TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

CHARLES EHRESMANN

Espèces de structures sous-inductives

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 7 (1965), exp. nº 3, p. 1-50

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1965__7__A3_0>

CAHIERS
de
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
1965

Vol. VII

ESPECES DE STRUCTURES SOUS-INDUCTIVES

par Charles Ehresmann

Préface.

Comme le texte de mon cours d'été de Montréal (1961), intitulé «Catégories différentiables et géométrie différentielle», devait être multigraphié d'avance, j'avais commencé une rédaction, avec l'intention de la transformer ultérieurement en livre. La rédaction était divisée en trois chapitres : le premier sur la théorie algébrique des catégories, le second sur les espèces de structures locales; le troisième sur les catégories différentiables et la géométrie différentielle. Mais seuls le premier chapitre et une partie du second ont été achevés à temps pour être inclus dans le cours multigraphié [1]. Dès que le texte complet du chapitre 2 fut écrit (et partiellement multigraphié à Paris), nous en avons publié les résultats dans [0]. Cependant l'obtention de nouveaux résultats, à savoir la théorie des catégories structurées et des espèces de structures structurées [10 a], nous a conduit à modifier le projet initial de livre. Pour donner quand même les démonstrations des théorèmes énoncés dans [0], nous avons condensé les parties II et III du chapitre 2 dans l'article [2]. Le présent mémoire représente la partie IV (la dernière) de ce chapitre 2 rédigé en 1961; il fait donc suite à [2] dont les notations sont utilisées. Signalons toutefois les différences de notations suivantes entre [2] et le texte actuel :

1) Les lettres de ronde ont été remplacées par des majuscules italiques, pour simplifier la composition.

2) La relation d'ordre sur le groupoïde $H(S)$ (resp. sur $A(S)$) notée $\ll$ dans [2] est ici désignée par $\precsim$.

Cet article est consacré à l'étude des foncteurs sous-inductifs et des espèces de structures sous-préinductives au-dessus d'un groupoïde sous-préinductif. Les principaux résultats sont contenus dans le n°3; en particulier, les théorèmes de complétion et d'élargissement complet d'une espèce de structures locales, utilisés dans tant de constructions mathématiques (variétés différentiables, espaces fibrés, structures feuilletées..). Dans un prochain travail, nous généraliserons ces résultats au cas des foncteurs sous-prélocaux, à l'aide des fusées [9].

Au texte de 1961, nous ajoutons en Appendice un «guide» de nos récentes publications sur la théorie des catégories ordonnées.

1. Groupoïde inductif au-dessus d'un groupoïde inductif.

DEFINITION 1. *Soient* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{A}'$ *deux classes sous-préinductives. Une application* p *de* $\mathfrak{A}'$ *dans* $\mathfrak{A}$ *est dite* sous-inductive *si, pour tout* $a \in \mathfrak{A}'$, $b \in \mathfrak{A}'$ *et* $c \in \mathfrak{A}'$ *tels que* $a < c$ *et* $b < c$, *on a :*

$$p(a \cap b) = p(a) \cap p(b).$$

L'application p *est dite* inductive *si elle est sous-inductive et si, pour toute sous-classe* B *de* $\mathfrak{A}'$, p *applique la congrégation de* B *dans la congrégation de* $p(B)$ *:* $p(\underline{\bigcup} B) \subset \underline{\bigcup}\, p(B)$.

Si p est application sous-inductive, p est compatible avec les structures d'ordre, c'est-à-dire que, si $a < b$, où $a \in \mathfrak{A}'$ et $b \in \mathfrak{A}'$, on a $p(a) < p(b)$.- Inversement si p est une application de $\mathfrak{A}'$ dans $\mathfrak{A}$ compatible avec les structures d'ordre, on a toujours pour tout $a \in \mathfrak{A}'$ et $b \in \mathfrak{A}'$, a et b majorés par $c \in \mathfrak{A}'$

$$p(a \cap b) < p(a) \cap p(b) \text{ et } \overset{p(c)}{\bigcup} p(B) < p(\overset{c}{\bigcup} B),$$

pour toute sous-classe B de $\mathfrak{A}'$ admettant un c-agrégat et telle que $p(B)$ admette un $p(c)$- agrégat.

Si p est une application inductive d'une classe préinductive $\mathfrak{A}'$ dans une classe préinductive $\mathfrak{A}$ et si B est une sous-classe de $\mathfrak{A}'$ admettant un agrégat dans $\mathfrak{A}'$, alors $p(B)$ admet $p(\bigcup B)$ pour agrégat dans $\mathfrak{A}$.

DEFINITION 2. *Soient* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{A}'$ *deux classes sous-préinductives. Une application* p *de* $\mathfrak{A}'$ *dans* $\mathfrak{A}$ *est dite* (sous)-inductive stricte *si* p *est une application (sous)-inductive et si les relations* $a < b$ *et* $p(a) = p(b)$, *où* $a \in \mathfrak{A}'$ *et* $b \in \mathfrak{A}'$, *entraînent* $a = b$.

PROPOSITION 1. *Soient* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{A}'$ *des classes sous-préinductives et* p *une application sous-inductive stricte de* $\mathfrak{A}'$ *dans* $\mathfrak{A}$*; alors, pour tout* $c \in \mathfrak{A}'$, *la restriction de* p *à la classe* $\varphi'(c)$ *des éléments inférieurs à* c, *est un isomorphisme de* $\varphi'(c)$ *sur* $p(\varphi'(c))$.

DEMONSTRATION. Soient a et b deux éléments de $\mathfrak{A}'$ majorés par c. Comme p est sous-inductive, on a : $p(a \cap b) = p(a) \cap p(b)$. Si $p(a) = p(b)$, on en déduit $p(a \cap b) = p(a) = p(b)$, d'où $a \cap b = a = b$, puisque $a \cap b < a$ et $a \cap b < b$. Donc la restriction de p à $\varphi'(c)$ est une injection.- De la relation $p(a) < p(b)$, il résulte que $p(a) = p(a) \cap p(b) = p(a \cap b)$, d'où $a = a \cap b$ et $a < b$.

PROPOSITION 2. *Soient* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{A}'$ *des classes sous-préinductives. Pour qu'une application* p *sous-inductive stricte de* $\mathfrak{A}'$ *dans* $\mathfrak{A}$ *soit inductive, il faut et il suffit que, pour toute sous-classe* B *de* $\mathfrak{A}'$ *admettant un* a*-agrégat, il existe* $s < \overset{a}{\bigcup} B$ *tel que* $p(s) = \overset{p(a)}{\bigcup} p(B)$*; dans ce cas, on a :* $s = \overset{a}{\bigcup} B$.

En effet, montrons que les conditions sont suffisantes. Pour tout $b \in B$, on a $p(b) < p(s)$ et il résulte de la proposition 1 que l'on a $b < s$; par suite $\overset{a}{\bigcup} B = \overset{s}{\bigcup} B < s$. Donc $s = \overset{a}{\bigcup} B$ et p est une application inductive.

PROPOSITION 3. *Soit p un foncteur d'un groupoïde sous-préinductif S' vers un groupoïde sous-préinductif S, compatible avec les ordres de S' et S. On a $p(gf) < p(g)p(f)$, pour tout $f \in S'$, $g \in S'$ tel que gf soit défini. Pour que p soit sous-inductif, il faut et il suffit que, pour tout $f \in S'$ et tout $s \in S'_o$ tels que s et $\alpha(f)$ soient majorés, on ait : $p(fs) = p(f)p(s)$.*

DEMONSTRATION. Puisque $gf = (ge).(ef)$, où $e = \beta(f) \cap \alpha(g)$, on a $p(ge) < p(g)$ et $\alpha(p(ge)) = p(\alpha(ge)) = p(e)$, d'où $p(ge) = p(g)p(e)$; de même $p(ef) = p(e)p(f)$. Il en résulte $p(gf) = p(ge)p(ef) = p(g)p(e)p(f) < p(g)p(f)$. - Si p est sous-inductif, on a $p(\alpha(f))p(s) = p(\alpha(f)s)$ et par suite $p(fs) = p(f)p(\alpha(f))p(s) = = p(f)p(s)$. - Inversement montrons que la condition est suffisante pour que p soit sous-inductif. Soient f et f' deux éléments de S' majorés par f'' ; on a $f \cap f' = f(\alpha(f)\alpha(f'))$; comme $p(f)$ et $p(f')$ sont majorés par $p(f'')$, il en résulte $p(f \cap f') = p(f) \cap p(f')$.

PROPOSITION 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de S' vers S compatible avec les ordres et p_o sa restriction à S'_o. Pour que p soit (sous)-inductif, il faut et il suffit que p_o soit (sous)-inductif; pour que p soit sous-inductif strict, il faut et il suffit que p_o le soit.*

DEMONSTRATION. Supposons que p_o soit sous-inductif strict. Soient $f \in S'$ et $g \in S'$ tels que $g < f$ et $p(g) = p(f)$; les relations $p(\alpha(g)) = p(\alpha(f))$ et $\alpha(g) < \alpha(f)$ entraînent $\alpha(g) = \alpha(f)$ et par suite $g = f$. - Soit $e \in S'_o$ tel que $e \cap \alpha(f)$ soit défini; on a $p(fe) < p(f)$ et $\alpha(p(fe)) = p(e\alpha(f)) = p(e)p(\alpha(f))$, d'où $p(fe) = = p(f)p(\alpha(f))p(e) = p(f)p(e)$. -Supposons que p_o soit inductif et soit B une sous-classe de S' admettant un a-agrégat; $\alpha(B)$ admet un $\alpha(a)$-agrégat dans S'_o et l'on a : $p(\overset{\alpha(a)}{\bigcup} \alpha(B)) = \overset{s}{\bigcup}(p(B))$, où $s = p(\alpha(a))$. Comme la classe $p(B)$ est majorée par $p(a)$ et que $\alpha(p(B))$ admet un s-agrégat, la proposition 7-1-[2] montre que $p(B)$ admet un $p(a)$-agrégat pour lequel $\alpha(\overset{p(a)}{\bigcup} p(B)) = \alpha(p(\overset{a}{\bigcup} B))$. Donc $p(\overset{a}{\bigcup} B) \in \underline{\bigcup}\, p(B)$.

PROPOSITION 5. *Soient S' un groupoïde sous-inductif et S un groupoïde sous-prélocal, p un foncteur inductif strict de S' vers S; alors S' est un groupoïde sous-local.*

DEMONSTRATION. Soit B une sous-classe de S'_o admettant $d \in S'_o$ pour c-agrégat et soit $a \in S'_o$ tels que $a \cap d$ soit défini; p étant inductif, on a : $p((a \cap d) \cap d) = = p(a \cap d) \cap \overset{p(c)}{\bigcup} p(B)$ et, en utilisant l'axiome (D) : $p(a \cap d) = \overset{p(c)}{\bigcup} p(a \cap d)p(B)$. Par ailleurs la classe des éléments $a \cap b$, où $b \in B$, étant majorée par c, admet un sous-agrégat d' qui est majoré par $a \cap d$ et $d' = \bigcup^{c} (a \cap d) \cap b$; on en déduit : $p(d') =$ $= \bigcup^{p(c)} (p(a \cap d)p(B))$, d'où $p(d') = p(d)$ et, puisque p est inductif strict, $d' = d$. Donc S' est sous-local.

DEFINITION 3. *Soient S et $\tilde{S}$ deux groupoïdes sous-préinductifs. On dit que $\tilde{S}$ est un* groupoïde quotient (sous)- inductif *de S si $\tilde{S}$ est un groupoïde quotient de S et si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) Le foncteur canonique q de S sur $\tilde{S}$ est (sous)-inductif.

2) Soient $\tilde{f} \in \tilde{S}$, $\tilde{f}' \in \tilde{S}$, $\tilde{g} \in \tilde{S}$, $\tilde{f} < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{g}$; alors il existe $f \in \bar{q}^{1}(\tilde{f})$, $f' \in \bar{q}^{1}(\tilde{f}')$ et $g \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$ tels que $f < g$ et $f' < g$.

Ces conditions entraînent : $\tilde{f} \cap \tilde{f}' = q(f \cap f')$, où $\tilde{f} < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{g}$.

THEOREME 1. *Soit $\tilde{S}$ un groupoïde quotient d'un groupoïde sous-préinductif S et q le foncteur canonique de S sur $\tilde{S}$; si les conditions 1 et 2 suivantes sont vérifiées, alors il existe une relation d'ordre canonique sur $\tilde{S}$ pour laquelle $\tilde{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de S.*

1) Soient $g \in S$, $f \in S$ avec $g < f$; alors pour tout f' tel que $q(f') = q(f)$, il existe un et un seul $g' < f'$ avec $q(g') = q(f')$.

2) Deux éléments différents de $\bar{q}^{1}(e)$, où $e \in \tilde{S}_o$, ne sont pas comparables.

DEMONSTRATION. Dans $\tilde{S}$, considérons la relation :

$\tilde{g} < \tilde{f}$ si, et seulement si, il existe $g \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$ et $f \in \bar{q}^{1}(\tilde{f})$ avec $g < f$.

