H. Cartan

Opérateurs d'homotopie

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A7_0>

OPÉRATEURS D'HOMOTOPIE.

(Exposés faits par H. CARTAN, les 10 et 17.1.1949).

1.- Définition.

Soit G un groupe gradué à dérivation (exposé 2, paragraphe 4), r ($r = \pm 1$) le degré de l'opérateur de dérivation d. Un opérateur d'homotopie dans G est un endomorphisme h du groupe abélien G, tel qu'il existe un endomorphisme k, de degré $-r$ (i.e : $\theta_{n-r} k = k\,\theta_n$) satisfaisant à la relation

$$(1) \qquad e - h = dk + kd \ .$$

(e désigne l'automorphisme identique de G. On omet le $\circ$ dans la notation du composé de deux endomorphismes). La relation (1) signifie que, pour tout élément α de G, on a

$$\alpha - h(\alpha) = d(k(\alpha)) + k(d\alpha) \quad .$$

Si on part d'un endomorphisme k de degré $-r$, (1) définit un endomorphisme h, qu'on appelle l'opérateur d'homotopie associé à k.

Un opérateur d'homotopie est un endomorphisme permis. En effet, il est de degré 0 : $\theta_n h = h\,\theta_n$; de plus, on a bien $hd = dh$, comme on le voit en comparant les deux membres de (1) avec d, successivement à gauche et à droite.

2.- Propriétés fondamentales d'un opérateur d'homotopie.

Théorème 1.- Si h est un opérateur d'homotopie dans G, l'endomorphisme $\bar{h}$ du groupe dérivé $H(G)$, défini par h, est l'automorphisme identique de $H(G)$.

En effet, si α est un cycle de G ($d\alpha = 0$), alors $h(\alpha)$ est un cycle homologue à α, puisque $\alpha - h(\alpha) = d(k(\alpha))$.

Soit maintenant h un projecteur de G ; si on pose $F = h(G)$, on a $h = fg$, où g est un homomorphisme de G sur F, et f l'homomorphisme canonique de F dans G.

Théorème 2.- Si le projecteur h est un opérateur d'homotopie, les homomorphismes $\bar{g} : H(G) \to H(F)$ et $\bar{f} : H(F) \to H(G)$, définis par g et f respectivement, sont des isomorphismes sur, réciproques l'un de l'autre.

Démonstration : le composé $\bar{g}\,\bar{f}$ est associé à gf , qui est l'automorphisme identique de F ; c'est donc l'automorphisme identique de $H(F)$. Quant à $\bar{f}\,\bar{g}$, il est associé à $fg = h$; puisque h est opérateur d'homotopie, $\bar{h}$ est l'automorphisme identique, d'après le théorème 1.

3.- <u>Opérateurs d'homotopie dans un sous-groupe</u>, <u>dans un groupe quotient</u>.

Soit un couple d'homomorphismes h,k satisfaisant à (1), k étant de degré $-r$. Si un <u>sous-groupe permis</u> F du groupe G est <u>stable pour</u> k , il est stable pour h , d'après (1) ; les restrictions de h et k à F satisfont à (1), et par suite la restriction de h est un opérateur d'homotopie dans F .

Dans les mêmes hypothèses, k et h définissent des endomorphismes du groupe quotient G/F ; donc h définit un opérateur d'homotopie dans le groupe G/F .

4.- <u>Opérateurs d'homotopie et dualité</u>.

Soit G un groupe gradué à dérivation, et γ un groupe abélien. $G^* = \mathrm{Hom}(G,\gamma)$ est un groupe gradué à dérivation, dont l'opérateur de dérivation d^* est de degré $-r$. Soit un couple d'endomorphismes h,k de G satisfaisant à (1) , k étant de degré $-r$. Soient h^* et k^* les endomorphismes transposés, qui sont des endomorphismes de G^* . L'endomorphisme k^* est de degré $+r$, et, en transposant la relation (1), on obtient

$$e^* - h^* = d^*k^* + k^*d^* \quad ,$$

ce qui prouve que h^* est un opérateur d'homotopie dans G^* .

