) , (II) , (III) , (IV) , à cela près qu'il devient inutile de distinguer entre +1 et -1 . En outre, on a, dans $A'/2A'$, $p_i = \overline{p_i}$, aussi bien dans le cas antisymétrique que dans le cas symétrique.

Se plaçant dans $A/2A$ et $A'/2A'$, on voit ceci :

(a) si f est un cocycle, $p_i(f,f)$ est un cocycle, d'après (II) ;

(b) si f et g sont des cocycles de même degré, on a, d'après (III), $p_i(f+g\ ,\ f+g) = p_i(f\ ,\ f) + p_i(g\ ,\ g)$ modulo un cobord ;

(c) $p_i(\delta g\ ,\ \delta g)$ est un cobord, d'après (IV) .

De là résulte que la classe de cohomologie de $p_i(f,f)$ ne dépend que de la classe de cohomologie de f ; donc l'application $f \longrightarrow p_i(f,f)$ définit une application de $H^m(A/2A)$ dans $H^{2m-i}(A'/2A')$; et, d'après (b), cette application est un homomorphisme (i.e: est linéaire). On la note Sq_i ("carré de Steenrod" d'ordre i).

Les homomorphismes Sq_i sont définis pour toutes les valeurs des entiers m et i . On peut les faire figurer dans un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^m(A) & & H^{2m-i}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^m(A/2A) & \xrightarrow{Sq_i} & H^{2m-i}(A'/2A') \end{array}$$

On en déduit un homomorphisme (qu'on peut encore noter Sq_i) de $H^m(A)$ dans $H^{2m-i}(A'/2A')$. Mais, dans certains cas, on peut faire mieux, et compléter le diagramme par un homomorphisme de $H^m(A)$ dans $H^{2m-i}(A')$ (première ligne horizontale du diagramme). Ces cas sont les suivants :

<u>1er cas</u> : cas symétrique, m-i impair ;
<u>2e cas</u> : cas antisymétrique, m-i pair .

En effet, dans chacun de ces deux cas, les conclusions (a) , (b) , (c) ci-dessus subsistent mot pour mot. D'autre part, la compatibilité du diagramme est évidente. L'homomorphisme $H^m(A) \longrightarrow H^{2m-i}(A')$, dans chacun de ces deux cas, sera encore Sq_i . On a le résultat important :

Sq_i (lorsqu'il est défini) <u>applique</u> $H^m(A)$ <u>dans le sous-groupe de</u> $H^{2m-i}(A')$ <u>formé des éléments d'ordre 2</u>. En effet, d'après (III) ,

$$2\, p_i(f\, ,\, f) = \pm\, \delta p_{i+1}(f\, ,\, f) \quad \text{si } f \text{ est un cocycle.}$$

Tout ce qui précède s'applique en particulier à la cohomologie de Čech-Alexander d'un espace localement compact et paracompact (resp. à la cohomologie à supports compacts). Les carrés de Steenrod y sont définis dans les circonstances qui viennent d'être précisées. De plus : Sq_i <u>est nul sur</u> $H^m(A)$ (resp. $H^m(A/2A)$) <u>dès que</u> $i > m$ (puisqu'on a vu que, pour les cochaînes de Čech-Alexander, $p_i(f\, ,\, g) = 0$ dès que $i >$ degré de f). Quant à Sq_o , chaque fois qu'il est défini, il coïncide avec le <u>cup-carré</u> défini par le cup-produit dans la cohomologie. En outre, même si Sq_o n'est pas défini sur $H^m(A)$, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^m(A) & \xrightarrow{\text{cup-carré}} & H^{2m}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^m(A/2A) & \xrightarrow{Sq_o} & H^{2m}(A'/2A') \end{array}$$

6.- <u>Etude algébrique</u> (Suite) : <u>cas où</u> A' <u>est sans torsion d'ordre 2</u>.

On suppose que, dans A' , $2u = 0$ entraîne $u = 0$. Dans ces conditions, on va pouvoir, dans chacun des cas "favorables" (i.e: cas symétrique, m-i impair ; et cas antisymétrique, m-i pair), compléter le diagramme par un homomorphisme

$$H^m(A/2A) \longrightarrow H^{2m-i}(A')$$

(dont l'image se compose d'éléments d'ordre 2), et cela bien que les p_i ne définissent pas d'application bilinéaire de $A/2A$ dans A' .