Si l'on a $\tilde{g} < \tilde{f} < \tilde{g}$, il existe $g \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$, $g_1 \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$, $f \in \bar{q}^{1}(\tilde{f})$ et $f_1 \in \bar{q}^{1}(\tilde{f})$ avec $g_1 < f_1$ et $f < g$; d'après la condition 1, il existe $g' < f$ avec $q(g') = q(g_1)$; par suite $g' < f < g$, d'où $g' = g$ d'après la condition 2 et $\tilde{g} = \tilde{f}$.- Supposons $\tilde{f} < \tilde{g}$ et $\tilde{g} < \tilde{h}$; il existe $h \in \bar{q}^{1}(\tilde{h})$, $g \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$ et $f \in \bar{q}^{1}(\tilde{f})$ avec $f < g < h$, c'est-à-dire $\tilde{f} < \tilde{h}$. Donc la relation considérée est une relation d'ordre.- Soit $\tilde{e} \in \tilde{S}_o$ et $\tilde{f} < \tilde{e}$; comme il existe $f < e$, $q(f) = \tilde{f}$, $q(e) = \tilde{e}$, $\bar{q}^{1}(\tilde{f})$ contient une unité, donc $\tilde{f} \in \tilde{S}_o$. Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux éléments de $\tilde{S}$ majorés par $\tilde{g}$ et tels que $\alpha(\tilde{f}) = \alpha(\tilde{f}')$; pour tout $g \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$, il existe $f < g$, $f' < g$, $q(f) = \tilde{f}$, $q(f') = \tilde{f}'$; comme $\alpha(f) < \alpha(g)$, $\alpha(f') < \alpha(g)$, $q(\alpha(f)) =$ $= q(\alpha(f'))$ entraînent $\alpha(f) = \alpha(f')$ d'après la condition 1, on en déduit $f = f'$, d'où $\tilde{f} = \tilde{f}'$.- Soient $\alpha(\tilde{g}) = \beta(\tilde{f})$, $\tilde{g}' < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{f}$, $\alpha(\tilde{g}') = \beta(\tilde{f}')$, $g \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$ et $f \in \bar{q}^{1}(\tilde{f})$ avec $\alpha(g) = \beta(f)$; il existe $f' \in \bar{q}^{1}(\tilde{f}')$, $f' < f$ et $g' \in \bar{q}^{1}(\tilde{g})$, $g' < g$; des relations $\beta(f') < \beta(f) = \alpha(g)$, $\alpha(g') < \alpha(g)$ et $q(\beta(f')) = q(\alpha(g')) = \alpha(\tilde{g}')$ résulte $\alpha(g') = \beta(f')$ et $g'.f' < gf$, d'où $\tilde{g}'.\tilde{f}' < \tilde{g}.\tilde{f}$.- Soit $\tilde{k} < \tilde{g}.\tilde{f}$; on a $\alpha(\tilde{k}) < \alpha(\tilde{f})$ et il existe $e < \alpha(f)$ avec $q(e) = \alpha(\tilde{k})$; des relations $fe < f$, $g\beta(fe) < g$, $\beta(q(fe)) =$ $= \beta(\tilde{k})$, on tire :

$$q((g\beta(fe)).(fe)) = q(g\beta(fe)).q(fe) = (\tilde{g}.\tilde{f})\alpha(\tilde{k}) = \tilde{k}.$$

Ceci montre que la relation d'ordre dans $\tilde{S}$ est définie par un foncteur généralisé $\tilde{\varphi}$.- Soient $f \in S$ et $\tilde{f}' < q(f)$; puisqu'il existe $f'_1 < f_1$ avec $q(f'_1) = \tilde{f}'$, $q(f_1) = q(f)$, la condition 1 montre qu'il existe un et un seul $f' < f$ avec $q(f') = \tilde{f}'$; donc la restriction de q à $\varphi(f)$ est un isomorphisme sur $\tilde{\varphi}(q(f))$. Par conséquent $\tilde{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, l'intersection de deux éléments $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ majorés par $\tilde{h}$ étant $q(f \cap g)$, où $g < h$, $f < h$, $q(f) = \tilde{f}$, $q(g) = \tilde{g}$ et $q(h) = \tilde{h}$.

COROLLAIRE. *Si S est sous-inductif, alors $\tilde{S}$ est sous-inductif. Si S est sous-local, $\tilde{S}$ est sous-local.*

Remarquons que S peut être inductif sans que $\tilde{S}$ le soit.

DEFINITION 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que S' est* un groupoïde sous-préinductif (presque) au-dessus de S ou que S'_0 est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S, *si l'on s'est donné un foncteur p de S' vers S vérifiant les axiomes suivants :*

1) p est (sous)-inductif strict.

2) (S, p, S') est une espèce de structures.

L'espèce de structures sous-préinductive S'_0 presque au-dessus de S sera désignée par $\langle S, p, S' \rangle$. Si de plus S et S' sont des groupoïdes (pré)-inductifs, on dira que $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures (pré)-inductives.

Il résulte de cette définition que $p(S')$ est un sous-groupoïde de S; en identifiant $f \in S'$ avec le couple $(p(f), \alpha(f))$ on identifie S' avec l'extension du groupoïde d'opérateurs $p(S')$; le composé de $(p(f), s)$, où $s \in S'_0$, est $\beta(g)$, en désignant par g l'élément de S' tel que $\alpha(g) = s$ et $p(g) = p(f)$.

D'après ce qui précède, pour que $\langle S, p, S' \rangle$ soit une espèce de structures sous-préinductive (resp. sous-préinductive presque au-dessus de S), il faut et il suffit que les conditions a, b, c, d, e (resp. a, b, c, d) suivantes soient vérifiées :

a) Soient $f \in S'$ et $s \in S'_0$ tels que $p(s) = p(\alpha(f))$; alors il existe un et un seul $g \in S'$ tel que $\alpha(g) = s$ et $p(g) = p(f)$.

b) p est compatible avec les structures d'ordre de S et S'.

c) Si $s' < s$, $s'' < s$, $s \in S'_0$, $s' \in S'_0$ et $s'' \in S'_0$, on a : $p(s' \cap s'') = p(s') \cap p(s'')$.

d) $s' < s$ et $p(s') = p(s)$, où $s \in S'_0$ et $s' \in S'_0$, entraînent $s = s'$.

e) Pour toute sous-classe B de S'_0 admettant un e-agrégat, où $e \in S'_0$, il existe $s < \overset{e}{\bigcup} B$ tel que $p(s) \in \underline{\bigcup}\, p(B)$.

PROPOSITION 6. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive; la condition $g < f$, où $g \in S'$ et $f \in S'$, est équivalente aux conditions : $\alpha(g) < \alpha(f)$ et $p(g) < p(f)$.*

En effet, montrons que ces conditions sont suffisantes. D'après la proposition 4, on a $p(f\alpha(g)) = p(f)p(\alpha(g)) = p(g)$. Les éléments $f\alpha(g)$ et g ont même projection et même unité à droite; par suite ils sont égaux. Donc $g < f$.

CAS PARTICULIER. Si S' est un sous-groupoïde de S et si p est le foncteur injection canonique Id de S' dans S, pour que l'on ait $\langle S, Id, S' \rangle$ il faut et il suffit que S' soit un *sous-groupoïde sous-préinductif* de S. Pour que $\langle S, id, S' \rangle$ soit une espèce de structures sous-préinductives, il faut et il suffit que, de plus : 3) Pour toute sous-classe B de S'_o, la congrégation de B dans S'_o est contenue dans sa congrégation dans S.

DEFINITION 5. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et (S, p, S') une espèce de structures; on dit que S' est* étalé dans S par p *ou que p est* un étalement de S' dans S *si la restriction de p à $\varphi'(f)$, pour tout $f \in S'$, est un isomorphisme sur $\varphi(p(f))$.*

PROPOSITION 7. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs; pour qu'un foncteur p de S' dans S soit un étalement, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1) $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive au-dessus de S et $p(\varphi'(f)) = \varphi(p(f))$, pour tout $f \in S'$.

2) (S, p, S') est une espèce de structures, p est un foncteur compatible avec les ordres et la restriction p_o de p à S'_o est un étalement de S'_o dans S_o.

DEMONSTRATION. Si p est un étalement, p est un foncteur inductif strict et la condition 1 est vérifiée. Supposons 2 vérifiée; pour que p_o soit un étalement, il faut et il suffit que la restriction de p_o à $\varphi'(e)$, pour tout $e \in S'_o$, soit un isomorphisme sur $\varphi(p(e))$; alors p est un foncteur inductif strict d'après la proposition 4; soit $a < p(f)$, où $f \in S'$ il existe :

$$e \in S'_o, \quad e < a(f), \qquad p(e) = \alpha(a) < p(\alpha(f))$$

et l'élément fe est tel que $p(fe) = p(f)p(e) = a$, donc $p(\varphi'(f)) = \varphi(p(f))$.

COROLLAIRE. *Si S est un groupoïde sous-inductif, alors S' est un groupoïde sous-inductif.*

Si p est un étalement de S' dans S, nous dirons aussi que $\langle S, p, S' \rangle$ est *une espèce de structures sous-préinductive étalée au-dessus de S.*

DEFINITION 6. *Soient $\langle S, p, S' \rangle$ et $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de S; on dit que $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ est une* sous-espèce sous-préinductive de $\langle S, p, S' \rangle$ (presque) au-dessus de S *si elle vérifie les conditions :*

1) (S, p_1, S'_1) *est une sous-espèce de structures de* (S, p, S').

2) S'_1 *est muni de la structure d'ordre induite par celle de* S'.

PROPOSITION 8. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*; pour qu'une sous-espèce de structures* (S, p_1, S'_1) *de* (S, p, S') *soit une sous-espèce sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*, il faut et il suffit que* $\langle S', Id, S'_1 \rangle$ *soit (presque) au-dessus de* S'.

DEMONSTRATION. Montrons que la condition est nécessaire. Soient e' et e'' des unités de S'_1 majorées par e; alors dans S, on a : $p(e' \cap e'') = p(e') \cap p(e'')$; de plus les éléments e' et e'' ont une intersection e_1 dans S'_1 telle que : $e_1 < e' \cap e''$ et

$$p_1(e_1) = p_1(e') \cap p_1(e'') = p(e' \cap e'').$$

Comme p_1 est la restriction à S'_1 de l'application sous-inductive stricte p, il en résulte $e_1 = e' \cap e''$, d'où $e' \cap e'' \in S'_1$.- Soit $f \in S'_1$ et $e \in S'_1$ avec $e < \alpha(f)$; dans S'_1, il existe un élément induit par f sur e et cet élément doit être identique à fe. Donc S'_1 est un sous-groupoïde sous-préinductif de S'.

PROPOSITION 9. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive et* S'' *un sous-groupoïde sous-préinductif de* S' *tel que tout élément de* S' *soit majoré par un élément de* S''*. Alors* $\langle S, p, S'' \rangle$ *est une sous-espèce de structures sous-préinductive de* $\langle S, p, S' \rangle$.

En effet, soient $f \in S''$ et $e \in S''_o$ avec $p(e) = p(\alpha(f))$; il existe $g \in S'$ et $f' \in S''$ tels que

$$p(g) = p(f),\ \alpha(g) = e \quad \text{et} \quad g < f';$$

il en résulte $g = f'e \in S''$, donc (S, p, S'') est une espèce de structures.

COROLLAIRE. *Si* S'' *est un sous-groupoïde saturé par induction dans* S'*, qui est une base faible de* S'*, on a* $\langle S, p, S'' \rangle$.

THEOREME 2 (transitivité). *Soient* S, S' *et* S'' *trois groupoïdes sous-préinductifs,* p *un foncteur (sous)-inductif de* S' *vers* S *et* p' *un foncteur (sous)-inductif de* S'' *vers* S'*; alors* pp' *est un foncteur (sous)-inductif de* S'' *vers* S*. Si* p *et* p' *sont sous-inductifs stricts, alors* pp' *est sous-inductif strict.*

DEMONSTRATION. Le foncteur composé pp' est compatible avec les ordres de S'' et S. Soient $s \in S''_o, s' \in S''_o, s'' \in S''_o, s' < s$ et $s'' < s$ on a :

$$p'(s') \cap p'(s'') = p'(s' \cap s'')$$

et

$$p'(s') < p'(s),\ p'(s'') < p'(s);$$

puisque p est sous-inductif, il en résulte :

$$pp'(s') \cap pp'(s'') = p(p'(s') \cap p'(s'')) = pp'(s' \cap s''),$$

et pp' est sous-inductif.- Si p et p' sont sous-inductifs stricts, les relations $f < f'$ et $pp'(f) = pp'(f')$, où $f \in S''$ et $f' \in S''$, entraînent $p'(f) < p'(f')$, d'où $p'(f) = p'(f')$ et $f = f'$. Donc pp' est sous-inductif strict.- Supposons p et p' inductifs et soit A une sous-classe de S''_0 admettant un e-agrégat; on a : $p'(\overset{e}{\bigcup} A) = \overset{p'(e)}{\bigcup} p(A)$ et

$$pp'(\overset{e}{\bigcup} A) = p(\overset{p'(e)}{\bigcup} p'(A)) = \overset{pp'(e)}{\bigcup} pp'(A) \in \underline{\cup}\, pp'(A);$$

par suite pp' est inductif.

