H. CARTAN

Opérateurs d'homotopie (suite) : subdivision barycentrique

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 8, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A8_0>

OPÉRATEURS D'HOMOTOPIE (Suite) : SUBDIVISION BARYCENTRIQUE.

(Exposé fait par H. CARTAN, le 22.1.1949).

1.- Subdivision barycentrique des simplexes affines.

Dans ce numéro, on suppose que l'espace topologique E est l'espace d'un simplexe euclidien, muni de sa structure affine. Dans le groupe $S(E)$ des chaînes singulières de E, soit $A(E)$ le sous-groupe (permis) des chaînes singulières affines, c'est-à-dire des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, de simplexes singuliers affines.

Chaque point s de E définit un endomorphisme k de $A(E)$, de degré $+1$, à savoir l'opérateur conique de sommet s (cf. exposé 7, paragraphe 6). L'opérateur d'homotopie h associé à k (cf. exposé 7, paragraphe 1) est nul sur les chaînes de dimension $\geqslant 1$, et transforme tout simplexe de dimension 0 (point de E) dans le point s. On a donc, pour toute chaîne x de dimension $\geqslant 1$,

(1) $$x = kd(x) + dk(x)\ .$$ (on écrit ici d au lieu de ∂, pour des commodités typographiques).

Nous allons définir, dans $A(E)$, un endom. permis u, appelé subdivision barycentrique, et qui sera un opérateur d'homotopie. Tout d'abord, pour tout simplexe affine x, soit k_x l'opérateur conique ayant pour sommet le barycentre de x. L'opérateur u est défini, par récurrence sur la dimension du simplexe x de $A(E)$, par :

(2) $$\begin{cases} u(x) = x & \text{si } x \text{ est de dimension } 0\ ; \\ u(x) = k_x ud(x) & \text{si } x \text{ est de dimension } p \geqslant 1\ . \end{cases}$$

On voit, par récurrence sur la dimension, que le support de $u(x)$ est contenu dans le support de x ; mieux : $u(x)$ est somme de simplexes dont chacun a pour support l'enveloppe convexe du barycentre de x et du support d'un simplexe de la subdiv. barycentrique de dx.

Montrons que u est un endomorphisme permis. Tout d'abord, par récurrence, on voit que u est de degré 0 (c'est-à-dire : $u(x)$ a même dim. que x). Reste à montrer que $du = ud$; on va montrer que c'est vrai sur les chaînes de dimension p, par récurrence sur p. C'est trivial pour $p = 0$. supposons-le vrai pour $p-1$, et soit x un simplexe de dim. p. Compte tenu de (2), on doit montrer que $dk_x ud(x) = ud(x)$, ou, en posant $ud(x) = y$, que

$$dk_x(y) = y \quad (\ y \text{ étant de dimension } p-1\ ).$$

Or
$$dk_x(y) + k_x d(y) = y\ ,$$

car, d'après (1), c'est vrai si y est de dim. $\geqslant 1$, et, si y est de dim. 0 (x de dim. 1), y est combinaison linéaire de simplexes de dim. 0 dont la somme des coeff. est nulle, d'où encore le résultat. Il reste donc à montrer que $k_x d(y) = 0$, ou, en revenant à la définition de y, que $k_x dud(x) = 0$; il suffit de montrer que $dud(x) = 0$. Or
$du(dx) = ud(dx)$, puisque $du = ud$ pour les chaînes de dim. $p-1$, et d'autre part $ud(dx) = 0$, puisque $dd = 0$. Ceci achève la démonstration.

Pour montrer que u <u>est un opérateur d'homotopie</u>, on va définir, par récurrence sur la dimension, un opérateur w de degré $+1$, tel que, pour tout simplexe x,

$$(3) \qquad x - u(x) = wd(x) + dw(x)\ .$$

Posons $w(x) = 0$ si x est de dimension 0 ; alors (3) est vérifié pour x de dimension 0. Supposons w défini pour les x de dimension $\leqslant p-1$, de manière que (3) ait lieu pour les x de dimension $\leqslant p-1$. Pour un simplexe x de dimension p, $wd(x)$ est déjà défini ; posons pour un instant

$$x - u(x) - wd(x) = z\ .$$

On vérifie $dz = 0$ (comme dans l'exposé 7, paragraphe 7), d'où, d'après (1), $z = dk_x(z)$. Nous poserons

$$w(x) = k_x(z) = k_x(x-u(x)-wd(x))\ ;$$

alors la relation (3) est vérifiée pour le simplexe x de dimension p.

