A. Borel

Groupes d'homotopie des groupes de Lie, II

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 13, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A13_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

GROUPES D'HOMOTOPIE DES GROUPES DE LIE, II.

(Exposé de A. BOREL, le 7.3.1950)

C'est par l'emploi de la théorie des groupes de Lie compacts que nous avons obtenu dans le premier exposé quelques renseignements sur leurs groupes d'homotopie. Ici au contraire la théorie des groupes jouera un rôle très effacé et nous utiliserons des moyens topologiques : la suite exacte d'homotopie et les groupes d'homotopie des sphères. Cela donne des résultats grâce à l'existence de fibrations des groupes compacts dont les bases sont des sphères.

Notation. Nous écrirons $W = G/G'$ si G , fibré par le sous-groupe fermé G' , a W comme base.

1.- Relations entre groupes d'homotopie des groupes classiques.

Proposition 1.-

$$SO(n+1)/SO(n) = S^n \qquad (n \geq 1)$$

$$SU(n+1)/SU(n) = S^{2n+1} \qquad (n \geq 1)$$

$$Sp(n+1)/Sp(n) = S^{4n+3} \qquad (n \geq 0)$$

Pour la démonstration, cf. Exposé 5 . A l'aide de la suite exacte, on en déduit le :

Théorème 1.-

$$\pi_k(SO(m)) = \pi_k(SO(n)) \qquad (m , n \geq k+2)$$

$$\pi_k(SU(m)) = \pi_k(SU(n)) \qquad (m , n \geq k/2)$$

$$\pi_k(Sp(m)) = \pi_k(Sp(n)) \qquad (m , n \geq (k-2)/4)$$

Corollaire : $\pi_2(G) = 0$ si G est un groupe classique.

2.- Groupes π_3 , π_4 et π_5 des groupes classiques.

D'après le théorème 1, il suffit de connaître les groupes π_i $(i \leq 5)$ jusqu'à $SO(7)$, $SU(3)$ et $Sp(1)$.

Théorème 2.- On a

	$SO(3)$	$SO(4)$	$SO(5)$	$SO(6)$	$SO(n)$ $(n \geq 7)$	$SU(n)$ $(n \geq 3)$	$Sp(n)$ $(n \geq 1)$
π_3	Z	$Z+Z$	Z	Z	Z	Z	Z
π_4	Z_2	Z_2+Z_2	Z_2	0	0	0	Z_2
π_5	Z_2	Z_2+Z_2	Z_2	Z	0	Z	Z_2

(Z désigne le groupe additif des entiers, Z_2 celui des entiers modulo 2).

(N.B: dans l'édition originale de ce Séminaire, la liste donnée était établie sous l'hypothèse $\pi_5(S^3) = 0$ annoncée par Pontrjagin en 1938. Le fait que $\pi_5(S^3) = Z_2$ a été établi en 1950 par Pontrjagin et G. Whitehead. Le tableau ci-dessus tient compte de cette correction ; mais nous n'en donnons pas de démonstration, celle de A. Borel étant devenue inadéquate).

Applications.

1) Pour $n \geq 3$, l'espace de $SU(n)$ n'est pas du type $S^3 \times M$ puisque ces deux espaces n'ont pas le même 4ème groupe d'homotopie. Rappelons que l'espace de $SU(n)$ a même polynome de Poincaré qu'un produit topologique de sphères de dimensions impaires, dont S^3.

2) S^5 n'est pas parallélisable. En effet, on a vu (Exposé 5) que S^5 est parallélisable si et seulement si on a, pour les variétés de $SO(5)$ et $SO(6)$:

$$SO(6) = SO(5) \times S^5$$

Cela est impossible puisque le 4ème groupe d'homotopie du terme de gauche est nul, tandis que celui du terme de droite est Z_2.

C'est par l'étude approfondie de la généralisation à un nombre quelconque de dimensions de l'application que nous avons utilisée à propos de $\pi_5(SO(7))$ que Whitehead a étudié les groupes d'homotopie des groupes orthogonaux et généralisé le résultat précédent en montrant que sur S^{4k+1} il n'y a jamais 2 champs continus de vecteurs tangents linéairement indépendants en tous les points, résultat également obtenu par Eckmann (Loc. cit.).