Un élément de $H^m(A/2A)$ est défini par une cochaîne f de A , telle que δf ait la forme $2h$ (où h est de degré $m+1$). Dans la formule (IV), remplaçons i par $i+2$, g par f :

$$(8) \quad 4\, p_{i+2}(h\,,\,h) = 2\,\delta p_{i+2}(f\,,\,h) + \delta\overline{p_{i+1}}(f\,,\,f) + $$
$$+ 4\ (-1)^i p_{i+1}(f\,,\,h) - 2\ (-1)^m p_i(f\,,\,f)\ .$$

Ceci prouve que $\delta\,\overline{p_{i+1}}(f\,,\,f)$ est le double d'un élément de A' , lequel est d'ailleurs bien déterminé ; on le notera $\frac{1}{2}\delta\overline{p_{i+1}}(f\,,\,f)$. De la relation (8) nous tirons deux choses :

$$(9) \quad \tfrac{1}{2}\delta\overline{p_{i+1}}(f\,,\,f) = (-1)^m p_i(f\,,\,f) \quad \text{si} \quad \delta f = 0 \quad (h = 0)\ , \text{ et par suite}$$

$$(9\text{bis}) \quad \tfrac{1}{2}\delta p_{i+1}(f\,,\,f) = p_i(f\,,\,f) + \text{un cobord si} \quad \delta f = 0\ ;$$

d'autre part

$$(10) \quad \tfrac{1}{2}\delta p_{i+1}(f\,,\,f) = p_i(f\,,\,f) + \delta p_{i+2}(f\,,\,h) \bmod 2A'\ ,$$ dans le cas général (où $\delta f = 2h$) . On posera désormais, pour simplifier,

$$\lambda_i(f) = \tfrac{1}{2}\delta p_{i+1}(f\,,\,f)\ .$$

D'après (9) , si f est un cocycle de A , $\lambda_i(f)$ et $p_i(f\,,\,f)$ définissent la même classe de $H^{2m-i}(A')$. D'après (10) , si f est un cocycle modulo $2A$, $\lambda_i(f)$ et $p_i(f\,,\,f)$ définissent la même classe de $H^{2m-i}(A'/2A')$. Donc, si nous montrons que $f \longrightarrow \lambda_i(f)$ définit une application linéaire de $H^m(A/2A)$ dans $H^{2m-i}(A')$, cette application satisfera au diagramme de compatibilité

$$\begin{tikzcd}
H^m(A) \arrow[r, "Sq_i"] \arrow[d] & H^{2m-i}(A') \arrow[d] \\
H^m(A/2A) \arrow[r, "Sq_i"'] \arrow[ur] & H^{2m-i}(A'/2A')
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que $f \longrightarrow \lambda_i(f)$ définit une application linéaire de $H^m(A/2A)$ dans $H^{2m-i}(A')$. Tout d'abord, si $f = \delta k + 2g$, $\lambda_i(f)$ est un cobord de A' : car $\frac{1}{2}\delta p_{i+1}(\delta k + 2g\,,\,\delta k + 2g)$ est la somme d'un cobord et de $\frac{1}{2}\delta p_{i+1}(\delta k\,,\,\delta k)$, lequel, d'après (III), est égal à $\pm\, p_i(\delta k\,,\,\delta k)$, et ceci est un cobord d'après (IV). Montrons maintenant que $\lambda_i(f + g)$ est la somme de $\lambda_i(f)$, de $\lambda_i(g)$ et d'un cobord, si f et g sont des cocycles modulo $2A$. Cela revient à prouver que

$$\tfrac{1}{2}\,\delta(p_{i+1}(f\,,\,g) + p_{i+1}(g\,,\,f))$$

est un cobord, ou encore que

$$\tfrac{1}{2}\ \delta(p_{i+1}(f\ ,\ g) - p_{i+1}(g\ ,\ f))$$

est un cobord. Or appliquons (I) , en y remplaçant i par $i+2$, et prenons les δ des deux membres : on obtient le résultat cherché.