Supposons en particulier que h soit un <u>projecteur</u> de G . Désignons comme ci-dessus par g l'homomorphisme correspondant de G sur $F = h(G)$, par f l'homomorphisme canonique de F dans G . On sait (exposé 4, paragraphe 1) que g^* applique biunivoquement $\mathrm{Hom}(F,\gamma) = F^*$ dans $\mathrm{Hom}(G,\gamma) = G^*$, ce qui identifie F^* à un sous-groupe de G^* . L'opérateur $h^* = g^*f^*$ est opérateur d'homotopie dans G^* , et c'est un projecteur qui applique G^* sur F^* . Il en résulte (théorème 2) que les homomorphismes $H(G^*) \to H(F^*)$ et $H(F^*) \to H(G^*)$, définis par f^* et g^* respectivement, sont des <u>isomorphismes sur</u>, réciproques l'un de l'autre.

5.- <u>Composé de deux opérateurs d'homotopie</u>.

Soit, sur G , un couple d'endomorphismes h_1 , k_1 satisfaisant à $e - h_1 = dk_1 + k_1d$, et, sur le même groupe G , un couple d'endomorphismes

h_2, k_2 satisfaisant à $e - h_2 = dk_2 + k_2 d$ (k_1 et k_2 de degré $-r$). Alors l'endomorphisme composé $h_2 h_1$ est un opérateur d'homotopie, associé à l'endomorphisme $k_1 + k_2 h_1$ (qui est bien de degré $-r$). En effet

$$e - h_2 h_1 = (e-h_1) + (e-h_2)h_1 = dk_1 + k_1 d + dk_2 h_1 + k_2 dh_1 ,$$

et, puisque $dh_1 = h_1 d$, donc $k_2 dh_1 = k_2 h_1 d$, le dernier membre est bien égal à $d(k_1+k_2h_1) + (k_1+k_2h_1)d$.

Remarque : la conclusion reste valable si l'on suppose seulement que h_2 et k_2 sont définis sur le sous-groupe stable $h_1(G)$, et appliquent $h_1(G)$ dans G, tout en satisfaisant, dans $h_1(G)$, à $e - h_2 = dk_2 + k_2 d$.

Conséquence : soit, dans G, un opérateur d'homotopie h associé à k. Alors le n-ième itéré h^n est un opérateur d'homotopie, associé à l'endomorphisme $k(e+h+\dots+h^{n-1})$.

6.- Exemple : opérateur conique.

Plaçons-nous dans le groupe $S(E)$ des chaînes singulières de l'espace numérique $E = R^n$. A chaque simplexe singulier x (de dimension p), associons le "cône" ayant pour "sommet" l'origine 0 et pour "base" le simplexe x ; ce sera, par définition, le simplexe singulier y, de dimension $p+1$, défini par :

$$\begin{aligned} y(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1}) &= 0 \quad \text{si} \quad \lambda_0 = 1 \\ &= (1-\lambda_0)x(\lambda_1/(1-\lambda_0),\dots,\lambda_{p+1}/(1-\lambda_0)) \quad \text{si} \quad \lambda_0 \neq 1 \end{aligned}$$

(rappelons que les variables λ_i sont $\geqslant 0$ et leur somme égale à un). Dans la formule précédente, la multiplication par le scalaire $(1-\lambda_0)$ s'entend au sens de l'homothétie dans l'espace R^n, par rapport à l'origine 0.

Désignons par $k(x)$ le cône défini par x ; on obtient ainsi un endomorphisme k, de degré $+1$, du groupe $S(E)$. L'opérateur d'homotopie h associé à k étant défini par la formule (1) du paragr. 1, on vérifie aisément que $h(x)$ est nul pour tout simplexe singulier x de dimension $\geqslant 1$; si x est un point (simplexe singulier de dimension 0), $h(x)$ est le point 0 (simplexe de dimension 0). Ainsi h est un projecteur qui applique $S(E)$ sur le sous-groupe formé des multiples entiers de l'unique simplexe de dimension 0, constitué par l'origine. Ceci entraîne que le groupe d'homologie singulière et les groupes de cohomologie singulière de l'espace R^n sont triviaux (dans le sens de l'exposé 6, paragraphe 1). Le même résultat vaut pour tout espace E homéomorphe à

R^n , par exemple pour une boule ouverte. Il vaut aussi pour une boule fermée, car l'opérateur conique k défini plus haut vaut pour tout sous-espace convexe de R^n , 0 étant alors un point quelconque de ce sous-espace.