COROLLAIRE. *Soient* $\langle S, p, S' \rangle$ *et* $\langle S', p', S'' \rangle$ *deux espèces de structures sous-préinductives telles que* (S', p', S'') *soit une espèce de superstructures au-dessus de* (S, p, S')*; alors* $\langle S, pp', S'' \rangle$ *est une espèce de structures sous-préinductive. Si* p *et* p' *sont inductifs,* pp' *l'est également. Si* p *et* p' *sont des étalements, alors* pp' *est un étalement.*

PROPOSITION 10. *Soient* S, S' *et* S'' *des groupoïdes sous-préinductifs,* p *un foncteur sous-inductif strict de* S' *dans* S *et* p' *un foncteur de* S'' *dans* S' *compatible avec les ordres. Si* pp' *est un foncteur sous-inductif, alors* p' *est sous-inductif. Si de plus* S' *est sous-inductif,* p *et* pp' *inductifs, alors* p' *est inductif.*

DEMONSTRATION. Soient $e \in S''_0$, $e' \in S''_0$, $e'' \in S''_0$ tels que $e' < e$ et $e'' < e$; on a :

$$p'(e' \cap e'') < p'(e') < p'(e) \text{ et } p'(e' \cap e'') < p'(e).$$

Il en résulte :

$$pp'(e' \cap e'') = pp'(e') \cap pp'(e'')) = p(p'(e') \cap p'(e'')),$$

d'où, puisque p est sous-inductif strict, $p'(e' \cap e'') = p'(e') \cap p'(e'')$.- Si p est inductif strict et pp' inductif, soit B une sous-classe de S''_0 admettant un e-agrégat; on a $p'(\overset{e}{\bigcup} B) < p'(e)$ et la classe $p'(\overset{e}{\bigcup} B)$ admet un $p'(e)$-agrégat b dans le groupoïde sous-inductif S' tel que : $p(b) = \overset{pp'(e)}{\bigcup} pp'(B) = pp'(\overset{e}{\bigcup} B)$. Donc $b = p'(\overset{e}{\bigcup} B)$ et p' est un foncteur inductif.

DEFINITION 7. *Soient* $\langle S, p, S' \rangle$ *et* $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ *deux espèces de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de* S *et* S_1*; on appelle* application covariante (sous)-inductive de $\langle S, p, S' \rangle$ dans $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ *et on note* $\langle \chi_0, \psi \rangle$ *une application covariante* (χ_0, ψ) *de* (S, p, S') *dans* (S_1, p_1, S'_1) *telle que* ψ *et* χ_0 *soient (sous)-inductifs. Si l'espèce de structures* (S_1, p_1, S'_1) *est sous-jacente à* (S, p, S') *par une application covariante (sous)-inductive, on dit que l'espèce de structures sous-préinductive* $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ *est sous-jacente à* $\langle S, p, S' \rangle$.

PROPOSITION 11. *Si* $\langle \chi_o, \psi \rangle$ *est une application covariante (sous)-inductive de l'espèce de structures sous-préinductive* $\langle S, p, S' \rangle$ *dans l'espèce de structures sous-préinductive* $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ *, le foncteur* χ *correspondant est (sous)-inductif.*

En effet, puisque ψ et χ_o sont compatibles avec les ordres le foncteur χ (proposition 1-3-II[1])est aussi compatible avec les ordres et par suite (sous)-inductif d'après la proposition 4.

PROPOSITION 12. *Soit* R_o *une classe d'espèces de structures sous-préinductives et* R *la classe des applications covariantes (sous)-inductives d'un élément de* R_o *dans un élément de* R_o. *Alors* R *est une catégorie pour la loi de composition :*

$$(\langle \chi'_o, \psi' \rangle, \langle \chi_o, \psi \rangle) \to \langle \chi'_o \chi_o, \psi' \psi \rangle$$ *, si, et seulement si, les foncteurs* ψ *et* ψ' *sont composables ainsi que les applications* χ_o *et* χ'_o.

Cette proposition résulte de la proposition 3-3-II[1]et du théorème 2.

DEFINITION 8. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*; une espèce de structures sous-préinductive* $\langle S', p', S'' \rangle$ *(presque) au-dessus de* S' *sera appelée* espèce de superstructures sous-préinductive (presque) au-dessus de $\langle S, p, S' \rangle$ *si* $\langle S, p, p'(S') \rangle$ *est une sous-espèce de structures sous-préinductive de* $\langle S, p, S' \rangle$.

PROPOSITION 13. *Si* $\langle S', p', S'' \rangle$ *est une espèce de superstructures sous-préinductive (presque) au-dessus de* $\langle S, p, S' \rangle$ *, alors* $\langle S, pp', S'' \rangle$ *est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*, à laquelle* $\langle S, p, S' \rangle$ *est sous-jacente.*

Cette proposition résulte du théorème 1-3-II[1]et du théorème 2.

DEFINITION 9. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* ψ *et* ψ' *deux foncteurs (sous)-inductifs de* S *vers* S'*; on appelle* transformation naturelle (sous)-inductive de ψ vers ψ', *et on note* $\langle \psi', \tau, \psi \rangle$, *une transformation naturelle* (ψ', τ, ψ) *telle que* τ *soit une application (sous)-inductive de* S_o *dans la classe sous-préinductive* S'.

PROPOSITION 14. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* ψ *et* ψ' *deux foncteurs de* S *vers* S' *et* (ψ', τ, ψ) *une transformation naturelle de* ψ *vers* ψ'*; si* ψ *ou* ψ' *est (sous)-inductif et si* τ *est une application (sous)-inductive, alors* (ψ', τ, ψ) *est une transformation naturelle (sous)-inductive.*

DEMONSTRATION. Soient $f' < f$, $f \in S$ et $f' \in S$; si ψ et τ sont sous-inductifs :

$$\psi'(f') = \tau(\beta(f'))\psi(f')\tau(\alpha(f'))^{-1} < \tau(\beta(f))\psi(f)\tau(\alpha(f))^{-1} = \psi'(f).$$

Soient e' et e'' deux unités de S majorées par $e \in S_o$; les relations $\tau(e') < \tau(e)$ et

$\tau(e'') < \tau(e)$ entraînent :

$$\psi'(e'e) = \beta(\tau(e'e)) = \beta(\tau(e) \cap \tau(e')) = \beta(\tau(e)) \cap \beta(\tau(e')) = \psi'(e)\psi'(e')$$

donc ψ' est sous-inductif.- Supposons ψ et τ inductifs; soit B une sous-classe de S_o admettant un e-agrégat; on a :

$$\psi'(\overset{e}{\bigcup} B) = \beta(\tau(\overset{e}{\bigcup} B)) = \beta(\overset{\tau(e)}{\underset{b \in B}{\bigcup}} \tau(b)) = \overset{\tau(e)}{\underset{b \in B}{\bigcup}} \beta(\tau(b)) = \overset{\tau(e)}{\bigcup} \psi'(B);$$

donc ψ' est inductif. La proposition s'en déduit.

PROPOSITION 15. *La classe $N\langle S', S\rangle$ des transformations naturelles (sous)-inductives entre foncteurs (sous)-inductifs du groupoïde sous-préinductif S vers le groupoïde sous-préinductif S' est une catégorie pour la multiplication longitudinale (proposition 7-2-II-[1]).*

DEMONSTRATION. Soient $\langle \psi'', \tau', \psi' \rangle \in N\langle S', S\rangle$ et $\langle \psi', \tau, \psi \rangle \in N\langle S', S\rangle$; si e' et e'' sont deux unités de S majorées par $e \in S_o$, on a :

$$(\tau'.\tau)(e'e'') = \tau'(e'e'').\tau(e'e'') = (\tau'(e') \cap \tau'(e'')).(\tau(e') \cap \tau(e'')).$$

Comme $\tau(e')$ et $\tau(e'')$, $\tau'(e')$ et $\tau'(e'')$ sont compatibles, on a aussi :

$$\tau'(e') \cap \tau'(e'') = \tau'(e')\alpha(\tau'(e'')) = \tau'(e')\beta(\tau(e') \cap \tau(e'')),$$

et $\tau(e') \cap \tau(e'') = \tau(e')\alpha(\tau(e''))$ d'où :

$$(\tau'.\tau)(e'e'') = \tau'(e')\tau(e')\alpha(\tau(e'')) = (\tau'.\tau)(e') \cap (\tau'.\tau)(e'').$$

Par suite $\tau'.\tau$ est une application sous-inductive.- Supposons τ et τ' inductives et soit E une sous-classe de S_o admettant un a-agrégat, où $a \in S_o$. Posons :

$$b = (\tau'.\tau)(\overset{a}{\bigcup} E) = \overset{\tau'(a)}{\bigcup} \tau'(E).\overset{\tau(a)}{\bigcup} \tau(E) < \tau'.\tau(a);$$

pour tout $e \in E$, on a $\tau'(e)\tau(e) < b$; la classe $(\tau'.\tau)(E)$ admettant pour unité à droite $\alpha(\tau(E))$, $\alpha((\tau'.\tau)(E))$ admet $\alpha(b)$ pour $\alpha(\tau'.\tau(a))$-agrégat; il résulte de la proposition 5-1-[2]que $(\tau'.\tau)(E)$ admet b pour $(\tau'.\tau)(a)$-agrégat, donc $\tau'.\tau$ est une application inductive. La proposition s'en déduit.

2. Groupoïdes inductifs induits et élargissements inductifs.

THEOREME 1. *Soient S, S' et $\overline{S}$ trois groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de S' vers S et κ un foncteur sous-inductif de $\overline{S}$ vers S; alors le groupoïde induit $\kappa^*(S', p)$ (définition 1-1-III-[1]) est un sous-groupoïde sous-préinductif de $S' \times \overline{S}$ et les foncteurs canoniques $\overline{p}$ et η de $\kappa^*(S', p)$ vers $\overline{S}$ et S' sont sous-inductifs. Si p et κ sont inductifs, $\kappa^*(S', p)$ est une partie sous-inductive faible de $S' \times \overline{S}$ et les foncteurs $\overline{p}$ et η sont inductifs.*

DEMONSTRATION. Soient (e', ε') et (e'', ε'') deux unités de $\kappa^*(S', p)$ majorées par $(e, \varepsilon) \in \kappa^*(S', p)_0$; elles admettent pour intersection $a = (e' \cap e'', \varepsilon' \cap \varepsilon'')$ dans $S' \times \overline{S}$; comme :

$$p(e' \cap e'') = p(e') \cap p(e'') = \kappa(\varepsilon') \cap \kappa(\varepsilon'') = \kappa(\varepsilon' \cap \varepsilon''),$$

a appartient à $\kappa^*(S', p)$ et $\overline{p}(a) = \varepsilon' \cap \varepsilon''$.- Soient $(h, f) \in \kappa^*(S', p)$ et $(e, \varepsilon) < \alpha(h, f)$; on a :

$$p(he) = p(h)p(e) = \kappa(f)\kappa(\varepsilon) = \kappa(f\varepsilon),$$

d'où $(he, f\varepsilon) \in \kappa^*(S', p)$. Donc $\kappa^*(S', p)$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $S' \times \overline{S}$, $\overline{p}$ et κ sont sous-inductifs.- Supposons p et κ inductifs; soit B une sous-classe de $\kappa^*(S', p)$ majorée dans $\kappa^*(S', p)$ et admettant un (e, ε)-agrégat (c, γ) dans $S' \times \overline{S}$; comme $c = \overset{e}{\bigcup} \eta(B)$ et $\gamma = \overset{\varepsilon}{\bigcup} \overline{p}(B)$, on trouve :

$$p(c) = \overset{p(e)}{\bigcup} p\eta(B) = \overset{\kappa(\varepsilon)}{\bigcup} \kappa\overline{p}(B) = \kappa(\gamma) \text{ et } (c, \gamma) \in \kappa^*(S', p).$$

COROLLAIRE 1. *Soit S'' un groupoïde sous-préinductif, η' et p' des foncteurs de S'' vers S' et $\overline{S}$ tels que $p\eta' = \kappa p'$. Si p, κ, η' et p' sont $\widehat{\text{sous}}$-inductifs, alors le foncteur canonique $\overline{\eta}'$ de S'' vers $\kappa^*(S', p)$ (théorème 1-1-III[1]) est $\widehat{\text{sous}}$-inductif. Si de plus, p' ou η' est un foncteur sous-inductif strict, alors $\overline{\eta}'$ est sous-inductif strict.*

DEMONSTRATION. Par définition $\overline{\eta}'(k) = (\eta'(k), p'(k))$, où $k \in S''$. Soient k' et k'' des éléments de S'' majorés par k ; on a :

$$\eta'(k' \cap k'') = \eta'(k') \cap \eta'(k''), p'(k' \cap k'') = p'(k') \cap p'(k''),$$

d'où
$$\overline{\eta}'(k' \cap k'') = \overline{\eta}'(k') \cap \overline{\eta}'(k'').$$

- Supposons p' et η' inductifs; soit A une sous-classe de S'' admettant un k-agrégat; on a :

$$\eta'(\overset{k}{\bigcup} A) = \overset{\eta'(k)}{\bigcup} \eta'(A) \text{ et } p'(\overset{k}{\bigcup} A) = \overset{p'(k)}{\bigcup} p'(A);$$

par suite :
$$\overline{\eta}'(\overset{k}{\bigcup} A) = (\overset{\eta'(k)}{\bigcup} \eta'(A), \overset{p'(k)}{\bigcup} p'(A)) \in \underline{\bigcup}\, \overline{\eta}'(A).$$

COROLLAIRE 2. *Si S' et $\overline{S}$ sont $\widehat{\text{sous}}$-inductifs (resp. $\widehat{\text{sous}}$-prélocaux) et p et κ inductifs, alors $\kappa^*(S', p)$ est un groupoïde $\widehat{\text{sous}}$-inductif (resp. $\widehat{\text{sous}}$-prélocal) pour l'ordre produit.*

Remarquons que, si S, S' et $\overline{S}$ sont des groupoïdes préinductifs, il n'en résulte pas que $\kappa^*(S', p)$ est préinductif; pour celà, il suffirait que p et κ appliquent toute intersection finie sur l'intersection des images.

