J. P. Serre

Groupe d'homologie d'un complexe simplicial. Généralités sur les groupes à dérivation

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. nº 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A2_0>

GROUPE D'HOMOLOGIE D'UN COMPLEXE SIMPLICIAL
GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES À DÉRIVATION.

(D'après un exposé de J.P. SERRE, le 15.11.1948)

1.- Chaînes d'un complexe simplicial.

Soit K un complexe simplicial. On appelle "simplexe ordonné de dimension p " toute suite de $p+1$ éléments de K , distincts ou non, qui appartiennent à un même simplexe de K (on distingue donc entre un "simplexe" tout court, qui est une partie de K , et un "simplexe ordonné", qui est une famille d'éléments, non nécessairement distincts, d'un simplexe de K). Un simplexe ordonné sera noté $(a_o , a_1 , \ldots , a_p)$; l'ordre dans lequel sont écrits les "sommets" a_i est essentiel.

Considérons le groupe abélien $C_p(K)$ formé des combinaisons linéaires formelles (finies) de simplexes ordonnés de dimension p , avec des coefficients entiers ($\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$) quelconques. C'est le groupe <u>libre</u> ayant pour base l'ensemble des simplexes ordonnés de dimension p . Ses éléments s'appellent les <u>chaînes ordonnées</u> de K , de dimension p .

Soit $C(K)$ la <u>somme directe</u> des groupes $C_p(K)$ relatifs à toutes les valeurs de l'entier p (pour $p < 0$ on convient que $C_p(K)$ se réduit à 0). C'est le groupe libre ayant pour base l'ensemble de tous les simplexes ordonnés (de toutes dimensions) du complexe K . On l'appelle le groupe des chaînes ordonnées de K .

<u>Simplexe orienté</u>.- Nous allons définir une relation d'équivalence, dans le groupe $C(K)$, en identifiant chaque simplexe ordonné x (considéré comme élément de $C(K)$) à chacun des simplexes $\varepsilon_\sigma \sigma(x)$; la notation $\sigma(x)$ désigne le simplexe obtenu en effectuant une <u>permutation</u> quelconque sur l'ensemble des indices des sommets de x , et ε_σ désigne la "signature" de la permutation σ , c'est-à-dire le nombre $+1$ ou -1 suivant la parité de cette permutation. Si les sommets d'un simplexe ordonné de dimension p sont tous distincts, les $(p+1)!$ permutations donnent naissance à autant de simplexes ordonnés distincts ; la relation d'équivalence précédente les identifie tous à l'un d'eux ou à son opposé. La classe des $(p+1)!/2$ simplexes provenant de l'un d'eux par permutation paire de ses sommets constitue ce qu'on appelle un <u>simplexe orienté</u>. Un même simplexe (partie de K) peut être affecté de <u>deux</u> orientations différentes

(sauf pour $p=0$, auquel cas il n'est pas question d'orientation).

Lorsque les sommets d'un simplexe ordonné x ne sont pas tous distincts, l'identification de x aux $\varepsilon_\sigma\, \sigma(x)$ conduit à identifier x à $-x$ dans le groupe $C(K)$. Dans ce cas, nous ferons plus : nous identifierons x à 0 . Ceci conduit à considérer le groupe $c(K)$, quotient du groupe $C(K)$ par le sous-groupe (dénoté provisoirement Γ) engendré par les simplexes ordonnés à sommets non distincts, et par les chaînes de la forme $x - \varepsilon_\sigma\, \sigma(x)$, où x désigne un simplexe ordonné à sommets distincts, et σ une permutation quelconque sur ses sommets. Le groupe $c(K)$ s'appelle le groupe des <u>chaînes orientées</u> du complexe K ; il est somme directe des sous-groupes $c_p(K)$ des chaînes orientées de dimension p . Choisissons, pour chaque simplexe de dimension p , une relation d'ordre bien déterminée sur l'ensemble de ses sommets (pour ce faire, on peut se donner une fois pour toutes une relation d'ordre sur K , qui fasse de K un ensemble totalement ordonné) ; alors les images dans $c_p(K)$, des simplexes ordonnés ainsi choisis, constituent une <u>base</u> du groupe $c_p(K)$, qui est donc un groupe <u>libre</u>.