Généralisation : soit E un espace topologique homotope à un point, c'est-à-dire dans lequel existe une application continue $M \to \varphi(M,t)$ de $E\times I$ dans E (I désignant le segment $[0 , 1]$ de la droite numérique), telle que $\varphi(M , 1) = M$, $\varphi(M , 0) = A$ (point indépendant du point M). Nous définissons un opérateur k , de degré $+1$, dans le groupe $S(E)$, en associant à chaque simplexe singulier x , de dimension p , le simplexe singulier y , de dimension $p+1$, défini par

$$y(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1}) = A \quad \text{si} \quad \lambda_0 = 1$$

$$= \varphi(x(\lambda_1/t,\dots,\lambda_{p+1}/t),t) \quad \text{si} \quad \lambda_0 \neq 1 \quad (\text{on a posé } t = 1 - \lambda_0).$$

L'opérateur d'homotopie h associé à k transforme en zéro toute chaîne sing. de dimension $p \geqslant 1$, et transforme tout point M (simplexe de dim. 0) en le point A . Donc le groupe d'homologie singulière et les groupes de cohomologie singulière d'un espace homotope à un point sont triviaux. Ce sont les mêmes que ceux d'un espace réduit à un point.

7.- Autre exemple : opérateur conique dans l'anneau des formes différentielles extérieures de R^n .

Parmi les formes différentielles extérieures de R^n , à coefficients continus, on distingue celles ω qui ont une "différentielle extérieure" $d\omega$ à coefficients continus (il n'est pas nécessaire, pour cela, que les coefficients de ω soient continûment différentiables). Elles forment un anneau gradué à dérivation (cf. exposé 4, paragraphe 8), soit A .

L'existence et la définition de $d\omega$ peuvent être données en utilisant l'intégration d'une forme ω (de degré p) sur un "simplexe singulier différentiable" de dimension p , c'est-à-dire un simplexe singulier $x(\lambda_0,\dots,\lambda_p)$ tel que x soit fonction continûment différentiable des variables λ_i . Une forme ω , de degré p , appartient à A s'il existe une forme ϖ , de degré $p+1$, telle que l'on ait

$$\int_x \varpi = \int_{\partial x} \omega$$

pour tout simplexe sing. diff. x de dimension $p+1$. Si une telle forme ϖ existe (pour une ω donnée), elle est unique, et on la note alors $d\omega$.

Ainsi $d\omega$ est définie pour toute ω de A, et d'ailleurs $d\omega$ appartient à A, et $d(d\omega) = 0$.

Soit x un simplexe singulier différentiable de dimension $p-1$; le <u>cône</u> $k(x)$, de dimension p, n'est pas, en général, un simplexe différentiable (il y a une singularité au sommet du cône), mais cela n'empêche pas de prendre l'intégrale $\int_{k(x)} \omega$ pour toute forme différ. ω de degré p. (Il y a là une petite difficulté qu'on pourrait éviter en considérant, au lieu d'images continûment différentiables de <u>simplexes</u> euclidiens, des images cont. différentiables de <u>cubes</u> euclidiens). Or on montre qu'il existe une forme $k^*(\omega)$ et une seule telle que l'on ait

$$\int_{f(x)} \omega = \int_x k^*(\omega)$$

quel que soit le simplexe différentiable x de dimension $p-1$. Le calcul montre que si $\omega = a(\xi)d\xi_1 \ldots d\xi_p$ (où $\xi_1, \ldots, \xi_n$ désignent les coordonnées d'un point ξ de R^n), on a

$$k^*(\omega) = b(\xi)(\sum_i (-1)^{i-1} \xi_i \, d\xi_1 \ldots \widehat{d\xi_i} \ldots d\xi_p) \text{ , avec}$$

$$b(\xi) = \int_0^1 a(t\xi)t^{p-1}dt$$ ($t\xi$ désigne l'homothétique du point ξ de R^n par rapport à l'origine dans le rapport t). De plus, si $\omega \in A$, alors $k^*(\omega) \in A$, et l'opérateur d'homotopie h^* associé à k^*, défini par

$$h^*(\omega) = \omega - dk^*(\omega) - k^*d(\omega) ,$$

est nul si le degré p de ω est $\geqslant 1$; pour $p = 0$, ω est une fonction contin. différentiable f, et alors $h^*(\omega)$ est la fonction constante égale à la valeur de f à l'origine.