COROLLAIRE 3. *Si $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive $\widehat{\text{presque}}$*

au-dessus de S *et si* κ *est (sous)-inductif, alors* $\langle \overline{S}, \overline{p}, \kappa^*(S', p) \rangle$ *est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* $\overline{S}$. *Si* p *est un étalement et* κ *un foncteur sous-inductif,* $\overline{p}$ *est un étalement.*

En effet, si p est un étalement et si κ est sous-inductif, des relations

$$(h', f') < (h, f) \text{ et } \overline{p}(h', f') = \overline{p}(h, f),$$

où $(h, f) \in \kappa^*(S', p)$ et $(h', f') \in \kappa^*(S', p)$, résulte $f' = f$, d'où $p(h') = p(h) = \kappa(f)$. Par suite $h = h'$ et $\overline{p}$ est un étalement. Le reste du corollaire se déduit du corollaire 3 du théorème 1-1-III-[1].

COROLLAIRE 4. *Si* $\langle S, p, S' \rangle$ *est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* S *et si* q *est une application (sous)-inductive d'une classe sous-préinductive* A *dans* S_0, *l'espèce de structures* $(q^*(S), p', q^*(S'))$ *induite de* S *est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* $q^*(S)$(déf. -1-III-[1]).

PROPOSITION 1. *Soient* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive,* $\overline{S}$ *un groupoïde sous-préinductif et* $\langle \kappa', \theta, \kappa \rangle \in N \langle S, \overline{S} \rangle$ *une transformation naturelle sous-inductive telle que* $\theta(S_0)$ *soit contenu dans* $p(S')$. *Alors il existe un foncteur sous-inductif* π *de* $\kappa^*(S', p)$ *vers* $\kappa'^*(S', p)$ *et une transformation naturelle sous-inductive* $\langle \eta' \pi, \tau, \eta \rangle$, *où* η *et* η' *sont les foncteurs canoniques de* $\kappa^*(S', p)$ *et* $\kappa'^*(S', p)$ *vers* S', *tels que :* $p\tau = \theta \overline{p}$. *Si* p, κ, κ' *et* θ' *sont inductifs, alors* π *et* τ *le sont aussi.*

DEMONSTRATION. Soient π et τ les applications construites à la proposition 6-1-III-[1]; soient $(h, f) \in \kappa^*(S', p)$ et $(h_1, f_1) \in \kappa^*(S', p)$; la relation $(h_1, f_1) < (h, f)$ entraîne

$$f_1 < f,\ \kappa'(f_1) < \kappa'(f),\ \theta(\alpha(f_1)) < \theta(\alpha(f)),$$

d'où $\pi(h_1, f_1) < \pi(h, f)$.- Soient (e_1, ε_1) et (e_2, ε_2) deux unités de $\kappa^*(S', p)$ majorées par une unité (e, ε); les éléments

$$\tau(e_1 e_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2) = (\theta(\varepsilon_1 \varepsilon_2), e_1 e_2) \text{ et } (\theta(\varepsilon_1), e_1) \cap (\theta(\varepsilon_2), e_2)$$

de S' sont induits par $(\theta(\varepsilon), e)$ et ont $e_1 e_2$ pour unité à droite; ils sont donc égaux et τ est sous-inductif; comme $\pi(e, \varepsilon) = (\beta(\tau(e, \varepsilon)), \varepsilon)$, il en résulte que π est sous-inductif.- Supposons p et $\langle \kappa', \theta, \kappa \rangle$ inductifs; soit (C, Γ) une sous-classe de $(\kappa^*(S', p))_0$ admettant un a-agrégat, où $a = (e, \varepsilon)$; on a :

$$\tau(\overset{a}{\bigcup}(C, \Gamma)) = \tau(\overset{e}{\bigcup} C, \overset{\varepsilon}{\bigcup} \Gamma) = (\theta(\overset{\varepsilon}{\bigcup} \Gamma), \overset{e}{\bigcup} C) = \overset{a}{\bigcup}(\theta(\Gamma), C) = \overset{a}{\bigcup} \tau(C, \Gamma).$$

Donc τ, et par suite π, sont inductifs.

DEFINITION 1. *Soit* $\overline{S}$ *un groupoïde sous-préinductif et* S *une partie sous-inductive faible de* $\overline{S}$; *on dit que* $\overline{S}$ *est une* extension inessentielle (sous)-inductive $\langle \kappa, \overline{S} \rangle$ de S *s'il existe une extension inessentielle* (κ, S') *de* S *telle que* S' *soit un sous-*

groupoïde sous-préinductif de $\overline{S}$ *et une base de* $\overline{S}$ *et que* κ *soit un foncteur (sous)-inductif.*

PROPOSITION 2. *Soit* $\langle \kappa, \overline{S} \rangle$ *une extension inessentielle sous-inductive d'un groupoïde sous-local* S *et* S'' *le sous-pseudogroupe faible engendré dans* S *par la source* S' *de* κ *; alors* κ *peut être prolongé en un foncteur sous-inductif* κ' *de* S'' *sur* S, *dont la restriction à* S' *est* κ. *Si* S' *est un groupoïde sous-local et si* κ *est inductif,* κ' *est inductif.*

DEMONSTRATION. Pour tout $f'' \in S''$, il existe $f' \in S'$ tel que f'' soit un f'-agrégat d'une sous-classe de S'; par suite la classe $f''^{>}$ des éléments $f \in S'$ tels que $f < f''$ admet f'' pour f'-agrégat dans $\overline{S}$; la classe $\kappa(f''^{>})$ étant majorée par $\kappa(f') \in S$ admet un $\kappa(f')$-agrégat dans S, que nous désignerons par $\kappa'(f'')$. Comme, si $e \in S'_o$, $e < \alpha(f'')$, l'élément $f'e$ appartient à S', on a $(\alpha(f''))^{>} = \alpha(f''^{>})$, d'où $\kappa'(\alpha(f'')) = \alpha(\kappa'(f''))$.- Si f'' et $g'' < g'$ sont deux éléments composables de S'', alors $\kappa'(g'').\kappa'(f'')$ est défini et appartient à $\bigcup(\kappa(g''^{>})\kappa(f''^{>}))$. Pour tout $g \in g''^{>}$ et tout $f \in f''^{>}$, on a $\alpha(g) < \beta(f')$ et $\beta(f) < \overline{\beta(f')}$; donc $e = \alpha(g) \cap \beta(f) \in S'$ et $gf = (g'e).(ef') \in S'$. Il en résulte

$$\kappa(e) = \alpha(\kappa(g)) \cap \beta(\kappa(f)) \text{ et } \kappa(g)\kappa(f) = \kappa(g)\kappa(e)\kappa(f) = \kappa(gf),$$

d'où :

$$\kappa(g)\kappa(f) \in \kappa((g''f'')^{>}) \text{ et } \kappa'(g'').\kappa'(f'') = \kappa'(g''.f'').$$

Par conséquent κ' est un foncteur de S'' vers S.- Soient e''_1 et e''_2 deux unités de S'' majorées par $e' \in S'_o$; pour tout $e_1 < e''_1$ et tout $e_2 < e''_2$, on a $\kappa(e_1)\kappa(e_2) = \kappa(e_1 e_2)$; on en déduit :

$$\kappa'(e''_1)\kappa'(e''_2) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup} \kappa(e''^{>}_1) \overset{\kappa(e')}{\bigcup} \kappa(e''^{>}_2) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup} \kappa((e''_1 e''_2)^{>}) = \kappa'(e''_1 e''_2)$$

et κ' est sous-inductif.- Si κ est inductif, soit E'' une sous-classe de S''_o admettant un e'-agrégat a''; pour tout $a \in a''^{>}$, on trouve, si S' est sous-local, $a = aa'' = \overset{e'}{\bigcup} E''a$, d'où :

$$\kappa'(a'') = \overset{\kappa(e')}{\bigcup} \kappa(a''^{>}) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup} \kappa(E''^{>}) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup} \kappa'(E''),$$

c'est-à-dire que κ' est inductif.

COROLLAIRE. *Si* S *est un groupoïde local complet, alors* κ *peut être prolongé en un foncteur inductif* $\overline{\kappa}$ *tel que* $(\overline{\kappa}, \overline{S})$ *soit une extension inessentielle de* S.

Démonstration analogue à celle de la proposition.

THEOREME 2. *Soient* S, S' *et* $\overline{S}$ *des groupoïdes sous-préinductifs,* $\langle \kappa, \overline{S} \rangle$ *une extension inessentielle inductive de* S, $\overline{\kappa}$ *un foncteur inductif de* $\overline{S}$ *sur* S *dont la restriction à la source de* κ *est* κ *et* p *un étalement de* S' *dans* S. *Alors* $\langle \eta, \overline{\kappa}^*(S', p) \rangle$ *est* *une extension inessentielle inductive de S', η désignant le foncteur canonique de $\overline{\kappa}^*(S', p)$ sur S'.*

DEMONSTRATION. Soit S_1 le sous-groupoïde sous-préinductif de $\overline{S}$ source de κ; d'après le théorème 2-1-III-[1], $(\eta, \kappa^*(S', p))$ et $(\overline{\eta}, \overline{\kappa}^*(S', p))$, où $\overline{\eta}$ est la projection canonique de $\overline{\kappa}^*(S', p)$ sur S', sont des extensions inessentielles de S' (on identifie $f' \in S'$ avec $(f', p(f')) \in \kappa^*(S', p)$); d'après la proposition 1-1-III-[1], $\kappa^*(S', p)$ s'identifie au groupoïde induit $Id^*(\overline{\kappa}^*(S', p), \overline{p}')$, où Id est le foncteur injection de S_1 dans $\overline{S}$ et $\overline{p}'$ le foncteur canonique de $\overline{\kappa}^*(S', p)$ vers $\overline{S}$; de la relation $\langle \overline{S}, Id, S_1 \rangle$ et du corollaire 3 du théorème 1, on déduit que $\kappa^*(S', p)$ s'identifie à un sous-groupoïde sous-préinductif de $\overline{\kappa}^*(S', p)$.- Soient e_1 et e_2 deux unités de S' majorées par $e \in S'_0$; on a :

$$p(e_1 e_2) = p(e_1) p(e_2);$$

si E est une sous-classe de S'_0 majorée par e et admettant un e-agrégat dans S', on a:

$$p(\overset{e}{\bigcup} E) = \overset{p(e)}{\bigcup} p(E);$$

S_1 étant une partie sous-inductive faible de $\overline{S}$, il en résulte que S' est une partie sous-inductive faible de $\overline{\kappa}^*(S', p)$.- Soit $(h, f) \in \overline{\kappa}^*(S', p)$; il existe une sous-classe F de S_1 telle que $f \in \underline{\bigcup} F$; $\overline{\kappa}$ étant inductif, on a $p(h) = \overline{\kappa}(f) = \overset{\kappa(f)}{\bigcup} \kappa(F)$. Puisque p est un étalement de $\overline{S'}$ dans S, pour tout $f' \in F$, il existe $h' < h$ tel que :

$$p(h') = \kappa(f') < \overline{\kappa}(f) = p(h);$$

la classe K des éléments (h', f') est majorée par (h, f); soit (h_1, f_1) un majorant de K dans $\overline{\kappa}^*(S', p)$ vérifiant $(h_1, f_1) < (h, f)$; on trouve :

$$F < f_1 < f, \text{ d'où } f = \overset{f}{\bigcup} F = f_1,$$

$$p(h_1) = \kappa(f) = p(h), h_1 < h.$$

Donc $h = h_1$ et $(h, f) \in \underline{\bigcup} K$. Ceci prouve que $\kappa^*(S', p)$ est une base de $\overline{\kappa}^*(S', p)$.