C.Q.F.D.

On observera que <u>le support de</u> $w(x)$ <u>est contenu dans le support de</u> x (par récurrence sur la dimension de x). L'opérateur w est canoniquement attaché à l'opérateur "subdivision barycentrique" u.

2.- <u>Subdivision barycentrique dans le groupe des chaînes singulières</u>.

E désigne désormais un espace topologique quelconque. En remontant à la définition des simplexes singuliers de E (applications continues de simplexes euclidiens), on voit que les opérateurs u et w, définis dans l'espace d'un simplexe euclidien, définissent des opérateurs u_E et w_E dans le groupe des chaînes singulières $S(E)$. Ces opérateurs satisfont à

$$x - u_E(x) = w_E d(x) + dw_E(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in S(E) ,$$

ce qui exprime que u_E (qui est appelé <u>subdivision barycentrique</u> dans $S(E)$) est un opérateur d'homotopie. De plus, si f est une application continue de E dans un espace E' , et si $\bar{f}$ désigne l'homom. correspondant de $S(E)$ dans $S(E')$, on a

$$\bar{f} \circ u_E = u_{E'} \circ \bar{f} \quad , \quad \bar{f} \circ w_E = w_{E'} \circ \bar{f} \quad .$$

Si F est un <u>sous-espace</u> de E , $S(F)$ (sous-groupe de $S(E)$) est <u>stable</u> pour u_E et w_E . Donc u_E est opérateur d'homotopie dans $S(E)$, $S(F)$ et $S(E \bmod F)$. Son transposé u_E^* est opérateur d'homotopie dans $S^*(E)$, $S^*(F)$ et $S^*(E \bmod F)$, quel que soit le groupe $\mathfrak{z}$ de coefficients.

<u>Subdivision barycentrique itérée</u>.- La n-ième itérée u^n (nous laissons désormais tomber l'indice E dans u_E) est opérateur d'homotopie, associé à $w_n = w(e+u+\ldots+u^{n-1})$ (cf. exposé 7, paragraphe 5).

3.- <u>Subdivision mixte</u>.

Soit V un <u>recouvrement</u> de E , tel que tout point de E soit intérieur à au moins un ensemble de E (cf. exposé 6, paragraphe 2). Pour chaque simplexe singulier x de l'espace E , il existe un entier n tel que tous les simplexes de la subdivision $u^n(x)$ soient petits d'ordre V (cela résulte du fait qu'un simplexe euclidien est un espace compact). Désignons par $n(x)$ le plus petit des entiers n jouissant de cette propriété. Si x^i est une <u>face</u> de x (cf. exposé 5, paragraphe 1), on a $n(x^i) \leqslant n(x)$. Une fois les entiers $n(x)$ définis pour tous les simplexes singuliers, nous allons leur associer un opérateur d'homotopie de la façon suivante.

Partons de l'endomorphisme $w_V(x) = w_{n(x)}(x) = w(x+u(x)\ldots+u^{n(x)-1}(x))$. C'est un endom. de $S(E)$ pour lequel tous les sous-groupes $S(F)$ (F sous-espace de E) sont stables. Cherchons l'opérateur d'homotopie associé à w_V :

$$dw_V(x) + w_V d(x) = dw_{n(x)}(x) + \sum_i (-1)^i w_{n(x^i)}(x^i) \; .$$

Or, puisque u^n est l'opér. d'homot. associé à w_n , on a

$$dw_{n(x)}(x) = x - u^{n(x)}(x) - w_{n(x)}d(x) \quad , \text{ d'où}$$

$$dw_V(x) + w_V d(x) = x - u^{n(x)}(x) - \sum_i (-1)^i \Big(\sum_{n(x^i) \leqslant p < n(x)} u^p(x^i)\Big) \; .$$

Ainsi l'opérateur d'homotopie u_V associé à w_V est

$$u_V(x) = u^{n(x)}(x) + \sum_i (-1)^i w(\sum_{n(x^i) \leqslant p < n(x)} u^p(x^i)) .$$

Cette formule montre que : 1°) $u_V(x)$ est une somme de simplexes petits d'ordre V ; 2°) si x est petit d'ordre V, on a $u_V(x) = x$. Donc u_V est un <u>projecteur</u> du groupe $S(E)$, qui applique $S(E)$ sur le sous-groupe $S_V(E)$ des chaînes singulières <u>petites d'ordre</u> V.