2.- <u>Bord</u>. <u>Groupe d'homologie</u>.

Dans chacun des groupes $C(K)$ et $c(K)$, on va définir un endomorphisme (application du groupe en lui-même, qui transforme une somme en somme), noté ∂ . Commençons par $C(K)$. Soit x un simplexe ordonné, considéré comme élément de $C(K)$; le <u>bord</u> de x , noté ∂x , est un élément de $C(K)$, défini comme suit :

si $x = (a_0)$ de dim. 0 , on pose $\partial x = 0$;
si $x = (a_0,a_1)$ de dim. 1 , $\partial x = (a_1)-(a_0)$;
si $x = (a_0,\dots,a_p)$, $\partial x = \sum_i (-1)^i (a_0,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_p)$.

où la notation $(a_0,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_p)$ désigne le simplexe ordonné obtenu par suppression du sommet a_i dans le simplexe $(a_0,\dots,a_p)$.

Le bord d'une chaîne ordonnée se définit par linéarité à partir des bords des simplexes ord. qui la composent. Ce bord ∂x dépend linéairement de la chaîne x . Si x est de dimension p , ∂x est de dimension $p-1$.

Pour définir l'opérateur "bord" dans $c(K)$, il suffit de remarquer que ∂ transforme tout élément de Γ en un élément de Γ (considérer le bord d'un simplexe ordonné qui a au moins deux sommets égaux, puis voir ce que devient le bord d'un simplexe ordonné à sommets distincts quand on échange deux sommets consécutifs). Donc on peut définir ∂ dans le groupe quotient $C(K)/\Gamma$, qui est $c(K)$ par définition. Cet opérateur ∂ précise l'intuition que l'on a de la frontière "orientée" d'un simplexe "orienté", comme réunion des faces orientées de ce simplexe.

Propriété essentielle de ∂ : <u>pour tout</u> x , <u>on a</u> $\partial(\partial x) = 0$. Il suffit de le vérifier dans le groupe $C(K)$. C'est immédiat, en calculant explicitement $\partial(\partial x)$ lorsque x est un simplexe ordonné $(a_o,\ldots,a_p)$; la propriété en résulte pour une chaîne quelconque, par linéarité.

Des considérations géométriques assez intuitives conduisent, au moins dans le cas de $c(K)$, à poser les définitions suivantes, que nous donnons aussi bien pour $C(K)$ que pour $c(K)$:

Une chaîne ordonnée (resp. orientée) x est un <u>cycle</u> si $\partial x = 0$; un <u>bord</u> s'il existe un y tel que $x = \partial y$. Tout bord est un cycle (à cause de $\partial\partial = 0$).

Notations : $Z(K)$ pour le sous-groupe des cycles de $C(K)$;
$B(K)$ pour le sous-groupe des bords de $C(K)$.

Le groupe quotient $Z(K)/B(K)$ s'appelle le <u>groupe d'homologie</u> du complexe K , et se note $H(K)$. On définit de même $z(K)$, $b(K)$ et $h(K) = z(K)/b(K)$. On verra plus tard qu'il existe un isomorphisme (canonique) de $H(K)$ sur $h(K)$.

Les éléments de $H(K)$ s'appellent aussi "classes d'homologie" ; deux éléments de $C(K)$ sont dits homologues si leur différence est un bord.

$Z(K)$ est somme directe des sous-groupes $Z_p(K) = Z(K) \cap C_p(K)$ (cycles de dimension p) ; $B(K)$ est somme directe des $B_p(K) = B(K) \cap C_p(K)$ (bords de dimension p). Par suite, $H(K)$ s'identifie canoniquement à la somme directe des $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ (groupe d'homologie pour la dimension p).