DEFINITION 2. *Soient S et $\overline{S}$ deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que $\overline{S}$ est un* élargissement inductif de *S et on note $S \overline{\lessdot} \overline{S}$, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1) S est saturé par induction dans $\overline{S}$.

2) $\overline{S}$ admet pour base un sous-groupoïde sous-préinductif S_1 qui est un élargissement de S (définition §2-II-[1]).

Remarquons que si S_1 est un élargissement d'un groupoïde S, alors S_1^+ est un élargissement inductif de S^+, où $S_1^+ = S_1 + \{0\}$ et $S^+ = S + \{0\}$, muni de la relation d'ordre

$$f' < f \text{ si, et seulement si, } f' = f \text{ ou } f' = 0.$$

PROPOSITION 3. *Soient S et $\overline{S}$ deux groupoïdes sous-préinductifs tels que $S \overline{\lessdot} \overline{S}$; alors l'élargissement S_1 de S base de $\overline{S}$ est saturé par induction dans $\overline{S}$ et $\overline{S}$ est la composante inductive de S dans $\overline{S}$.*

En effet, soit $g \in S_1$ et $g' < g$; il existe $f \in S_1$ tel que $\alpha(f) = \beta(g)$ et $\beta(f) \in S$; S étant saturé par induction dans $\overline{S}$, on a $\beta(f\beta(g')) \in S_0$; comme S_1 est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\overline{S}$, on trouve

$$f\beta(g') = \beta(f\beta(g'))f \in S_1, \beta(g') \in S_1 \text{ et } g' = \beta(g')g \in S_1.$$

PROPOSITION 4. *Pour qu'un groupoïde sous-préinductif $\overline{S}$ soit un élargissement inductif d'un sous-pseudogroupe S, il faut et il suffit que S soit un sous-groupoïde plein saturé par induction et que la composante inductive de S dans $\overline{S}$ soit $\overline{S}$.*

DEMONSTRATION. Si la composante inductive (définition 10 - 2 -[2]) de S dans $\overline{S}$ est $\overline{S}$, la composante inductive faible S' de S dans $\overline{S}$ est un élargissement de S et une base de $\overline{S}$.- Inversement, soit $S \overline{\lessdot} \overline{S}$ et S_1 l'élargissement de S base de $\overline{S}$. Soit $g \in \overline{S}$ tel que $\alpha(g) \in S$ et $\beta(g) \in S$; par hypothèse, il existe une sous-classe F de S_1 admettant g pour sous-agrégat; pour tout $f \in F$, on a $\alpha(f) < \alpha(g)$ et $\beta(f) < \beta(g)$; comme S est plein dans S_1 et saturé par sous-agrégation dans $\overline{S}$, il en résulte $F \subset S$ et $g \in S$. Donc S est un sous-groupoïde plein de $\overline{S}$. La composante inductive faible de S dans $\overline{S}$ contenant S_1 est une base de $\overline{S}$.

PROPOSITION 5. *Pour qu'un groupoïde sous-préinductif $\overline{S}$ soit un élargissement inductif d'un sous-groupoïde S, il faut et il suffit qu'il existe un atlas faible complet F de $\overline{S}$ tel que $\overline{a(F)} = \overline{S}$ et $b(F) = S$, où $\overline{a(F)}$ est le sous-pseudogroupe de $\overline{S}$ engendré par $a(F)$; dans ce cas, F est saturé par induction.*

DEMONSTRATION. S'il existe un atlas faible complet F vérifiant ces conditions, d'après la proposition 6 - 3 -[2], $a(F)$ est un élargissement de $b(F)$ et $b(F)$ est saturé par induction dans $a(F)$; comme $a(F)$ est un sous-pseudogroupe faible de $\overline{S}$ base de $\overline{S}$, $a(F)$, et par suite aussi $b(F)$, est saturé par induction dans $\overline{S}$. Donc on a $S \overline{\lessdot} \overline{S}$.- Inversement, supposons $S \overline{\lessdot} \overline{S}$. Soit S_1 l'élargissement de S base de $\overline{S}$ et F la classe des éléments $f \in S_1$ tels que $\beta(f) \in S$; comme S_1 et S sont saturés par induction dans $\overline{S}$, F est aussi saturé par induction; si $f''f^{-1}f'$ est défini, où $f \in F$, $f' \in F$, $f'' \in F$, on a $f''f^{-1}f' \in S_1$ et $\beta(f''f^{-1}f') < \beta(f'')$, d'où $f''f^{-1}f' \in F$. Il en résulte que F est un atlas faible complet de $\overline{S}$ tel que $a(F)$ soit contenu dans S_1. Pour tout $g \in S_1$, il existe $f \in F$ avec $\alpha(f) = \beta(g)$; il en résulte $g = f^{-1}.(f.g) \in F^{-1}F = a(F)$ et $\overline{a(F)} = \overline{S}$.- Comme $\beta(F) \subset F$ la proposition 6 - 3 -[2] montre que $b(F)$ est le sous-groupoïde plein de $a(F)$ ayant $\beta(F)$ pour classe de ses unités, donc $b(F) = S$.

COROLLAIRE 1. *Pour que l'on ait* $S \overline{\leqslant} \overline{S}$, *où* S *est un sous-pseudogroupe de* $\overline{S}$, *il faut et il suffit qu'il existe un atlas complet* $\overline{F}$ *de* $\overline{S}$ *avec* $\overline{a}(\overline{F}) = \overline{S}$ *et* $b(\overline{F}) = S$.

En effet, la condition est évidemment suffisante.- Si on a $S \overline{\leqslant} \overline{S}$, l'atlas complet $\overline{F}$ engendré par l'atlas F construit dans la proposition est tel que $\beta(\overline{F}) = S_o$; comme $\beta(\overline{F}) \subset \overline{F}$, on a $\overline{b}(\overline{F}) = b(\overline{F})$ et $b(\overline{F})$ est le sous-groupoïde plein de S ayant S_o pour classe de ses unités, d'où $b(\overline{F}) = S$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $S \overline{\leqslant} \overline{S}$; *alors* $\overline{S}_o$ *s'identifie à la classe des atlas faibles complets* H *de* $\overline{S}$ *tels que* $H \dot{<} F$ (*th.* 2- 4-[2] *où* $\dot{<}$ *est noté* $\ll$) *et que* $\underline{\bigcup}\, \alpha(H) \neq \emptyset$.

DEMONSTRATION. Soit $s \in \overline{S}_o$ et H la classe des éléments $h \in S_1$ tels que $\alpha(h) < s$ et $\beta(h) \in S$; puisque H est saturé par induction, H est un atlas faible contenu dans F; $a(F)$ étant une base de $\overline{S}$, la classe $\alpha(H)$ admet s pour sous-agrégat dans $\overline{S}$ et $b(H)$ est une composante inductive faible de S. Donc $H \dot{<} F$.- Inversement si H' est un atlas tel que $H' \dot{<} F$ et que $\alpha(H')$ admette un sous-agrégat s, alors H' est saturé par induction dans F, donc s'identifie à l'atlas H construit ci-dessus à partir de s.

THEOREME 3. *Dans une classe* K *de groupoïdes sous-préinductifs la relation* $S \overline{\leqslant} \overline{S}$ *est une relation d'ordre.*

DEMONSTRATION. La relation $S \overline{\leqslant} \overline{S}$ est évidemment réflexive et propre. Soient $S \overline{\leqslant} \overline{S}$ et $\overline{S} \overline{\leqslant} \overline{\overline{S}}$; il existe un atlas faible complet de $\overline{\overline{S}}$ tel que $\overline{a}(F) = \overline{\overline{S}}$, $b(F) = \overline{S}$, et un atlas faible complet G de $\overline{S}$ pour lequel $\overline{a}(G) = \overline{S}$ et $b(G) = S$; comme F et G sont saturés par induction, G est un atlas faible complet de $\overline{\overline{S}}$ et GF est saturé par induction. On a :

$$(GF)^{-1}(GF) \subset F^{-1}G^{-1}GF \subset F^{-1}b(F)F = a(F).$$

et

$$GF((GF)^{-1}GF) \subset GF\,a(F) = GF;$$

donc GF est un atlas faible complet de $\overline{\overline{S}}$ et $\overline{a}(GF) \subset \overline{a}(F)$.- Soient $f \in F$, $f' \in F$ et $f^{-1}.f' \in a(F)$; il existe une sous-classe E de $\alpha(G)$ avec $\beta(f) \in \underline{\bigcup}\, E$; par suite

$$f^{-1}.f' \in \underline{\bigcup}\, f^{-1}Ef', \text{ d'où } a(F) \subset \overline{a}(GF).$$

Il en résulte $\overline{a}(GF) = \overline{a}(F) = \overline{\overline{S}}$.- Pour tout $gf \in GF$, on a $\beta(gf) < \beta(g)$, c'est-à-dire $\beta(gf) \in S_o$; par ailleurs, soit $e \in S_o$; alors $e \in G \subset \overline{S}$ et $e \in F$; il s'ensuit $e = ee \in GF$. Des relations $\beta(GF) = S_o$ et $GF \subset \overline{a}(GF)$ et de la proposition 6-3-[2] on déduit $b(GF) = S$. Par conséquent $S \overline{\leqslant} \overline{\overline{S}}$ et $\overline{\leqslant}$ est une relation d'ordre.

DEFINITION 3. *Soient* $\langle S, p, S' \rangle$ *et* $\langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$ *deux espèces de structures sous-préinductives* (*presque*) *au-dessus de* S; *on dit que* $\langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$ *est un* élargissement inductif de $\langle S, p, S' \rangle$ (presque) au-dessus de S, *et on note* $\langle S, p, S' \rangle \overline{\leqslant} \langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) S' est saturé par induction dans $\overline{S}'$.

2) Il existe un élargissement (S, p_1, S'_1) de (S, p, S') tel que $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ soit une sous-espèce sous-préinductive de $\langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$ (presque) au-dessus de S et S'_1 une base de $\overline{S}'$.

Ces conditions entraînent que $\langle S, p, S' \rangle$ est une sous-espèce sous-préinductive (presque) au-dessus de S de $\langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$ et de $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$.

PROPOSITION 6. *Soient $\langle S, p, S' \rangle$ et $\langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives; si l'on a $\langle S, p, S' \rangle \overline{\leqslant} \langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$, on a $S' \overline{\leqslant} \overline{S}'$.*

COROLLAIRE. *Si S' est un sous-pseudogroupe de $\overline{S}'$, si $S' \overline{\leqslant} \overline{S}'$ et si (S, p, S') est une sous-espèce de $(S, \overline{p}, \overline{S}')$, alors on a $\langle S, p, S' \rangle \overline{\leqslant} \langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$.*

En effet, soit S'_1 la composante inductive faible de S' dans $\overline{S}'$ et p_1 la restriction de $\overline{p}$ à S'_1; comme S'_1 est le sous-groupoïde plein saturé de $\overline{S}'$ engendré par S', (S, p_1, S'_1) est une espèce de structures, sous-espèce de $(S, \overline{p}, \overline{S}')$, d'après la proposition 1-2-II-[1] et S'_1 est un élargissement de S', base de $\overline{S}'$.