Appliquons le théorème 2 de l'exposé 7 (paragraphe 2). On voit que l'homomorphisme canonique des groupes d'homologie

$$H_V(E) \to H(E)$$

(où $H_V(E)$ désigne le groupe dérivé de $S_V(E)$) est un <u>isomorphisme sur</u>. Autrement dit, pour calculer le groupe d'homologie singulière, on peut substituer le groupe $S_V(E)$ des chaînes petites d'ordre V, au groupe $S(E)$ de toutes les chaînes, sans changer le résultat. De même pour l'<u>homologie relative</u> : $H_V(E \bmod F) \to H(E \bmod F)$ est un isomorphisme sur. De même aussi pour la cohomologie : soit $I^*_V(E)$ le sous-groupe (idéal) des cochaînes qui s'annulent sur tous les simplexes sing. petits d'ordre V, et posons $S^*_V(E) = S^*(E)/I^*_V(E)$; soit $H^*_V(E)$ le groupe dérivé de $S^*_V(E)$ (groupe de cohomologie des fonctions de simplexes petits d'ordre V). Alors l'homom. canonique $H^*(E) \to H^*_V(E)$ est un <u>isomorphisme sur</u>. C'est d'ailleurs un isom. pour les structures d'<u>anneau</u>, puisque c'est un homom. d'anneau.

4.- <u>Application</u> : <u>supports en cohomologie singulière</u>.

Le support d'une cochaîne singulière f se définit comme le support d'une cochaîne d'Alexander (exposé 6, paragraphe 3). Un point M n'appartient pas au support de f si f prend la valeur zéro sur tous les simplexes singuliers dont le support est contenu dans un voisinage convenable de M. On voit que les <u>cochaînes de support vide</u> sont celles qui appartiennent à la réunion de tous les I^*_V relatifs à tous les recouvrements ouverts V ; soit I^* cette réunion. On a un homomorphisme canonique du groupe de cohom. sing. $H^*(E)$ dans le groupe dérivé du quotient $S^*(E)/I^*(E)$ (i.e: groupe des cochaînes singulières dans lequel on néglige les cochaînes de support vide). Je dis que c'est un <u>isomorphisme sur</u>. En vertu de la suite exacte (cf. exposé 2, paragraphe 7), cela revient à montrer que le groupe dérivé de $I^*(E)$ est nul ; or cela résulte du fait que $I^*(E)$ est réunion de sous-groupes (à savoir les $I^*_V(E)$) dont chacun a un groupe dérivé nul, d'après la fin du paragraphe 3.

Le fait que la cohomologie singulière de E peut se calculer à partir du groupe $S^*(E)/I^*(E)$ entraîne qu'on peut définir un homomorphisme canonique du groupe de cohomologie de Čech-Alexander $\check{H}(E)$ dans le groupe de cohomologie singulière $H^*(E)$ relatif au même groupe de coefficients γ . En effet soit $C^*(E)$ le groupe des cochaînes simpliciales de l'ensemble E considéré comme complexe simplicial, et $\check{I}(E)$ le sous-groupe des cochaînes de support vide ; le groupe $\check{C}(E)$ des cochaînes d'Alexander est $C^*(E)/\check{I}(E)$ (cf. exposé 6, paragraphe 3). Or on a un homomorphisme naturel de $C^*(E)$ dans $S^*(E)$, à savoir le transposé de l'homom. qui, à un simplexe singulier, associe la suite de ses sommets. C'est un homom. permis, qui applique évidemment $\check{I}(E)$ dans $I^*(E)$; par passage au quotient, on obtient un homom. permis de $C^*(E)/\check{I}(E) = \check{C}(E)$ dans $S^*(E)/I^*(E)$. Il définit donc un homomorphisme des groupes dérivés, c'est-à-dire un homomorphisme du groupe de cohomologie $\check{H}(E)$ dans le groupe de cohomologie singulière $H^*(E)$.

