

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. CERF

## Groupes abéliens discrets

*Séminaire Henri Cartan*, tome 1 (1948-1949), exp. n° 3, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1948-1949\\_\\_1\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A3_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1948-1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

GROUPES ABÉLIENS DISCRETS.

(Résumé d'un exposé fait par J. CERF, le 29.11.1948).

Un groupe abélien sera toujours noté additivement, et considéré comme module sur l'anneau  $Z$  des entiers. Les notions de sous-groupe et de sous-module se confondent ; en particulier, les sous-groupes du groupe additif de  $Z$  sont les idéaux de l'anneau  $Z$ .

I.- Notions et propriétés valables pour tous les modules (Cf. BOURBAKI, Alg., chap. II).

Sous-groupe, groupe quotient. Somme directe de sous-groupes (en nombre fini ou infini). Paire de sous-groupes supplémentaires de  $G$  : dont  $G$  est somme directe. Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est facteur direct si  $H$  possède un supplémentaire. Notion de "projecteur" dans un groupe  $G$  : endomorphisme  $f$  tel que  $f \circ f = f$ . Paire de projecteurs attachés à une décomposition de  $G$  en 2 sous-groupes supplémentaires ; réciproque : tout projecteur  $f$  définit 2 sous-groupes supplémentaires, à savoir le noyau de  $f$  et l'image de  $f$ .

Combinaisons linéaires (finies). Famille libre (finie ou infinie) d'éléments de  $G$ . Base de  $G$  (s'il en existe) : famille libre engendrant  $G$  ; coordonnées relatives à une base (ce sont des entiers).

Un groupe abélien est libre s'il possède une base. Pour un groupe abélien quelconque  $G$ , tout système de générateurs de  $G$  définit un groupe libre (dont la base est en correspondance biunivoque avec  $G$ ) et  $G$  est isomorphe à un groupe quotient de ce groupe libre.

Si  $G$  a une base finie de  $n$  éléments, toute autre base de  $G$  a  $n$  éléments. (Cette propriété s'étend aux modules libres sur un anneau commutatif quelconque ayant un élément unité). D'où : rang d'un groupe libre (de base finie).

Sous-groupe de torsion d'un groupe abélien  $G$  : ensemble des  $x$  de  $G$  tels qu'il existe un entier  $n \neq 0$  avec  $nx = 0$  (élément d'ordre fini). Un groupe est dit "sans torsion" si son sous-groupe de torsion est réduit à  $0$ . Tout groupe libre est sans torsion ; la réciproque est inexacte (ex. : groupe des nombres rationnels). Pour un groupe quelconque  $G$  : le quotient de  $G$  par son sous-groupe de torsion est sans torsion (cette propriété se généralise à un module sur un anneau d'intégrité).

II.- Propriétés plus particulières tenant au fait que l'anneau des entiers est un anneau principal (i.e: tout idéal est principal).

1.- Un groupe monogène  $G$  (engendré par un seul élément) est isomorphe au quotient du groupe (anneau)  $Z$  par un sous-groupe (idéal)  $H$  de  $Z$ . Si  $H$  est nul,  $G$  est isomorphe à  $Z$ ; sinon,  $H$  a la forme  $nZ$  (multiples de l'entier  $n \neq 0$ ), et  $G$  est isomorphe au groupe des entiers modulo  $n$  ( $n \neq 1$  si  $G$  n'est pas réduit à  $0$ ); groupe cyclique d'ordre  $n$ .

Annulateur d'un groupe  $G$ : l'idéal des entiers  $p$  tels que  $px = 0$  pour tout  $x$  de  $G$  se compose des multiples d'un entier  $n \geq 0$  (annulateur de  $G$ ); si  $G$  est sans torsion,  $n = 0$  (réciproque inexacte).

2.- Sous-groupes d'un groupe libre.

Théorème 1.- Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.

La démonstration utilise l'axiome de choix lorsque la base du groupe libre  $G$  est infinie. Bien-ordonnons l'ensemble  $I$  des indices de la base  $(e_i)$  de  $G$ . Notons  $G_i$  le sous-groupe engendré par les  $e_j$  pour  $j \leq i$ , et  $G'_i$  le sous-groupe engendré par les  $e_j$  pour  $j < i$ . Posons  $H_i = H \cap G_i$ ,  $H'_i = H \cap G'_i$ . Le groupe  $H_i/H'_i$  est isomorphe au groupe des coeff. de  $e_i$  dans l'expression des éléments de  $H_i$  à l'aide de la base. Ce groupe est donc nul ou isomorphe à  $Z$ . S'il est isomorphe à  $Z$ , choisissons un élément  $h_i$  de  $H_i$  dont l'image dans  $H_i/H'_i$  engendre  $H_i/H'_i$ ; si au contraire  $H_i = H'_i$ , prenons  $h_i = 0$ . On montre que  $H$  est somme directe des sous-groupes engendrés par les  $h_i$ ; autrement dit, l'ensemble des  $h_i \neq 0$  est une base de  $H$ .