3.- Les premiers groupes d'homotopie de G_2 et F_4.

Nous ne donnerons que de brèves indications sur la démonstration de la :

Proposition 2.-

$SO(7)/G_2 = P_7$ (espace projectif réel à 7 dim.) (Blanchard)

$F_4/SO(9)$ est le plan projectif des octaves de Cayley, ses 7 premiers groupes d'homotopie sont nuls.

Pour démontrer la 1ère égalité, on établit un isomorphisme entre $SU(4)/SU(3)$ et le quotient du groupe de revêtement simplement connexe de $SO(7)$ par G_2, à l'aide des structures presque complexes de S^6.

Pour montrer que les 7 premiers groupes d'homotopie de $F_4/SO(9)$ sont nuls, il n'est pas nécessaire de passer par l'intermédiaire du plan projectif des octaves (défini par G. Hirsch, Coll. de Top. alg., Paris 1947, p. 35-42). Il suffit d'utiliser des propriétés de cet espace indiquées par E. Cartan (Ann. Ec. Norm. Sup. 44, 345-467, 1927) et qui sont : par 2 points de cet espace ne passe en général qu'une géodésique, dans une métrique riemannienne invariante par F_4, et les points qui peuvent être joints à un point p donné par plus d'une géodésique remplissent une variété à 8 dimensions, qui est d'ailleurs une S^8. Le complémentaire de S^8 est alors contractile en p ; d'autre part, on peut supposer que dans l'homotopie relative à p, tout élément de π_i $(i \leq 7)$ est représenté par une application de S^i dans le complémentaire de cette S^8, (car la dimension de $F_4/SO(9)$ est 16) donc est homotope à zéro. Cependant on peut de plus définir dans cet espace des "droites" homéomorphes à S^8 vérifiant les axiomes d'incidence de sorte que F_4 soit un groupe de "projectivités" c'est-à-dire de transformations conservant les points, les droites, qui est transitif sur les points et sur les droites.

Par la suite exacte on a alors :

<u>Théorème 3</u>.- $\pi_k(G_2) = \pi_k(SO(7))$ $(2 \leq k \leq 5)$

$\pi_k(F_4) = \pi_k(SO(9))$ $(2 \leq k \leq 6)$

Désignons par $\widetilde{SO}(n)$ le groupe, revêtement universel de $SO(n)$. On peut plonger $\widetilde{SO}(7)$ dans $\widetilde{SO}(9)$ grâce à une représentation linéaire de $\widetilde{SO}(7)$ dans l'espace R^9, de la forme $1 + \Delta$, où Δ est une représentation irréductible fidèle de degré 8 (la représentation spinorielle). Avec ce plongement :

<u>Théorème 4</u>.- $\widetilde{SO}(9)/\widetilde{SO}(7) = S^{15}$, <u>donc</u> $\pi_k(SO(7)) = \pi_k(SO(9))$ <u>pour</u> $k \leq 13$.

Enfin, en se servant de Δ on peut facilement montrer que $\widetilde{SO}(7)/G_2 = S^7$. On montre pour cela que Δ agit transitivement sur le quotient de $SO(8)$ par $(1 + SO(7))$ qui est précisément S^7 ; cette dernière sphère est alors le quotient de $\widetilde{SO}(7)$ par un sous-groupe à 14 paramètres qui ne peut être que G_2. On voit aussi que $SO(7)/G_2 = P^7$ (proposition 2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. PONTRJAGIN, Commentarii Math. Helvetici 13, 1940-41, p. 277-292.
[2] G.W. WHITEHEAD, Annals of Math. (2) 43, 1942, p. 132-146.
[3] B. ECKMANN, Commentarii Math. Helvetici 14, 1941-42, p. 141-192.
[4] B. ECKMANN, Commentarii Math. Helvetici 14, 1941-42, p. 236-252.