En combinant cet homomorphisme avec l'accouplement entre homologie et cohomologie singulières, on obtient un <u>accouplement entre homologie sing. et cohomologie de Čech-Alexander</u> : application bilinéaire du produit de $H(E)$ et de $\check{H}(E,\gamma)$ dans γ .

5.- <u>Subdivision barycentrique dans le groupe des chaînes</u> (resp. <u>cochaînes</u>) <u>de deuxième espèce</u>.

Pour la définition des chaînes (resp. cochaînes) singulières de deuxième espèce, voir exposé 5, paragraphe 6.

Les opérateurs u_V et w_V du présent paragraphe 3 étant définis pour les simplexes singuliers, se prolongent de manière évidente aux chaînes singulières de deuxième espèce. Dans le groupe $\mathcal{S}(E)$ des chaînes de deux. espèce, u_V est un opérateur d'homotopie, et un projecteur qui applique $\mathcal{S}(E)$ sur le sous-groupe $\mathcal{S}_V(E)$ des chaînes petites d'ordre V . On en déduit un isomorphisme des groupes dérivés (groupe d'homologie singulière de deuxième espèce).

De là on déduit comme plus haut : si on fait le quotient du groupe des cochaînes de deuxième espèce par le sous-groupe des cochaînes de support vide, on ne change pas le groupe dérivé : groupe de cohom. sing. de deuxième espèce. Or le groupe-quotient des cochaînes s'identifie à un sous-groupe permis du groupe $S^*(E)/I^*(E)$ défini au paragraphe 4 : c'est le sous-groupe des classes de cochaînes <u>dont le support est compact</u>. D'où le nom de groupe de cohomologie compacte donné au groupe de cohomologie singulière de deuxième espèce.

L'homomorphisme canonique de $C^*(E)/\check{I}(E)$ dans $S^*(E)/I^*(E)$ (défini au paragraphe 4) applique les éléments de support compact sur des éléments de support compact. D'où un homomorphisme canonique de la cohomologie de Čech-Alexander de deuxième espèce dans la cohomologie singulière de deuxième espèce.

Soit maintenant E un <u>espace compact</u>, et F un sous-espace <u>fermé</u> de E : on notera $E-F$ l'espace topologique (localement compact), complémentaire de F dans E. Nous allons indiquer une relation entre l'homologie singulière de deuxième espèce de l'espace $E-F$, et l'homologie singulière relative ; mais il ne s'agira pas exactement de l'homologie de $E \bmod F$, mais de quelque chose d'un peu plus compliqué. Définissons le groupe des <u>chaînes singulières de deuxième espèce</u> de E modulo F, noté $\mathcal{S}(E \bmod F)$, comme la "limite projective" ("inverse limit") des groupes $S(E \bmod W)$ relatifs aux voisinages ouverts W du sous-ensemble fermé F. Le groupe dérivé de $\mathcal{S}(E \bmod F)$ se notera $\mathcal{H}(E \bmod F)$ et s'appellera le groupe d'homologie sing. de deuxième espèce de $E \bmod F$.

Précisons cette notion de limite projective. L'ensemble des W est un ensemble filtrant décroissant ; si $W_1 \subset W_2$, on a un homomorphisme naturel de $S(E \bmod W_1)$ dans $S(E \bmod W_2)$, et c'est un homomorphisme permis. Si $W_1 \subset W_2 \subset W_3$, on a une condition évidente de transitivité relativement aux homomorphismes. Un élément de la "limite projective" $\mathcal{S}(E \bmod F)$, c'est une application $W \to x_W$ qui, à chaque voisinage ouvert W de F, associe un élément x_W du groupe $S(E \bmod W)$, de manière que, si $W_1 \subset W_2$, x_{W_2} soit l'image naturelle de x_{W_1}. L'ensemble $\mathcal{S}(E \bmod F)$ ainsi défini est muni, d'une manière naturelle, d'une structure de groupe gradué à dérivation.