On verra plus tard que les groupes d'homologie $H_p(K)$ (et les groupes $h_p(K)$ qui leur sont isomorphes) sont des <u>invariants topologiques</u> de l'espace $\tilde{K}$. On remarquera aussi que si K est <u>fini</u>, le groupe $c(K)$ a une base finie, et par suite $h(K)$ a un nombre fini de générateurs, ce qui permet de préciser sa structure (Voir l'exposé 3). D'ailleurs $h_p(K)$ est nul pour toute dimension p strictement plus grande que la plus grande des dimensions des simplexes de K .

<u>Interprétation de</u> $H_o(K)$.- La somme des coefficients de tout élément de $B_o(K)$ est nulle ; donc une chaîne de dimension 0 , de la forme $n(a_o)$ (où a_o désigne un sommet de K) ne peut être homologue à 0 que si $n=0$. Si K est <u>connexe</u> (définition évidente), tout sommet de K est homologue à un sommet fixe, arbitrairement choisi ; par suite $H_o(K)$ est isomorphe au groupe additif des entiers. Dans le cas général où K n'est pas connexe, on voit que $H_o(K)$ est somme directe de sous-groupes isomorphes au groupe additif des entiers, en nombre égal à celui des "composantes connexes" de K . Ces composantes connexes

(au sens simplicial) correspondent biunivoquement aux composantes connexes (au sens topologique) de l'espace $\tilde{K}$, ce qui prouve la signification topologique du groupe $H_p(K)$ dans le cas particulier $p=0$.

3.- Groupes d'homologie d'un complexe simple.

Définition : un complexe K sera dit simple si toute partie finie de K est un simplexe (i.e. appartient à la famille Φ qui définit la structure de complexe simplicial). Dans tout complexe K , le complexe sous-jacent (cf. exposé 1) d'un simplexe de K est simple.

Théorème.- Si K est un complexe simple, $H_o(K)$ est isomorphe au groupe additif des entiers, et $H_p(K)$ est nul pour $p \geqslant 1$.

La première partie du théorème résulte de la fin du paragraphe 2. Pour établir la deuxième, associons à chaque simplexe ordonné x , de dimension $p \geqslant 0$, le simplexe $t(x)$, de dimension $p+1$, défini ainsi :

$$t(a_o,\ldots,a_p) = (b,a_o,\ldots,a_p) \quad ,$$

où b désigne un sommet de K , choisi une fois pour toutes. L'opérateur t se prolonge en un endomorphisme de $C(K)$, noté encore t ; on vérifie que si x est un simplexe ordonné de dimension $p \geqslant 1$, on a

$$x = \partial(t(x)) + t(\partial x) \quad ;$$

cette relation linéaire est donc encore vraie pour toute chaîne x de dimension $p \geqslant 1$. Donc si x est un cycle, $x = \partial(t(x))$ est homologue à 0 ; ceci montre que $H_p(K)$ est nul pour $p \geqslant 1$. - La même démonstration vaut pour $h(K)$.

4.- Généralités sur les groupes à dérivation.

Les groupes de chaînes $C(K)$ et $c(K)$ sont des exemples de ce qu'on peut appeler groupes à dérivation ; nous en verrons plus tard d'autres exemples, ne serait-ce que celui des formes différentielles extérieures (sur une variété différentiable) munies de l'opérateur de différentiation extérieure.

Un groupe à dérivation est un groupe abélien G muni d'un endomorphisme d tel que $d(dx) = 0$ pour tout x de G , Le noyau de cet endomorphisme (sous-groupe des x tels que $dx = 0$) se note $Z(G)$; ses éléments prennent parfois le nom de cycles (cf. ci-dessus), d'autres fois celui de cocycles (voir exposé 4). L'image de l'endomorphisme d (ensemble des dy où y parcourt G) se note $B(G)$; ses éléments prennent parfois le nom de bords (ou bien de cobords). On a $B(G) \subset Z(G)$ parce que $d \circ d = 0$. Le groupe quotient $Z(G)/B(G)$ se note

$H(G)$; on l'appelle parfois groupe d'homologie de G , d'autres fois groupe de cohomologie.