Pour prouver ces affirmations, plaçons-nous par exemple dans le cas d'une forme ω de degré $p \geqslant 1$, et soit x un simplexe sing. différ. de dimension p. L'opérateur conique k satisfait à $x = \partial k(x) + k\partial(x)$, d'où

$$\int_{k\partial x} \omega = \int_x \omega - \int_{\partial kx} \omega$$

c'est-à-dire

$$\int_{\partial x} k^*(\omega) = \int_x \omega - \int_x k^*d(\omega)$$

Ceci prouve bien que $k^*(\omega)$ possède une différentielle extérieure égale à $\omega - k^*d(\omega)$.

En résumé, l'opérateur k^* montre que le groupe dérivé du groupe à dérivation A est trivial. En particulier, si une forme différentielle ω , dans R^n , est telle que $d\omega = 0$, ω est la différentielle extérieure d'une forme différentielle, à savoir la forme $k^*(\omega)$.

L'opérateur k^* opère aussi dans le groupe des formes différentielles de tout ensemble ouvert convexe de R^n , contenant l'origine. De plus, soit B le sous-groupe stable des formes de A qui sont nulles dans un voisinage ouvert de l'origine 0 (voisinage qui dépend de la forme considérée) ; B est non seulement stable pour d , mais pour k^* ; donc k^* opère dans le groupe quotient A/B , groupe qu'on peut appeler le groupe des formes différentielles à l'origine. Le groupe dérivé de ce groupe est donc trivial ; c'est là un fait qui jouera un rôle capital dans la démonstration du "théorème de DE RHAM" relatif à la cohomologie des variétés différentiables.

8.- Opérateurs d'homotopie dans le groupe des chaînes d'un complexe simplicial.

Soit E un ensemble abstrait ; désignons par la même lettre E le complexe simple qu'il définit (cf. exposé 6, paragraphe 1). Un sommet b de E définit un endomorphisme k , de degré $+1$, du groupe $C(E)$ des chaînes de E ; on définit k en associant, à chaque simplexe ordonné $(a_o,\dots,a_p)$, le simplexe ordonné $(b,a_o,\dots,a_p)$. L'opérateur d'homotopie h associé à k se détermine immédiatement : $h(x)$ est nul pour tout simplexe ordonné de dimension $\geqslant 1$, et, si x est un simplexe de dimension 0 (sommet de E), $h(x)$ est le sommet b . Donc h est un projecteur de $C(E)$ sur le sous-groupe formé des multiples entiers de l'unique simplexe (b) de dim. 0 . Par suite le groupe d'homologie de E et ses groupes de cohomologie sont triviaux.

Application : dans le groupe des cochaînes d'Alexander $\check{C}(E)$ d'un espace topologique E (cf. exposé 6, paragraphe 3), chaque point b de l'espace définit le sous-groupe des cochaînes dont le "support" ne contient pas b . Le groupe quotient s'appelle le groupe des cochaînes d'Alexander au point b . Comme le sous-groupe par lequel on a fait le quotient est stable pour l'opérateur k^* défini par b dans $C^*(E)$, et par suite dans $\check{C}(E)$, on voit que le groupe dérivé du groupe des cochaînes au point b (groupe de cohomologie au point b) est trivial.

Soit maintenant K une structure de complexe simplicial sur l'ensemble E . Le groupe des chaînes $C(K)$ s'identifie à un sous-groupe de $C(E)$, stable pour l'opérateur d (nous notons provisoirement d l'opérateur "bord" ∂ , pour des raisons typographiques) ; mais, en général, $C(K)$ n'est pas stable pour l'opérateur k défini plus haut.

Toutefois, soit u un endomorphisme de $C(E)$ tel que, pour toute partie finie L de E, le sous-groupe $C(L)$ soit stable pour u ; un tel endomorphisme prendra le nom d'endomorphisme simplicial du groupe $C(E)$. Alors, pour toute structure de complexe simplicial K sur E, le groupe $C(K)$ sera stable pour u, et u opèrera également sur les groupes de chaînes relatives ; le transposé u^* opèrera dans tous les groupes de cochaînes, et aussi (lorsque E est un espace topologique) dans le groupe des cochaînes d'Alexander. Cette définition étant posée, nous allons établir le

Théorème 3.- Soit, dans le groupe $C(E)$, un endomorphisme simplicial u qui soit aussi un endom. permis pour la structure de groupe gradué à dérivation. Si en outre u laisse invariant chaque simplexe de dimension 0, il existe un endomorphisme simplicial v, de degré $+1$, tel que

(2) $$e - u = vd + dv$$ (e désigne toujours l'autom. identique).