THEOREME 4. *Soit (S, p, S') une espèce de structures et $(S, \overline{p}, \overline{S}')$ son élargissement maximal au-dessus de S; si S et S' sont des groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de S vers S', alors il existe une relation d'ordre sur $\overline{S}'$ pour laquelle $\overline{S}'$ est un élargissement inductif de S' et $\overline{p}$ un foncteur sous-inductif.*

DEMONSTRATION. D'après le théorème 2-2-III-[1], $\overline{S}'$ est un groupoïde quotient du groupoïde $\alpha^*(S')$ induit de S', où α désigne l'application $f \to \alpha(f)$ de la classe I des éléments $f \in S$ tels que $\alpha(f) \in p(S')$ dans S_0. Ecrivons un élément de S' sous la forme d'un couple (f, s), où $f \in S$, $s \in S'_0$, $p(s) = \alpha(f)$. D'après le théorème 1, $\alpha^*(S')$ est canoniquement muni d'une structure de groupoïde sous-préinductif. Soit q le foncteur canonique de $\alpha^*(S')$ sur $\overline{S}'$; pour que l'on ait $q(h, f', f) = q(h_1, f'_1, f_1)$, il faut et il suffit qu'il existe $g \in S$ et $g' \in S'$ tels que :

$$h_1 = g'.h.g^{-1},\ f_1 = f.p(g)^{-1},\ f'_1 = f'.p(g')^{-1};$$

dans ce cas, la relation

$$(h_1, f'_1, f_1) < (h, f', f) \text{ dans } \alpha^*(S')$$

entraîne

$$h_1 < h,\ f_1 < f,\ f'_1 < f', \text{ d'où } (h_1, f'_1, f_1) = (h, f', f).$$

Par suite deux éléments de $\alpha^*(S')$ ayant même image par q ne sont pas comparables.- Soient $(k, m', m) < (h, f', f)$, où $(k, m', m) \in \alpha^*(S')$; si $(h_1, f'_1, f_1) \in \overset{-1}{q}(q(h, f', f))$, posons :

$$\gamma = g\,\alpha(k),\ \gamma' = g'\beta(k'),\ k_1 = \gamma'.k.\gamma^{-1},\ m_1 = m.p(\gamma)^{-1},\ m'_1 = m'.p(\gamma')^{-1};$$

on trouve :

$$(k_1, m'_1, m_1) \in \alpha^*(S') \text{ et } q(k_1, m'_1, m_1) = q(k, m', m).$$

Les conditions 1 et 2 du théorème 1-1 sont ainsi vérifiées; par suite on peut définir sur $\overline{S'}$ une structure de groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de $\alpha^*(S')$, telle que S' s'identifie à un sous-groupoïde ordonné de $\overline{S'}$. - Soit $q(k, m', m) < h$, où $h \in S'$; il existe

$$(k_1, m'_1, m_1) \in \overset{-1}{q}(q(k, m', m))$$

avec

$$k_1 < h,\ m'_1 < p(\alpha(h)),\ m < p(\beta(h)),$$

d'où $q(k_1, m'_1, m_1) \in S'$ et S' est saturé par induction dans $\overline{S'}$.- Nous désignerons désormais par $(f, s)S'$ l'élément $q(s, f, f) \in \overline{S'_o}$ et nous écrirons $\overline{p}(q(h, f', f)) = f'.p(h).f^{-1}$. Si $(f, s)S'$ et $(f', s')S'$ sont deux unités de $\overline{S'}$ majorées par $(f'', s'')S' \in \overline{S'_o}$, on a :

$$\overline{p}((f, s)S' \cap (f', s')S') = \overline{p}((f \cap f', s \cap s')S') = \beta(f \cap f') = \beta(f) \cap \beta(f')$$
$$= \overline{p}((f, s)S') \cap \overline{p}((f', s')S').$$

COROLLAIRE 1. *Si S et S' sont sous-inductifs et p inductif alors $\overline{S'}$ est sous-inductif. Si de plus S et S' sont inductifs et si $p(S')$ est $\bigcup$-saturé dans S, alors S' est inductif.*

DEMONSTRATION. Soit $A = ((g_i, s_i)S')_{i \in I}$ une classe d'éléments de S' majorée par $(f, s)S'$, où $(g_i, s_i) < (f, s)$ pour tout $i \in I$; la classe A admet mS' pour $(f, s)S'$-sous-agrégat, où $m = (\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} g_i, \overset{s}{\bigcup_{i \in I}} s_i)$. Supposons de plus S et S' inductifs et $p(S')$ saturé par agrégation dans S. Soit $(f', s')S'$ un autre majorant de A et $m'S'$ le $(f', s')S'$-sous-agrégat de A; on a : $m' = (\overset{f'}{\bigcup_{i \in I}} g'_i, \overset{s'}{\bigcup_{i \in I}} s'_i)$, où $(g'_i, s'_i) < (f', s')$ et $(g'_i, s'_i)\ S' \in A$. Les éléments $g_i^{-1}.g'_i \in p(S')$ étant majorés par $f^{-1}f'$ ils admettent un agrégat $k \in p(S')$ tel que :

$$\alpha(k) = p(\bigcup_{i \in I} s'_i),\ \beta(k) = p(\bigcup_{i \in I} s_i) \text{ et } \beta(\bigcup_{i \in I}(g_i^{-1}.g'_i, s'_i)) = \beta((k, \bigcup_{i \in I} s'_i)) = \bigcup_{i \in I} s_i;$$

il en résulte $mS' = m'S'$ et $\overline{S'}$ est inductif.

COROLLAIRE 2. *Si $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S, alors $\langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S, élargissement inductif de $\langle S, p, S' \rangle$. Si p est un étalement de S' dans S, $\overline{p}$ est un étalement de $\overline{S'}$ dans S.*

En effet, soient $(f, s)S' \in \overline{S'}$ et $(f', s')S' < (f, s)S'$ tels que $\beta(f) = \beta(f')$; il en résulte

$$f = f',\ s' < s,\ p(s') = p(s) = \alpha(f),$$

d'où $s' = s$ et $\overline{p}$ est (sous)-inductif strict.- Si p est un étalement, soit $e < \overline{p}((f, s)S') = \beta(f)$; il existe $s'' < s$ tel que $p(s'') = \alpha(ef) < p(s)$; on a si $f'' = ef$:

$$(f'', s'')S' < (f, S)\ S' \text{ et } \overline{p}((f'', s'')S') = e.$$

Donc $\overline{p}$ est un étalement.

COROLLAIRE 3. *Si* $\langle S, p, S' \rangle$ *est une espèce de structures sous-préinductive au-dessus de* S *telle que* $p(S')$ *soit une partie sous-inductive de* S, *alors* S' *est un sous-pseudogroupe de* $\overline{S'}$.

En effet, soit E une sous-classe de S'_o admettant $(f, s)S'$ pour sous-agrégat dans $\overline{S'}$. Il existe $g_i < f$ tel que $(g_i, s_i)S' \in E$; si $s' < s$ est un élément tel que $s_i < s'$, on a :

$$(fp(s'), s')S' < (f, s)S' \text{ et } E < (fp(s'), s')S',$$

d'où $s = \overset{s}{\bigcup\limits_{i \in I}} s_i$. Puisque p est inductif,

$$p(s) = \alpha(f) = \overset{\alpha(f)}{\bigcup\limits_{i \in I}} \alpha(g_i)$$

et la classe des éléments g_i étant majorée par f admet un f-agrégat g dans S, tel que $\alpha(g) = p(s)$ et $g \in p(S')$; par suite $E < (g, s)S' < (f, s)S'$. Donc $f = g$, $(f, s)S' \in S'$ et S' est un sous-pseudogroupe de $\overline{S'}$.

3. Atlas complets compatibles avec un foncteur.

Etant donnés deux groupoïdes sous-préinductifs S et S', nous désignerons leurs foncteurs d'induction par φ et φ' respectivement.

PROPOSITION 1. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* p *un foncteur sous-inductif de* S' *dans* S *et* E *une sous-classe compatible de* S'_o *telle que la restriction de* p *à* E *soit compatible avec l'intersection finie (c'est-à-dire, pour tout* $e \in E$ *et tout* $e' \in E$, $p(e') \cap p(e)$ *est défini et égal à* $p(e'e)$*). Alors la restriction de* p *à* $\varphi'(E)$ *est compatible avec l'intersection finie. Si* p *est sous-inductif strict, sa restriction à* E *est un isomorphisme sur* $p(E)$.

DEMONSTRATION. Soient $e_1 e$ et $e'e'_1$ deux éléments de $\varphi'(E)$, où $e \in E$, $e' \in E$, $e_1 \in S'_o$ et $e'_1 \in S'_o$; les éléments $ee'e_1$ et $ee'e'_1$ étant majorés par ee', on a

$$p((ee_1)(e'e'_1)) = p(e_1ee')p(e'ee'_1) = (p(e_1e)p(ee'))(p(ee')p(e'e'_1))$$
$$= (p(e_1e)p(e'))(p(e)p(e'e'_1)) = p(e_1e)p(e'_1e'),$$

et la restriction de p à $\varphi'(E)$ est compatible avec l'intersection finie.- Supposons p sous-inductif strict. Soient $e \in E$ et $e' \in E$ tels que $p(e) = p(e')$; les relations :

$$p(e'e) = p(e)p(e') = p(e) = p(e'),\ e'e < e \text{ et } e'e < e'$$

entraînent $e'e = e = e'$; ainsi la restriction de p à E est une injection. Enfin soit $e'' \in E$, $p(e'') < p(e)$; des égalités

$$p(e''e) = p(e'')p(e) = p(e''),$$

on déduit $e''e = e''$, d'où $e'' < e$, de sorte que la restriction de p à E est un isomorphisme sur $p(E)$. Il en résulte aussi que la restriction de p à $\varphi'(E)$ est un isomorphisme sur $p(\varphi'(E))$, puisque cette restriction est compatible avec l'intersection finie d'après ce qui précède.

DEFINITION 1. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de S' vers S; un atlas (faible) complet F de S' est dit* compatible avec p *si les conditions suivantes sont vérifiées, où $f \in F$, $f' \in F$:*

1°) Si $\alpha(f)\,\alpha(f')$ est défini, $p(\alpha(f))$ et $p(\alpha(f'))$ admettent $p(\alpha(f)\,\alpha(f'))$ pour intersection.

2°) Si $\beta(f)\beta(f')$ est défini, $p(\beta(f))$ et $p(\beta(f'))$ ont $p(\beta(f)\,\beta(f'))$ pour intersection.

PROPOSITION 2. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de S' vers S; pour qu'un atlas faible complet F de S' soit compatible avec p, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1°) Soient $f \in F$ et $f' \in F$; si $f^{-1}f'$ est défini, alors $p(f^{-1})p(f')$ est défini et égal à $p(f^{-1}f')$; si $f'f^{-1}$ est défini, on a de même $p(f')p(f^{-1}) = p(f'f^{-1})$.

2°) La restriction de p à $a(F)$ et $b(F)$ est compatible avec la pseudomultiplication dans S' et dans S.

3°) Soient $f \in F$, $h \in a(F)$ et $k \in b(F)$; si fh est défini, on a $p(f)p(h) = p(fh)$; si kf est défini, on a $p(kf) = p(k)p(f)$.

DEMONSTRATION. Soient $f \in F$ et $f' \in F$. Supposons F compatible avec p. Si $f'f^{-1}$ est défini, $e = \alpha(f')\,\alpha(f)$ est défini et $p(e) = p(\alpha(f))\,\alpha(p(f'))$; par suite

$$p(f'f^{-1}) = p(f'e).p(fe)^{-1} = (p(f')p(e)).(p(e)p(f^{-1})) = p(f')p(f^{-1}).$$

De même si $f^{-1}f'$ est défini, on a $p(f^{-1}f') = p(f^{-1})p(f')$, de sorte que la condition 1 est vérifiée. Soient $h \in a(F)$ et $h' \in a(F)$ tels que $e' = \beta(h)\,\alpha(h')$ soit défini ; puisque $\alpha(a(F)) = \alpha(F)$, on a $p(e') = \beta(p(h))\,\alpha(p(h'))$ et $p(h'h) = p(h')p(h)$; on en déduit que la condition 2 est remplie. Si fh est défini, on a $fh = (fe'').(e''h)$, où $e'' = \alpha(f)\,\beta(h)$ et $p(e'') = \alpha(p(f)) \cap \beta(p(h))$, d'où

$$p(fh) = p(f)p(e'')p(h) = p(f)p(h).$$

- Inversement, supposons la condition 1 vérifiée. Soit $h = f^{-1}.f' \in a(F)$ et $f'' \in F$ tels que $f''h$ soit défini. Les relations :

$$f''(f^{-1}.f') = (f''f^{-1}).(\alpha(f''f^{-1})f'),$$

$$p(f''f^{-1}) = p(f'')p(f^{-1}) \text{ et } p(\alpha(f''f^{-1})f') = \alpha(p(f''f^{-1}))p(f')$$

entraînant

$$p(f''f^{-1}f') = p(f'')p(f^{-1})p(f') = p(f'')p(f^{-1}f'),$$

la condition 3 est aussi remplie. Pour tout $f_1 \in F$ et tout $f'_1 \in F$ tels que $e = \alpha(f_1)\alpha(f'_1)$ soit défini, on trouve :

$$p(e) = p(f_1^{-1}(f_1\alpha(f'_1))) = p(f_1^{-1})p(f_1\alpha(f'_1)) = p(f_1^{-1})p(f_1)p(\alpha(f'_1)) =$$
$$= p(\alpha(f_1))p(\alpha(f'_1)).$$

COROLLAIRE 1. *La classe $H(S', p)$ des atlas faibles complets de S' compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $H(S')$ (th. 2-4-[2])*

COROLLAIRE 2. *La sous-classe de $H'(S')$ formée des atlas faibles compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $H'(S')$ (respectivement de $\dot{H}'(S')$) que nous désignerons par $H'(S', p)$ (respectivement $\dot{H}'(S', p)$) (voir théorèmes 1-4-[2] et 2-4-[2]).*

En effet, soit $F \in H'(S', p)$ et $F' < F$, où $F' \in H'(S)$; puisque $F' = F\alpha(F')$ est contenu dans $\varphi'(F)$, il résulte de la proposition 1 que F' est compatible avec p. Il s'ensuit que $H'(S', p)$ est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $H'(S')$, et par suite de $\dot{H}'(S')$.