Remarque: si  $G$  est libre de rang fini  $n$ , tout sous-groupe  $H$  de  $G$  est libre, de rang  $\leq n$  (le rang peut être  $n$  sans que  $H$  soit identique à  $G$ ).

Corollaire: si  $H$  est facteur direct d'un groupe libre  $G$ , le groupe quotient  $G/H$  est libre (puisqu'il s'identifie à un sous-groupe de  $G$ ). Rappelons la réciproque (qui, elle, est valable pour tout module sur un anneau commutatif avec élément unité): si  $G/H$  est libre,  $H$  est facteur direct de  $G$  (prendre une base d'un sous-groupe supplémentaire de  $H$ ).

3.- Contenu d'un élément d'un groupe libre: c'est le p.g.c.d. des coordonnées relatives à une base: ce p.g.c.d. est indépendant de la base. Pour toute décomposition directe de  $G$  en 2 sous-groupes (supplémentaires)  $G_1$  et  $G_2$ , le contenu d'un élément  $x$  de  $G$  est le p.g.c.d. des contenus de ses composantes suivant  $G_1$  et  $G_2$ .

Pour que le quotient de  $G$  libre par le sous-groupe  $H$  engendré par un  $x$  de  $G$  soit sans torsion, il faut et il suffit que le contenu de  $x$  soit égal à un (évident). Mais il y a plus :

Lemme.— Si le contenu d'un élément  $x$  d'un groupe libre  $G$  est égal à un, le sous-groupe  $H$  engendré par  $x$  est facteur direct de  $G$  (et par suite il existe une base de  $G$  dont  $x$  fasse partie).

En effet, soit  $x = \sum_i n_i e_i$  l'expression de  $x$  à l'aide d'une base  $(e_i)$  de  $G$ . Puisque les entiers  $n_i$  (nuls sauf un nombre fini) sont premiers entre eux, il existe des entiers  $a_i$  tels que  $\sum a_i n_i = 1$ . A chaque  $y = \sum \eta_i e_i$  associons l'élément  $(\sum a_i \eta_i)x$  de  $H$ . Ceci définit un projecteur de  $G$  sur  $H$ , et par suite  $H$  est facteur direct de  $G$ .

#### 4.- Position d'un sous-groupe de rang fini dans un groupe libre.

Soit  $H$  un sous-groupe quelconque d'un groupe libre  $G$ . L'ensemble des contenus des éléments de  $H$  possède au moins un élément minimal  $n_1$ , dans le sens suivant : si le contenu d'un élément de  $H$  divise  $n_1$ , il est égal à  $n_1$ . On verra tout à l'heure que ceci implique que  $n_1$  divise (au sens large) le contenu de tout élément de  $H$ .

Prenons un élément  $h_1$  de  $H$ , de contenu  $n_1$  ; on a  $h_1 = n_1 e_1$ , où  $e_1 \in G$ , et il existe un projecteur  $f$  de  $G$  sur le sous-groupe  $G_1$  engendré par  $e_1$ . Je dis que  $f$  applique  $H$  sur le sous-groupe  $H_1 = H \cap G_1$  engendré par  $h_1$ . En effet,  $f(H)$  est un sous-groupe de  $G_1$ , donc est engendré par un élément  $ne_1$ , et comme  $f(H)$  contient  $H_1$ ,  $n$  divise  $n_1$ . Soit  $x$  un élément de  $H$  tel que  $f(x) = ne_1$  ; le contenu de  $x$  divise celui de sa composante  $f(x)$  dans  $G_1$ , donc divise  $n$ , et a fortiori divise  $n_1$ . Mais puisque  $n_1$  est un contenu minimal, ceci implique que  $n = n_1$  ; ainsi  $f(H) = H_1$ .

Le projecteur  $f$  définit une décomposition de  $G$  suivant  $G_1$  et le noyau  $G'$  de  $f$  ; dans cette décomposition,  $H$  est décomposé suivant  $H_1$  et  $H' = H \cap G'$ . Je dis que le contenu de tout élément de  $H'$  est un multiple (au sens large) de  $n_1$ . En effet, si  $x$  est dans  $H'$ , le contenu de  $x + n_1 e_1$  (qui est dans  $H$ ) divise le contenu de  $x$  et divise  $n_1$  ; d'après la propriété minimale de  $n_1$ , il est égal à  $n_1$ , ce qui prouve que  $n_1$  divise le contenu de  $x$ .