<u>Théorème</u>.- Soit E un espace compact, et F un sous-espace fermé. On a un <u>isomorphisme canonique</u> du groupe d'homologie singulière $\mathcal{H}(E-F)$ <u>sur</u> le groupe d'homologie singulière de deuxième espèce $\mathcal{H}(E \bmod F)$. (Ceci entraîne que ce dernier groupe ne dépend que de l'espace différence $E-F$).

Voici des indications sur la démonstration. Notons E' l'espace $E-F$ (sous-espace de E) ; le groupe $\mathcal{H}(E')$ est le groupe dérivé de $\mathcal{S}(E')$, limite projective des $S(E' \bmod U)$, où U parcourt l'ensemble des complémentaires des parties compactes de E' (cf. exposé 5, paragraphe 6). Or, pour chaque voisinage ouvert W de F dans E, $E' \cap W$ est un U, et on a un homomorphisme naturel (biunivoque) de $S(E' \bmod (E' \cap W))$ dans $S(E \bmod W)$, d'où un homomorphisme naturel (biunivoque) des limites projectives :

$$f : \quad \mathcal{S}(E') \to \mathcal{S}(E \bmod F) \quad .$$

C'est un homomorphisme permis, d'où un homomorphisme

$$\bar{f} : \quad \mathcal{H}(E') \rightarrow \mathcal{H}(E \bmod F) .$$

Il s'agit de montrer que $\bar{f}$ est un <u>isomorphisme sur</u>, ce qui prouvera le théorème 1, en précisant l'isomorphisme.

Or f identifie $\mathcal{S}(E')$ à un sous-groupe de $\mathcal{S}(E \bmod F)$; on va définir, dans $\mathcal{S}(E \bmod F)$, un opérateur d'homotopie qui soit un projecteur sur un sous-groupe de $\mathcal{S}(E')$, ayant même groupe dérivé que $\mathcal{S}(E')$. D'où le résultat.

Pour cela, choisissons une fois pour toutes un recouvrement V de E' par des ouverts dont l'adhérence (dans E) soit contenue dans E'. Pour chaque simplexe singulier x de l'espace E, définissons l'entier $n(x)$ égal à 0 si le support de x est contenu dans E' et petit d'ordre V, à un dans le cas contraire. Ceci définit (comme au paragraphe 3), un opérateur d'homotopie, que nous noterons ici h, associé à l'opérateur (noté ici k) tel que $k(x) = 0$ si $n(x) = 0$, $k(x) = w(x)$ si $n(x) = 1$ (w a la même signification qu'aux paragraphes 2 et 3). Les endomorphismes h et k opèrent dans chaque $S(E \bmod W)$, ainsi que les itérés h^n et k_n ; pour un x de $S(E \bmod W)$, on a $h^{n+1}(x) = h^n(x)$ et $k_{n+1}(x) = k_n(x)$ pour n assez grand. On peut donc définir h^∞ et k_∞ dans chaque groupe $S(E \bmod W)$. Ces endomorphismes opèrent aussi dans la limite projective $\mathcal{S}(E \bmod F)$, et h^∞ est l'opérateur d'homotopie associé à k_∞. D'autre part, h^∞ est un <u>projecteur</u> sur le sous-groupe $\mathcal{S}_V(E')$ des éléments de $\mathcal{S}(E')$ qui sont petits d'ordre V. Ceci prouve que $\mathcal{H}_V(E') \rightarrow \mathcal{H}(E \bmod F)$ est un isomorphisme sur, et comme $\mathcal{H}_V(E') \rightarrow \mathcal{H}(E')$ est un isomorphisme sur (cf. début de ce paragraphe 5), le théorème est démontré.

De la même manière, et dans les mêmes hypothèses (E compact, F fermé contenu dans E), soit $\mathcal{S}^*(E \bmod F)$ le sous-groupe de $S^*(E)/I^*(E)$ formé des éléments <u>dont le support ne rencontre pas</u> F. Le groupe dérivé de $\mathcal{S}^*(E \bmod F)$ étant noté $\mathcal{H}^*(E \bmod F)$, on a le

<u>Théorème</u>.- On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{H}^*(E \bmod F)$ sur le <u>groupe de cohomologie compacte</u> $\mathcal{H}^*(E-F)$ de l'espace $E' = E-F$.