On aura presque toujours à considérer, sur un groupe à dérivation, une <u>structure graduée</u> compatible avec l'opérateur d . Définissons d'abord ce qu'on entend, en général, par <u>groupe gradué</u> : c'est un groupe abélien G muni d'une décomposition directe $G = \sum_n G_n$, où les G_n sont des sous-groupes tels que tout élément de G s'écrive d'une seule manière $\sum_n g_n$, les $g_n \in G_n$ étant nuls sauf un nombre fini. Les éléments de G_n s'appellent les éléments <u>homogènes de degré</u> n ; si $g = \sum_n g_n$, g_n s'appelle la composante homogène de degré n de g . L'application $g \longrightarrow g_n$ sera notée θ_n ; c'est un <u>projecteur</u>, c'est-à-dire une application linéaire de G dans G telle que $\theta_n \circ \theta_n = \theta_n$. On notera que $\theta_n \circ \theta_m = 0$ pour $n \neq m$.

Si maintenant G est un groupe à dérivation, une structure graduée sur G sera dite compatible avec l'opérateur d s'il existe un entier r (indépendant de n) tel que $d \circ \theta_n = \theta_{n+r} \circ d$ pour tout n , ce qui implique que d applique G_n dans G_{n+r} . On dira que l'endomorphisme d est <u>de degré</u> r . Le plus souvent, on supposera $\theta_n = 0$ pour $n < 0$, et $r = \pm 1$. Dans le cas du groupe des chaînes d'un complexe simplicial, r est égal à -1 .

Soit G un groupe gradué à dérivation, dans le sens qui vient d'être dit. Pour que $x \in G$ soit un cycle, il faut et il suffit que $\theta_n(x)$ soit un cycle pour tout n ; θ_n applique $Z(G)$ sur un sous-groupe $Z_n(G)$ et définit une structure graduée sur $Z(G)$. On a de même une structure graduée sur $B(G)$. Par passage au quotient, on obtient des projecteurs dans $H(G)$; ces projecteurs appliquent $H(G)$ sur des sous-groupes $H_n(G)$, qu'on identifie aux groupes quotients $Z_n(G)/B_n(G)$.

5.- <u>Homomorphismes permis</u>.

Soient G et G' deux groupes à dérivation, dont nous désignerons les opérateurs par la même lettre d , ceci n'entraînant pas de confusion. Un homomorphisme f de G dans G' sera dit <u>permis</u> si on a

$$f \circ d = d \circ f \text{ , c'est-à-dire } f(dx) = d(f(x)) \text{ pour tout } x \text{ de } G \text{ .}$$

Si de plus G et G' sont gradués, auquel cas nous utiliserons la même lettre θ_n pour désigner les projecteurs de G et ceux de G', on réservera le nom d'homomorphisme permis à un homom. f tel que $f \circ \theta_n = \theta_n \circ f$ pour tout n. Alors f applique G_n dans G'_n.

<u>Exemple</u> : soient deux complexes simpliciaux K et K', et φ une application simpliciale de K dans K' (exposé 1). On définit un homomorphisme <u>permis</u> f de $C(K)$ dans $C(K')$ en posant

$$f(a_o,\ldots,a_n) = (\varphi(a_o),\ldots,\varphi(a_n)) .$$

Dans le cas général, soit f un homom. permis de G dans G' ; alors f applique $Z(G)$ dans $Z(G')$, et $B(G)$ dans $B(G')$; par passage au quotient, on obtient un homomorphisme $\bar{f}$ de $H(G)$ dans $H(G')$; $\bar{f}$ est ainsi canoniquement associé à f. Si de plus G et G' sont gradués, $\bar{f}$ applique $H_n(G)$ dans $H_n(G')$.

En particulier, une application simpliciale d'un complexe K dans un complexe K' définit un homomorphisme du groupe d'homologie de K dans le groupe d'homologie de K', pour chaque dimension.

<u>Transitivité</u> : soient G, G', G'' trois groupes à dérivation, f un homomorphisme permis de G dans G', et f' un homomorphisme permis de G' dans G''. Le composé $g = f' \circ f$ est un homomorphisme permis de G dans G'' (immédiat). Si $\bar{f}$ (resp. $\bar{f}'$, $\bar{g}$) désigne l'homomorphisme correspondant de $H(G)$ dans $H(G')$ (resp. de $H(G')$ dans $H(G'')$, resp. de $H(G)$ dans $H(G'')$), on a $\bar{g} = \bar{f}' \circ \bar{f}$.
– En particulier, si $G'' = G$, et si f et f' sont deux isomorphismes, réciproques l'un de l'autre, alors $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ sont deux isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Cas de la composition des applications simpliciales : traduire les résultats précédents.