Si maintenant  $H$  est supposé de rang fini  $r$ , il vient aussitôt, par récurrence sur  $r$  :

Théorème 2.— Si  $H$  est un sous-groupe de rang fini  $r$  d'un groupe libre

$G$ , il existe un facteur direct  $K$  de  $G$ , une base finie  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $K$ , et une suite d'entiers  $n_1, \dots, n_r$  (dont chacun divise le suivant), tels que les éléments  $n_i e_i$  constituent une base de  $H$ .

Une telle décomposition de  $G$  (relative à  $H$ ) n'est pas unique ; mais il résultera du théorème 4 ci-dessous que la suite des entiers  $n_1, \dots, n_r$  est déterminée sans ambiguïté par le groupe  $G$  et son sous-groupe  $H$  de rang  $r$ . On l'appelle la suite des diviseurs élémentaires du couple  $(G, H)$ .

Corollaire : si  $G$  est libre et si  $H$  est un sous-groupe de rang fini tel que  $G/H$  soit sans torsion,  $H$  est facteur direct et  $G/H$  est libre (généralisation du lemme du n° 3).

5.- Structure des groupes abéliens de type fini (i.e: engendrés par un nombre fini d'éléments).

Un tel groupe  $M$  est quotient d'un groupe libre  $G$  de rang fini  $p$ , par un sous-groupe  $H$  de rang  $r \leq p$ . Le théorème 2 montre que  $M$  est somme directe de  $r$  groupes  $Z/e_i Z$  et de  $p-r$  groupes isomorphes à  $Z$ . Parmi les groupes  $Z/e_i Z$ , ceux pour lesquels  $e_i = 1$  sont réduits à  $0$  ; on peut les laisser de côté. D'où :

Théorème 3.- Tout groupe abélien  $M$  de type fini est somme directe d'un groupe libre de rang fini et de groupes cycliques (en nombre fini) dont les ordres  $e_i \neq 1$  sont tels que chacun d'eux divise le suivant.

Une telle décomposition d'un groupe  $M$  sera dite canonique. Il existe en général plusieurs décompositions canoniques d'un groupe donné  $M$ . Cependant la somme directe des sous-groupes cycliques d'une décomposition est évidemment le sous-groupe de torsion  $T$  de  $M$  ; quant au groupe libre de la décomposition, il est isomorphe au groupe quotient  $M/T$  ; son rang s'appelle parfois le nombre de Betti du groupe  $M$  ; c'est un invariant du groupe  $M$ .

Corollaires.- Tout groupe sans torsion, engendré par un nombre fini d'éléments, est libre. Dans un groupe de type fini, le sous-groupe de torsion est facteur direct, le quotient est libre.

Théorème 4.- Pour toute décomposition canonique d'un groupe abélien  $M$  de type fini, le nombre des sous-groupes cycliques et leurs ordres sont toujours les mêmes.

Les ordres des groupes cycliques s'appellent les "coefficients de torsion" de  $M$  ; avec le nombre de Betti de  $M$ , ils déterminent entièrement le groupe  $M$  (à une isomorphie près).

Une démonstration simple du théorème 4 fait appel à la notion d'algèbre extérieure d'un module (Voir BOURBAKI, Alg., chap. III). Elle se généraliserait à des modules sur un anneau commutatif quelconque (avec élément unité). En voici le principe dans le cas des groupes abéliens. Pour tout groupe abélien en  $M$ , on désigne par  $E^n(M)$  le sous-groupe de l'algèbre extérieure  $E(M)$  formé des éléments de degré  $n$ ;  $E^1(M)$  est identifié à  $M$ . Supposons alors que  $M$  soit somme directe de  $p$  groupes monogènes isomorphes respectivement à des  $Z/e_i Z$ , où la suite des entiers  $e_i \neq 1$  (dont les derniers peuvent être nuls) est telle que chacun d'eux divise le suivant. Alors  $E^n(M)$  est nul pour  $n > p$ , non nul pour  $n \leq p$ ; de plus, chaque  $e_i$  est l'annulateur du groupe  $E^{p-i+1}(M)$ ; en particulier, le dernier des  $e_i$  (qui peut être nul) est l'annulateur de  $M$  lui-même.

#### 6.- Application à la topologie algébrique.

Si on a un complexe simplicial fini  $K$ , le groupe des chaînes orientées (exposé 2) est un groupe libre de rang fini. Il en est donc de même du sous-groupe des cycles; par suite le groupe d'homologie de  $K$  est de type fini. Pour chaque dimension  $n$ , on peut donc parler du nombre de Betti de  $K$  pour la dimension  $n$ , et des coefficients de torsion de  $K$  pour la dimension  $n$ . La connaissance des nombres de Betti et des coefficients de torsion détermine les groupes d'homologie de toutes dimensions de  $K$ .

---