Remarque : A' étant toujours supposé sans torsion d'ordre 2 , supposons, dans le cas favorable, que $H^{2m-i}(A')$ n'ait pas d'élément d'ordre 2 (autre que 0). Alors l'homomorphisme Sq_i de $H^m(A/2A)$ dans $H^{2m-i}(A'/2A')$ est nul. Cela résulte du fait que l'homomorphisme diagonal du diagramme : $H^m(A/2A) \longrightarrow H^{2m-i}(A')$ est nul, puisque son image se compose d'éléments d'ordre 2 .

7.- Relation avec l'homomorphisme de Bockstein (Doklady, 37, 1942, p. 243-245).

Supposons toujours A' sans torsion d'ordre 2 . L'homomorphisme de Bockstein (que nous noterons β) applique $H^m(A'/2A')$ dans $H^{m+1}(A')$; on le définit en associant à toute cochaîne f , telle que δf ait la forme $2g$, le cocycle g . On voit que l'homomorphisme $H^m(A/2A) \longrightarrow H^{2m-i}(A')$ défini par $f \longrightarrow \frac{1}{2}\delta p_{i+1}(f\ ,\ f)$ (dans le cas favorable) est composé de l'homomorphisme $Sq_{i+1} : H^m(A/2A) \longrightarrow H^{2m-i-1}(A'/2A')$, et de l'homomorphisme de Bockstein $H^{2m-i-1}(A'/2A') \longrightarrow H^{2m-i}(A')$. D'où le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^m(A) \arrow[r, "Sq_i"] \arrow[d] & H^{2m-i}(A') \arrow[dr] & \\
H^m(A/2A) \arrow[r, "Sq_{i+1}"] \arrow[rr, bend right, dashed, "Sq_i"'] & H^{2m-i-1}(A'/2A') \arrow[u, "\beta"'] & H^{2m-i}(A'/2A')
\end{tikzcd}$$

8.- Carrés de Steenrod dans la cohomologie à coefficients entiers d'un espace localement compact.

(Il s'agit soit de la cohomologie ordinaire, soit de la cohomologie à supports compacts).

Le produit (au sens ordinaire) de deux entiers définit une application bilinéaire symétrique φ de $Z \times Z$ dans Z . C'est par rapport à cette φ que vont être pris les produits de Steenrod définis aux numéros 2, 3 et 4 ci-dessus. Puisque $\varphi(\alpha\ ,\alpha) \equiv \alpha$ mod.2, la relation (6) montre que $p_m(f\ ,\ f)$ est congru, modulo 2, à f lorsque f est une cochaîne de degré m . Avec la notation Sq^j pour désigner Sq_{m-j} opérant sur H^m , on voit que Sq^o est l'application identique de $\overset{*}{H}{}^m(E\ ,\ Z/2Z)$ dans lui-même. (On notera que le "cas favorable" est celui où l'indice j de Sq^j est impair).

L'homomorphisme $Sq^1 : \check{H}^m(E , Z/2Z) \longrightarrow \check{H}^{m+1}(E , Z)$ est, d'après le numéro 7, composé de Sq^o et de l'homomorphisme de Bockstein ; comme Sq^o est l'identité, Sq^1 <u>est l'homomorphisme de Bockstein</u>.

Les mêmes résultats du numéro 7 montrent que, dans la cohomologie <u>modulo 2</u>, on a, pour tout entier k,

$$(11) \qquad Sq^{2k+1} = Sq^1 \circ Sq^{2k} \text{ , tandis que } Sq^1 \circ Sq^{2k+1} = 0 \text{ .}$$

On a oublié d'expliciter que l'homomorphisme Sq^j transforme H^m dans H^{m+j}, c'est-à-dire augmente le degré de j unités.

<u>L'homomorphisme</u> Sq^1 <u>de</u> $\check{H}^m(E , Z)$ <u>dans</u> $\check{H}^{m+1}(E , Z)$ <u>est nul</u>. C'est ce qu'on voit aussitôt en explicitant l'homomorphisme de Bockstein. (Par contre, Sq^1 n'est pas nul, en général, sur $\check{H}^m(E , Z/2Z)$.

<u>Application</u> : sur $\check{H}^1(E , Z)$, $Sq^1 = Sq_o$ est le <u>cup-carré</u> ; donc celui-ci est toujours nul (a priori, on savait seulement que c'est un élément d'ordre 2 de $\check{H}^2(E , Z)$) . En utilisant la dualité des variétés : dans une variété orientable de dimension n , la self-intersection d'une classe d'homologie entière de dimension $n-1$ est toujours nulle.