COROLLAIRE 3. *La sous-classe intersection de $I_f(S')$ (respectivement de $\dot{I}_f(S')$) avec $H'(S', p)$ (respectivement avec $\dot{H}'(S', p)$) est un sous-groupoïde saturé par induction de $I_f(S')$ (respectivement de $\dot{I}_f(S')$), qui contient $T(S')$ et que nous désignerons par $I_f(S', p)$ (respectivement $\dot{I}_f(S', p)$) (cor. th. 1 et 2 et th. 7 du § 4-[2]).*

En effet, un $F \in I_f(S', p)$ est une sous-classe inductive faible compatible telle que la restriction de p à F soit compatible avec l'intersection finie puisque, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on a :

$$p(f \cap f') = p(f\alpha(f')) = p(f)p(\alpha(f')) = p(f'\alpha(f)) = p(f')p(\alpha(f)),$$

d'où $\quad p(f' \cap f) = p(f) \cap p(f')$.

COROLLAIRE 4. *La sous-classe des complexes de S' qui appartiennent à $I_f(S', p)$ est un groupoïde local $(\tilde{S}', p)$, dont S est une base, pour la relation $F' \subset F$ (définition 1-4-[2]).*

PROPOSITION 3. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-prélocaux, p un foncteur inductif de S' vers S et F un atlas complet de S' compatible avec p. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) F est un atlas propre compatible avec p.

2) F admet pour base une sous-classe B telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles et que les restrictions de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles avec l'intersection finie.

3) F admet pour base un atlas faible complet F_1 appartenant à $H'(S',p)$.

4) $\overline{a}(F)$ et $\overline{b}(F)$ sont des sous-pseudogroupes propres auxquels la restriction de p est compatible avec la pseudomultiplication dans S et dans S'.

DEMONSTRATION. Supposons que la condition 2 soit vérifiée. Alors tout élément $a \in \alpha(\overline{a}(F))$ est le a-agrégat d'une sous-classe E de $\alpha(B)$; supposons $b = aa'$ défini, où a' est le a'-agrégat d'une sous-classe E' de $\alpha(B)$; d'après la proposition 3-2-[2], on a :

$$a'a = \overset{b}{\bigcup}(E'E) \text{ et } p(a'a) = \overset{p(b)}{\bigcup} p(E'E);$$

pour tout $e \in E$ et tout $e' \in E'$, $e'e$ est défini et $p(e')p(e) = p(e'e)$, d'où

$$p(E'E) = p(E')p(E) \text{ et } p(a'a) = \overset{p(b)}{\bigcup}(p(E)p(E'));$$

il résulte de la proposition 3-2-[2] que

$$p(a') = \overset{p(a')}{\bigcup} p(E') \text{ et } p(a) = \overset{p(a)}{\bigcup} p(E)$$

admettent $\overset{p(b)}{\bigcup}(p(E)p(E'))$ pour intersection dans S, c'est-à-dire $p(a'a) = p(a')p(a)$; ainsi $\overline{a}(F)$ est compatible avec p. Il s'ensuit, d'après la proposition 2, que la condition 4 est vérifiée.- Montrons que la condition 2 entraîne la condition 3; soit $F' \in H'(S')$ une base de F (cor. 2, propo. 5-2-[2]) saturée par induction dans F; désignons par A et A' les sous-classes de $\alpha(F')$ et $\beta(F')$ formées des éléments induits des éléments de $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ respectivement. D'après la proposition 1, la restriction de p à A et A' est compatible avec l'intersection finie. La sous-classe F_1 des éléments $f \in F'$ tels que $\alpha(f) \in A$ et $\beta(f) \in A'$ est une sous-classe saturée par induction dans F', donc un atlas faible complet appartenant à $H'(S',p)$. Comme A et A' sont des bases de $\alpha(F)$ et $\beta(F)$, l'atlas F_1 est une base de F.- La proposition en résulte, les autres implications étant évidentes.

COROLLAIRE 1. *La classe $A'(S',p)$ des atlas complets propres compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $A(S')$ et de $\mathring{A}(S')$ (théorèmes 4-4-[2] et 5-4-[2] où $\mathring{A}(S')$ est noté $(A(S'), \ll)$).*

DEMONSTRATION. Si $F' < F$, où $F \in A'(S',p)$, et si $F_1 \in H'(S',p)$ est une base de F appartenant à $H'(S',p)$ et saturée par induction, l'atlas complet F' admet pour base la classe F'_1 des éléments $f' \in F'$ majorés par un élément de F_1 (voir théorème 4-4-[2]); puisque F'_1 est contenu dans $\varphi'(F_1)$, F'_1 est un atlas faible complet compatible avec p, donc $F' \in A'(S',p)$.

COROLLAIRE 2. *La classe $I(S',p)$ intersection de $A'(S',p)$ avec $I(S')$ (th.6-4-[2] et cor.théorème 4-4-[2]) est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $I(S')$ (resp. de $\dot{I}(S')$) désigné par $I(S',p)$ (resp. $\dot{I}(S',p)$).*

THEOREME 1. *Soient S un groupoïde sous-prélocal et S' un groupoïde sous-préinductif, p un foncteur sous-inductif de S' vers S; l'application p' qui associe à $F \in H'(S',p)$ la partie sous-inductive faible engendrée par $p(F)$ dans S est un foncteur sous-inductif de $H'(S',p)$ (respectivement $\dot{H}'(S',p)$) vers $H'(S)$ (respectivement $\dot{H}'(S)$).*

DEMONSTRATION. Soit $H \in H'(S',p)_0$; pour tout $h \in H$, on a :

$$(p(h))^{-1} = p(h^{-1}) \in p(H);$$

soit $h' \in H$ tel que $p(h')p(h)$ soit défini; la restriction de p à H étant compatible avec la pseudomultiplication, on a $p(h'h) = p(h')p(h) \in p(H)$. Par suite $p(H)$ est un sous-groupoïde de S, qui est de plus stable pour la pseudomultiplication et $p'(H)$ est le sous-pseudogroupe faible qu'il engendre dans S.- Soit $F \in H'(S',p)$; pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, les éléments $p(f^{-1})$ et $p(f')$ de $p(F)$ admettent $p(f^{-1}f')$ pour pseudoproduit dans S; par suite $\alpha(p(F))$ et $\beta(p(F))$ sont des sous-classes compatibles de S ainsi que les sous-classes inductives faibles qu'elles engendrent dans S. Soit $f'' \in F$; on a :

$$p(f'')(p(f^{-1})p(f')) = p(f'')p(f^{-1}f') = p(f''f^{-1}f') \in p(F),$$

d'où $$p(a(F)) = p(F)^{-1}p(F) \text{ et } p(F)p(a(F)) = p(F).$$

D'après le corollaire de la proposition 9-2-[2], $p(F)$ est une base de $p'(F)$; la classe $p(F)p'(a(F))$ est un atlas faible complet admettant $p(F)p(a(F)) = p(F)$ pour base, en vertu de la proposition 4-3-[2]. Donc $p(F)p'(a(F)) = p'(F)$ et $p'(F)$ est un atlas faible complet de S.- Soit $G \in H'(S',p)$ avec $a(G) = b(F)$. On a $p(G.F) \subset p(G).p(F)$; soient $g \in G$ et $f \in F$ tels que $\alpha(p(g)) = \beta(p(f))$. La restriction de p à $\alpha(G)$ étant injective, on a $\alpha(g) = \beta(f)$, d'où $p(g).p(f) = p(g.f)$ et $p(G).p(F) = p(G.F)$. Par conséquent les atlas faibles complets $p'(G.F)$ et $p'(G).p'(F)$ qui admettent $p(G).p(F)$ pour base sont identiques et p' est un foncteur.- Soient F, F' et F'' trois éléments de $H'(S',p)$ tels que $F' < F$, $F'' < F$; comme $F' \subset \varphi'(F)$ et $F'' \subset \varphi'(F)$, on a, pour tout $f' \in F'$ et tout $f'' \in F''$,

$$p(f'\alpha(f'')) = p(f')p(\alpha(f')\alpha(f'')) = p(f')\alpha(p(f'')),$$

d'où $$p(F'\alpha(F'')) = p(F')\alpha(p(F'')).$$

Les atlas faibles complets $p'(F \cap F')$ et $p'(F') \cap p'(F'')$ admettant $p(F')\alpha(p(F''))$ pour base sont identiques et p' est un foncteur sous-inductif de $H'(S',p)$ vers $H'(S)$.-

Supposons maintenant $F' \dot{<} F$; on a $p'(F') \subset p'(F)$ et $p'(F') < p'(F)$ d'après ce qui précède, c'est-à-dire $p'(F') \dot{<} p'(F)$. Soient $H' \dot{<} H$ et $H'' \dot{<} H$, où H', H'' et H appartiennent à $H'(S', p)_o$. On a :

$$H' \dot{\cap} H'' = H \alpha(H') \alpha(H'') \text{ et } p'(H' \dot{\cap} H'') = p(H) p(\alpha(H')) p(\alpha(H'')).$$

Comme

$$p'(H') \dot{\cap} p'(H'') = p'(H) p'(\alpha(H')) p'(\alpha(H''))$$

admet $p(H) p(\alpha(H')) p(\alpha(H''))$ pour base, on a $p(H' \dot{\cap} H'') = p(H') \dot{\cap} p(H'')$. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Si p est un foncteur sous-inductif strict, alors p' est un foncteur sous-inductif strict de $H'(S', p)$ vers $H'(S)$ (resp. de $\dot{H}'(S', p)$ vers $\dot{H}'(S)$).*

DEMONSTRATION. Soit $F' < F$, où F et F' appartiennent à $H'(S', p)$ et $p'(F) = p'(F')$. Pour tout $f' \in F'$, il existe une sous-classe A de F et $f \in F$ tels que

$$p(f') = \overset{p(f)}{\bigcup} p(A) = p(f) \overset{e}{\bigcup} \alpha(p(A)), \text{ où } e = \alpha(p(f)).$$

D'après la proposition 1, la restriction de p à $\varphi'(\alpha(F))$ est un isomorphisme sur $p(\varphi'(\alpha(F)))$; comme $\alpha(f') \in \varphi'(\alpha(F))$, on a :

$$\alpha(f') = \overset{\alpha(f)}{\bigcup} \alpha(A) \in \alpha(F) \text{ et } f' = f \alpha(f') \in F,$$

d'où $F' \dot{<} F$. Etant donné que F' est saturé par induction dans F, $p(\alpha(F'))$ est saturé par induction dans $p(\alpha(F))$ et $p(F') = p(F) p(\alpha(F'))$ est saturé par induction dans $p(F)$. Comme $p(F')$ est une base de la partie sous-inductive faible $p'(F')$, on en déduit $p(F') = p(F)$. La restriction de p à $\alpha(F)$ et à $\alpha(F')$ étant une bijection sur $(\alpha(F))$ et sur $(\alpha(F'))$ respectivement, on a donc $\alpha(F) = \alpha(F')$, $F = F \alpha(F') = F'$.

COROLLAIRE 2. *La restriction de p' à $I_f(S', p)$ est un foncteur sous-inductif de $I_f(S', p)$ vers $I_f(S)$, qui applique $T(S')$ dans $T(S)$ (corollaire 3 proposition 2).*

En effet, pour tout $F \in I_f(S', p)$ la classe $p(F)$ est compatible dans S et la sous-classe inductive faible $p'(F)$ qu'elle engendre appartient à $I_f(S)$.- Si F est une paratopologie sur $f \in S'$, alors $p(F)$, et par suite $p'(F)$, admettent $p(f)$ pour plus grand élément, donc $p'(F) \in T(S)$.

THEOREME 2. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive au-dessus de S, où S' est un groupoïde sous-inductif; soit encore p l'application qui associe à $F \in H'(S', p)$ la classe $p(F)$; alors $\langle H'(S), p, H'(S', p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive et p est un étalement de $\dot{H}'(S', p)$ dans $\dot{H}'(S)$.*

DEMONSTRATION. Soit A une sous-classe de F telle que $p(A)$ admette un $p(f)$-agrégat g dans S, où $f \in F$. Comme p définit un isomorphisme de $\alpha(F)$ sur $p(\alpha(F))$, la classe A est majorée par f et admet un f-agrégat b dans F tel que $p(b) = g$, d'où

$g \in p(F)$ et $p(F) \in H'(S)$. La démonstration du théorème 1 montre que p est un foncteur sous-inductif strict de $H'(S', p)$ vers $H'(S)$, l'axiome (D) dans S n'étant utilisé que pour passer de $p(F)$ à $p'(F)$.- Soient $f \in F$ et $f' \in F$ tels que $p(f) = p(f')$; d'après la proposition 1, on a $\alpha(f) = \alpha(f')$, d'où $f = f'$; par suite la restriction de p à F est un isomorphisme sur $p(F)$.- Soit $H \in H'(S', p)_0$ tel que $p(H) = a(p(F))$; soit G la classe des éléments $g \in S'$ tels que $p(g) \in p(F)$ et $\alpha(g) \in \alpha(H)$. Puisque la restriction de p à H est une bijection π sur $p(H)$ et qu'à tout couple $(p(f), \alpha(h))$, où $f \in F$, $h \in H$ et $\alpha(p(f)) = p(\alpha(h))$, correspond un et un seul $g \in G$, la restriction de p à G est un isomorphisme sur $p(F)$ ainsi que l'application $\hat{\pi}$ qui associe à $g \in G$ l'élément $f \in F$ tel que $p(f) = p(g)$. Pour tout $e \in \beta(G)$ et tout $e' \in \beta(G)$ l'élément $e'' = \pi^{-1}(\pi(e)\pi(e'))$ est l'intersection de e' et de e dans $\beta(G)$; comme $e'' < e'e$, on a

$$\pi(e'') < \pi(e'e) < \pi(e)\pi(e'),$$

d'où
$$e'' = e'e \in \beta(G) \text{ et } G^{-1}G = G^{-1}.G = H;$$

on en déduit que $GH = G$ est un atlas faible complet tel que $a(G) = H$. Cet atlas est déterminé d'une manière unique par la donnée de H et de $p(F)$, et $\langle H'(S), p, H'(S',p)\rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive.- Soit $K' \prec p(H)$, où $H \in H'(S', p)$; puisque la restriction de p à H est un isomorphisme sur $p(H)$, la sous-classe de H formée des éléments k' tels que $p(k) \in K'$ est saturée par induction dans H, donc $K \in H'(S', p)$ et $K \prec H$. Ainsi p est un étalement de $\dot{H}'(S', p)$ sur $\dot{H}'(S)$.