6.– <u>Sous-groupes et groupes quotients de groupes à dérivation</u>.

Soit F un sous-groupe d'un groupe à dérivation G. Pour que l'opérateur d de G définisse un endomorphisme de F, il faut et il suffit que dx appartienne à F pour tout x de F, autrement dit que F soit <u>stable</u> pour d. On dira aussi que F est un <u>sous-groupe permis</u>. Si en outre G est gradué, on réservera le nom de sous-groupe permis aux sous-groupes qui sont stables pour tous les projecteurs θ_n ; un tel sous-groupe sera muni d'une structure de groupe gradué à dérivation.

L'application naturelle de F dans G (celle qui, à un élément x de F, associe le même élément x considéré comme appartenant à G) est un homomorphisme permis. On en déduit un homomorphisme (canonique)

$$\omega : H(F) \to H(G) \quad (\text{resp. } H_n(F) \to H_n(G) \text{ dans le cas d'une graduation}) .$$

ω n'est pas forcément biunivoque : un "cycle" de F peut être homologue à 0 dans G sans l'être dans F.

Exemple : soit L un sous-complexe d'un complexe simplicial K ; le groupe des chaînes $C(L)$ s'identifie à un sous-groupe permis de $C(K)$. D'où un homomorphisme canonique : $H(L) \to H(K)$.

Il est un cas où l'on est certain que $H(F) \to H(G)$ est biunivoque : c'est celui où il existe un projecteur f de G sur F qui soit un homom. permis. En effet, en effectuant successivement ω, puis l'homom. $H(G) \to H(F)$ défini par f, on obtient l'automorphisme identique de $H(F)$. D'où le résultat. C'est ainsi qu'on peut montrer que si un complexe simplicial K est réunion de complexes K_i disjoints (i.e: les sous-complexes K_i n'ont 2 à 2 aucun sommet commun, et tout simplexe de K est contenu dans l'un des K_i), le groupe $H(K)$ s'identifie à la somme directe des $H(K_i)$.

Soit de nouveau G un groupe à dérivation, et F un sous-groupe permis de G. L'endomorphisme d applique toute classe modulo F dans une classe modulo F, donc définit un endomorphisme (que nous noterons encore d) du groupe quotient G/F. Ce groupe est donc aussi muni d'une structure de groupe à dérivation. Si de plus G est gradué, et F sous-groupe permis, les projecteurs θ_n opèrent dans G/F par passage au quotient, et G/F devient un groupe gradué à dérivation.

L'application naturelle de G sur G/F (qui, à chaque x de G, associe la classe de x modulo F) est un homom. permis ; d'où un homomorphisme (canonique)

$$\pi : H(G) \to H(G/F) \quad (\text{resp. } H_n(G) \to H_n(G/F)).$$

Exemple : soit L un sous-complexe d'un complexe K. Le groupe $C(K)/C(L)$ s'appelle le groupe des chaînes de K modulo L ; on peut le noter $C(K/L)$. Il lui correspond un groupe d'homologie de K modulo L, noté $H(K/L)$; pour chaque dimension n, on peut préciser $H_n(K/L)$. On verra que les groupes $H_n(K/L)$ sont des invariants topologiques du couple formé de l'espace topologique $\widetilde{K}$ et de son sous-espace (fermé) $\widetilde{L}$. Dès maintenant, nous avons un homomorphisme canonique de $H(K)$ dans $H(K/L)$.

<u>Autre exemple</u> : prenons pour groupe G le groupe $C(K)$ des chaînes ordonnées d'un complexe K, pour groupe quotient G/F le groupe $c(K)$ des chaînes orientées. On en déduit un homomorphisme canonique : $H(K) \to h(K)$. Nous verrons plus tard que c'est un isomorphisme du premier groupe sur le second.