Il en résultera que, si K et K' sont deux sous-complexes de E tels que $K' \subset K$, u opère comme opérateur d'homotopie dans le groupe $C(K \bmod K')$, et u^* comme opérateur d'homotopie dans $C^*(K \bmod K')$. De même, si E est muni d'une structure topologique, u^* opère comme opérateur d'homotopie dans le groupe des cochaînes d'Alexander.

Démonstration : introduisons les notations suivantes. Pour tout simplexe ordonné α de E, soit L_α l'ensemble des éléments de α (qui est une partie finie de E) ; soit k_α l'opérateur (de degré $+1$) défini dans $C(L_\alpha)$ par le "premier sommet" de α. Rappelons que, pour toute chaîne β de $C(L)$, de dimension $p \geqslant 1$, on a

(3) $$\beta = k_\alpha\, d(\beta) + dk_\alpha(\beta) \quad .$$

On va définir, par récurrence sur l'entier p, la valeur de $v(\alpha)$ pour les chaînes α de dimension p, et cela de manière que :

condition (p') : pour toute partie finie L de E, v applique $C_p(L)$ dans $C_{p+1}(L)$;

condition (p'') : pour toute chaîne α de dimension p, on ait

(4) $$\alpha - u(\alpha) = vd(\alpha) + dv(\alpha)$$ (il suffira d'exprimer cette relation lorsque α est un simplexe ordonné de dimension p).

Une fois $v(\alpha)$ défini pour tous les degrés p, et les deux conditions satisfaites, on aura obtenu un endomorphisme simplicial v satisfaisant à (2), et le théorème sera démontré.

Commençons par la dimension 0. Posons $v(\alpha) = 0$ pour toute chaîne α de dimension 0 ; les conditions $(0')$ et $(0'')$ sont bien satisfaites. Supposons $v(\alpha)$ déjà défini pour les α de dimension $\leqslant p-1$, et soit α un simplexe ordonné de dimension p ; alors $vd(\alpha)$ est déjà défini. La chaîne de dimension p

$$\beta = \alpha - u(\alpha) - vd(\alpha)$$

appartient à $C(L_\alpha)$ parce que u est un endom. simplicial et que v satisfait à la condition $((p-1)')$. De plus $d\beta$ est nul, car la condition $((p-1)'')$ appliquée à la chaîne $d\alpha$ donne $d\alpha - ud(\alpha) = dvd(\alpha)$, et d'autre part $ud(\alpha) = du(\alpha)$ puisque u est un endom. <u>permis</u>, par hypothèse. Appliquons alors (3) à la chaîne β et à l'endomorphisme k_α de $C(L_\alpha)$: il vient $\beta = dk_\alpha(\beta)$. Nous poserons

$$v(\alpha) = k_\alpha(\beta) = k_\alpha(\alpha - u(\alpha) - vd(\alpha)) .$$

On a $v(\alpha) \in C(L_\alpha)$, ce qui prouve la condition (p') ; et la relation $\beta = dk_\alpha(\beta)$ donne la relation (4) de (p''). Ceci achève la démonstration du théorème 3.

9.- <u>Applications à l'homologie et à la cohomologie simpliciales</u>.

Rappelons (cf. exposé 2, paragraphe 1) que le groupe des "chaînes orientées" $c(K)$ a été défini comme un quotient du groupe des "chaînes ordonnées" $C(K)$, pour toute structure de complexe simplicial K sur un ensemble E. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que l'homomorphisme canonique de $H(K)$ (ou de $H(K \bmod K')$) dans $h(K)$ (ou $h(K \bmod K')$) est un <u>isomorphisme sur</u>.