7.- <u>Le troisième homomorphisme et les suites exactes</u>.

Soient toujours G un groupe à dérivation (éventuellement gradué), et F un sous-groupe permis. On a déjà défini deux homomorphismes canoniques

$$\omega : H(F) \to H(G) \quad \text{et} \quad \pi : H(G) \to H(G/F) \quad .$$

On va définir un troisième homomorphisme $\delta : H(G/F) \to H(F)$; mais celui-ci, contrairement aux 2 autres, ne conservera pas les degrés : il transformera $H_n(G/F)$ dans $H_{n+r}(F)$, r désignant le degré de l'opérateur d (cf. paragraphe 4).

Pour définir δ, partons d'un élément α de $H(G/F)$; il provient d'un cycle de G/F, qui lui-même provient d'un élément x de G tel que $dx \in F$. Cet élément dx est un cycle de F, donc définit un élément β de $H(F)$. Montrons que β est bien déterminé par α. On peut remplacer x par $x+y+dz$ (où $y \in F$ et $z \in G$) sans changer α ; alors dx est remplacé par $dx+dy$, qui a même image que dx dans $H(F)$. L'élément β sera alors, par définition, le transformé de α par l'homomorphisme δ, qui se trouve ainsi défini.

<u>Théorème</u>.- Les trois homomorphismes

$$\begin{tikzcd} H(F) \arrow[rr, "\omega"] & & H(G) \arrow[dl, "\pi"] \\ & H(G/F) \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

forment une <u>suite exacte</u> : cela signifie que le <u>noyau</u> d'un quelconque de ces homomorphismes est précisément l'<u>image</u> de l'homomorphisme précédent. Par exemple, le noyau de ω est le sous-groupe de $H(F)$, image de $H(G/F)$ par δ.

La vérification de ce théorème ne présente pas de difficulté. Mais ses conséquences seront d'une extrême importance. Par exemple, ce théorème permettra d'analyser les propriétés de situation d'un sous-espace fermé dans un espace topologique (ex.: théorème de Jordan).

Dans le cas où G est gradué, il convient de décomposer les homomorphismes de la suite exacte suivant les degrés. On obtient, lorsque d est de degré $+1$, la suite exacte (infinie)

$$0 \to H_0(F) \to H_0(G) \to H_0(G/F) \to H_1(F) \to \dots \to H_{n-1}(G/F) \to H_n(F) \to H_n(G) \to H_n(G/F) \dots$$

et, dans le cas où d est de degré -1 :

$$0 \leftarrow H_o(G/F) \leftarrow H_o(G) \leftarrow H_o(F) \leftarrow H_1(G/F) \leftarrow \dots \leftarrow H_{n-1}(F) \leftarrow H_n(G/F) \leftarrow H_n(G) \leftarrow H_n(F) \dots$$

<u>Naturalité</u> : les 3 homomorphismes ω, π et δ sont <u>naturels</u>, dans le sens suivant. Supposons un autre groupe à dérivation G', et un homomorphisme permis f de G dans G', qui applique un sous-groupe permis F de G dans un sous-groupe permis F' de G'. On en déduit un homomorphisme permis de G/F dans G'/F', et par suite on a 3 homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H(F) & H(G) & H(G/F) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ H(F') & H(G') & H(G'/F') \end{array} .$$

Cela dit, la naturalité s'exprime par le <u>diagramme de compatibilités</u> :

$$\begin{array}{ccccccc} H(F) & \longrightarrow & H(G) & \longrightarrow & H(G/F) & \longrightarrow & H(F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H(F') & \longrightarrow & H(G') & \longrightarrow & H(G'/F') & \longrightarrow & H(F') \end{array}$$

La signification de cette écriture est la suivante : de quelque manière que l'on compose des homomorphismes désignés par des flèches, l'homomorphisme composé ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée, non du chemin suivi.

<u>Application aux complexes simpliciaux</u> : les résultats précédents se traduisent dans le cas où l'on envisage un complexe K, un sous-complexe L, et les trois groupes d'homologie de L, de K, et de K modulo L.