Pour cela, nous allons définir dans le groupe $C(E)$ des chaînes "ordonnées" de E un projecteur u qui soit un endomorphisme permis, qui soit un endom. simplicial (au sens du numéro précédent), et dont le noyau Γ soit précisément le sous-groupe de $C(E)$ défini exposé 2, paragraphe 1, tel que $c(E)$ soit $C(E)/\Gamma$. Alors l'image de u s'identifiera au groupe $c(E)$, et comme u sera opérateur d'homotopie d'après le théorème 3 (car u laissera invariantes les chaînes de dimension 0), l'isomorphisme de $H(K)$ sur $h(K)$ résultera du théorème 2 (paragraphe 2 de cet exposé).

Rappelons que Γ est le sous-groupe engendré par :

1°) les simplexes ordonnés à sommets non tous distincts ;

2°) les chaînes de la forme $\alpha - \varepsilon_\sigma \sigma(\alpha)$, où α est un simplexe ordonné à sommets distincts (de dimension $p \geqslant 1$), et σ une permutation de l'ensemble de ses sommets.

Pour définir le projecteur u , fixons un <u>ordre</u> sur l'ensemble E , qui fasse de E un ensemble totalement ordonné ; appelons désormais cet ordre l'ordre "canonique". Si α est un simplexe ordonné à sommets non tous distincts, on posera $u(\alpha) = 0$. Si α est un simplexe ordonné à sommets distincts, soit σ la permutation qui range les sommets de α dans l'ordre "canonique" ; on posera $u(\alpha) = \varepsilon_\sigma \, \sigma(\alpha)$. On vérifie aisément que u est un endom. permis, et il est clair que u est un endom. simplicial (au sens du paragraphe 8). C'est bien un projecteur dont le noyau est Γ .

Nous obtenons ainsi l'isomorphisme des groupes d'homologie "ordonnée" et "orientée" pour les complexes K mod K' , et, par transposition, des groupes de cohomologie fournis respectivement par toutes les cochaînes et par les cochaînes alternées. D'une façon précise, le projecteur u permet d'identifier $c(E)$ à un sous-groupe de $C(E)$, autrement dit, définit un isomoprhisme u_1 de $c(E)$ dans $C(E)$. Le transposé u_1^* applique $C^*(E)$ sur le sous-groupe $c^*(E)$ des cochaînes alternées ; comme endomorphisme de $C^*(E)$, u_1^* est un projecteur, et un opérateur d'homotopie.

u_1^* définit aussi un projecteur dans le groupe $\check{C}(E)$ des cochaînes d'Alexander d'un espace topologique E : il projette $\check{C}(E)$ sur le sous-groupe des "cochaînes d'Alexander alternées" ; le groupe dérivé de ce sous-groupe s'identifie donc au groupe de cohomologie de Čech-Alexander de l'espace E .

Le projecteur u , ainsi que l'endomorphisme v qui lui est attaché (paragraphe 8) se prolongent évidemment au groupe des "chaînes infinies" de E ; on ne change donc pas le "groupe d'homologie de deuxième espèce" d'un complexe simplicial K , en substituant aux chaînes infinies "ordonnées" les chaînes infinies "orientées". Remarque analogue pour le groupe de cohomologie des "cochaînes finies" : on ne le change pas en se limitant aux cochaînes finies alternées.

<u>Remarque sur la structure multiplicative des cochaînes</u>.- Si α' et β' sont deux cochaînes <u>alternées</u>, leur produit (défini dans l'exposé 4, paragraphe 8) n'est pas, en général, une cochaîne alternée. Mais si on a totalement ordonné l'ensemble E , on vient de définir un projecteur u_1^* de $C^*(E)$ sur $c^*(E)$; on définit une multiplication dans le groupe $c^*(E)$ des cochaînes alternées en posant

$$\alpha' \cdot \beta' = u_1^*(\alpha' \beta') \quad .$$

Cette multiplication <u>dépend de l'ordre</u> choisi sur E : c'est la multiplication d'Alexander-Whitney. Si α' et β' sont des cocycles pour une structure de complexe simplicial K sur E , $u_1^*(\alpha' \beta')$ est un cocycle de la même classe de cohomologie que $\alpha' \beta'$; donc, quand on passe à l'<u>anneau de cohomologie</u>, la multiplication d'Alexander-Whitney redonne la multiplication de cet anneau, multiplication qui, elle, est indépendante de l'ordre choisi. Remarque analogue pour la multiplication des cochaînes alternées d'Alexander d'un espace topologique.