COROLLAIRE. *La restriction de* p *à* $\dot{I}_f(S', p)$ *est un étalement de* $\dot{I}_f(S', p)$ *dans* $\dot{I}_f(S)$, *qui étale* $T(S')$ *(resp.* S'*) dans* $T(S)$.

En effet, comme $\dot{I}_f(S', p)$ est saturé par induction dans $\dot{H}'(S', p)$, le théorème entraîne que p étale $\dot{I}_f(S', p)$ dans $\dot{I}_f(S)$.- Pour tout $T \in T(S')$, on a $T \in I_f(S', p)$ et $p(T)$ est une paratopologie sur $p(t)$; soit $T' \prec p(T)$ une paratopologie sur t' et $F' \in I_f(S', p)$ la sous-classe telle que $T' = p'(F')$. Alors F' est une paratopologie sur f', si $p(f') = t'$. Puisque S' est saturé par induction dans $T(S')$, p étale aussi S' dans $T(S)$.

Remarquons que, si S' n'est pas sous-inductif, p' peut ne pas étaler S' dans $T(S)$. On a toutefois :

THEOREME 3. *Soient* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive étalée au-dessus de* S *et* p' *l'application qui associe la classe* $p(F)$ *à* $F \in H'(S', p)$; *alors* p' *est un étalement de* $H'(S', p)$ *(resp. de* $\dot{H}'(S', p)$*) dans* $H'(S)$ *(resp. dans* $\dot{H}'(S)$*).*

DEMONSTRATION. Soit g le $p(f)$-agrégat de $p(A)$, où A est une sous-classe de $F \in H'(S', p)$ et où $f \in F$. Puisque p est un étalement, il existe $f' \in F$ tel que $p(f') = g$, et on a $f' = \bigcup A$; donc $g \in p(F)$ et $p(F)$ est identique à la partie sous-inductive faible $p'(F)$ engendrée par $p(F)$. Ainsi $p'(F) \in H'(S)$. Une démonstration analogue à celle du théorème 2 et de son corollaire montre que $\langle H'(S), p', H'(S', p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive et que p' est un étalement de $\dot{H}'(S', p)$ dans $\dot{H}'(S)$.- Soient $H \in H'(S', p)_0$ et $K' \in H'(S)$, tel que $K' < p(H)$. La classe $\varphi'(H)$ appartient à $H'(S', p)_0$ et est isomorphe à $p(\varphi(H))$; comme on a $p(\varphi'(h)) = \varphi(p(h))$ pour tout $h \in H$, on aura aussi $p'(\varphi'(H)) = \varphi(p'(H))$, et p' est un isomorphisme de $\varphi'(H)$ sur $\varphi(p(H))$. Il en résulte que la classe K formée des $k \in \varphi'(H)$ vérifiant $p(k) \in K'$ appartient à $H'(S, p)$ et que l'on a

$$K = H\,\alpha(K) = \beta(K)H < H \text{ et } p'(K) = K'.$$

THEOREME 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-prélocaux et p un foncteur inductif de S' vers S; alors l'application $\overline{p}$ qui associe à $F \in A'(S', p)$ la partie sous-inductive engendrée par $p(F)$ dans S est un foncteur sous-inductif de $A'(S', p)$ (resp. de $\dot{A}'(S', p)$) vers $A'(S)$ (resp. vers $\dot{A}'(S)$).*

DEMONSTRATION. Pour tout atlas $F \in A'(S', p)$, soit $F_1 \in H'(S', p)$ la base de F construite dans la proposition 3. D'après le théorème 1, $p'(F_1)$ est un atlas faible complet de S et la partie sous-inductive $\overline{p'(F_1)}$ est un atlas complet contenant $p(F)$. Pour tout $f \in F$, il existe une sous-classe A de F_1 telle que $f \in \bigcup A$; par suite $p(f) \in \bigcup p(A)$, et $p(F_1)$ est une base de $\overline{p(F_1)} = \overline{p}(F)$.- Soit $H \in \overline{A'}(S', p)_0$; alors $H_1 \in \overline{H'}(S', p)$ et $p(H_1) \in H'(S)$; la partie sous-inductive engendrée par le sous-pseudogroupe faible $p'(H_1)$ est un sous-pseudogroupe de S.- Soit $G \in A'(S', p)$ tel que $\overline{a}(G) = \overline{b}(F)$. La classe $G_2 = G_1\,\alpha(F_1)$ étant une sous-classe saturée par induction de G telle que $\alpha(G_2)$ soit contenu dans $\varphi'(\beta(F_1))$, elle appartient à $H'(S', p)$ et c'est une base de G. Puisque $G_2 F_1$ est une base de $G \odot F$ et que p est inductif, on a $\overline{p(G_2 F_1)} = \overline{p}(G \odot F)$. Par ailleurs, $\overline{p}(G) \odot \overline{p}(F)$ admet $p(G_2)p(F_1)$ pour base. Pour tout $f \in F_1$ et tout $g \in G_2$, l'élément gf est défini; on a :

$$p(e) = p(\alpha(g))p(\beta(f)), \text{ où } e = \alpha(g)\,\beta(f),$$

d'où $p(gf) = p(g)p(f)$. Il en résulte $p(G_2)p(F_1) = p(G_2 F_1)$, et par suite :

$$\overline{p}(G \odot F) = \overline{p(G_2 F_1)} = \overline{p}(G) \odot \overline{p}(F).$$

Ainsi $\overline{p}$ est un foncteur.- Soit $F' < F$, où $F' \in A'(S', p)$; d'après le théorème 4-4-[2], la classe F'_1 des éléments $f' \in F'$ qui sont majorés par un élément de F_1 est un atlas faible complet, saturé par induction dans F'; de plus F'_1 est une base de F' et $F'_1 < F_1$. Comme

$$\alpha(F'_1) \subset \varphi'(\alpha(F_1)) \text{ et } \beta(F'_1) \subset \varphi'(\beta(F_1)),$$

la restriction de p à $\alpha(F'_1)$ et $\beta(F'_1)$ est compatible avec l'intersection finie. Donc $F'_1 \in H'(S',p)$.- Supposons $F'' < F$, et soit F''_1 la classe des éléments $f'' \in F''$ majorés par un élément de F_1; l'atlas $F' \cap F''$ admet pour base la classe $F'_1 \alpha(F''_1) = F'_1 \cap F''_1$ et $\bar{p}(F') \cap \bar{p}(F'')$ admet $p'(F'_1) \cap p'(F''_1)$ pour base. Puisque

$$p'(F'_1) \cap p'(F''_1) = p'(F'_1 \cap F''_1)$$

d'après le théorème 1, on en déduit :

$$\bar{p}(F') \cap \bar{p}(F'') = \overline{p(F'_1 \cap F''_1)} = \bar{p}(F' \cap F'').$$

Ceci prouve que $\bar{p}$ est un foncteur sous-inductif de $A'(S',p)$ vers $A'(S)$.- On montre de même que $\bar{p}$ est un foncteur sous-inductif de $\dot{A}'(S',p)$ vers $\dot{A}'(S)$.

COROLLAIRE 1. *Si p est inductif strict, $\bar{p}$ est un foncteur sous-inductif strict de $A'(S',p)$ vers $A'(S)$ et un foncteur inductif strict de $\dot{A}'(S',p)$ vers $\dot{A}'(S)$, dont la restriction à $A'(S',p)_0$ est un étalement.*

DEMONSTRATION. Supposons

$$F' < F,\ F \in A'(S',p),\ F' \in A'(S',p) \text{ et } \bar{p}(F) = \bar{p}(F');$$

soient F_1 et F'_1 les bases de F et F' considérées dans le théorème. La restriction de p à $\varphi'(\alpha(F'_1))$ (resp. à $\varphi'(\alpha(F_1))$) est un isomorphisme sur $p(\varphi'(\alpha(F'_1)))$ (resp. sur $p(\varphi'(\alpha(F_1)))$); comme $\bar{p}(F') = \bar{p}(F)$ admet $p(F_1)$ et $p(F'_1)$ pour bases, il en résulte

$$\alpha(F') = \alpha(F), \text{ d'où } F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{F\alpha(F)} = F.$$

Donc $\bar{p}$ est un foncteur sous-inductif strict.- Soit $K \,\dot{<}\, \bar{p}(H)$, où $H \in A'(S',p)_0$ et $K \in A'(S)$; désignons par K' la sous-classe de H formée des $k \in H$ tels que $p(k) \in K$. Comme K est saturé et saturé par induction dans $\bar{p}(H)$, la classe K' est saturée, saturée par induction dans H, c'est-à-dire $K' \,\dot{<}\, H$. De plus, K admettant pour base la classe $p(H)\alpha(K)$, il admet aussi $p(K')$ pour base, et par suite $\bar{p}(K') = K$.

COROLLAIRE 2. *Si p est un étalement de S' dans S, alors $\bar{p}$ est un étalement de $A'(S',p)$ (resp. de $\dot{A}'(S',p)$) dans $A'(S)$ (resp. dans $\dot{A}'(S)$).*

DEMONSTRATION. Soient H et H' deux sous-pseudogroupes propres compatibles avec p tels que $\bar{p}(H) = \bar{p}(H')$, $H_1 \in H'(S',p)$ et $H'_1 \in H'(S',p)$ les bases de H et H' saturées par induction dans H et H'. D'après le théorème 3, $p(H_1)$ est un sous-pseudogroupe faible; par suite $p(H_1)$ est saturé par induction dans $\bar{p}(H)$. Soit H_2 la sous-classe de H_1 formée des h tels que $p(h) \in p(H'_1)$ et H'_2 la sous-classe de H'_1 formée des h' tels que $p(h') \in p(H_1)$; alors H_2 et H'_2 sont des sous-groupoïdes saturés par induction de H et H' respectivement, et $p(H_2) = p(H'_2)$ est saturé par induction dans $\overline{p}(H)$. Pour tout $h \in H_1$, il existe une sous-classe A' de H'_1 telle que $p(h) \in \bigcup \overline{p}(A')$; p étant un étalement, il existe une sous-classe A de H admettant h pour sous-agrégat et vérifiant $p(A) = p(A')$. Comme A est contenu dans H_2, on en déduit que $H_2 \in H'(S', p)_o$ est une base de H , et $H'_2 \in H'(S', p)_o$ une base de H'.- Soit $F \in A'(S', p)$ tel que $\overline{a}(F) = H'$ et soit $F_1 \in H'(S', p)$ une base saturée par induction de F. La classe F_2 formée des éléments $f \in F_1$ tels que $\alpha(f) \in H'_2$ est saturée par induction dans F, et c'est une base de F; d'après le théorème 3, il existe $G \in H'(S', p)$ pour lequel on a :

$$p(G) = p(F_2) \text{ et } a(G) = H_2 .$$

La partie sous-inductive $\overline{G}$ engendrée par G est un atlas complet tel que

$$\overline{a}(\overline{G}) = \overline{H}_2 = H \text{ et } \overline{p}(\overline{G}) = \overline{p}(F).$$

Donc $(A'(S), \overline{p}, A'(S', p))$ est une espèce de structures et, d'après le corollaire 1 et la proposition 7.1, $\overline{p}$ est un étalement de $\mathring{A}'(S', p)$ dans $\mathring{A}'(S)$.- Soit $K < \overline{p}(H)$; la classe K_1 des éléments $k \in K$ qui sont majorés par un élément de $p(H_1)$ est un atlas faible complet qui est une base de K saturée par induction dans K, et on a $K_1 < p(H_1)$. D'après le théorème 3, il existe $K' < H_1$ avec $p(K) = K'$. Le sous-pseudogroupe engendré par K' dans S' admet $H_1 \alpha(K')$ pour base; par suite :

$$\overline{K'} = \overline{H\alpha(K')} = \overline{\beta(K')H} < H \text{ et } \overline{p}(\overline{K'}) = K.$$

Ainsi $\overline{p}$ est un étalement de $A'(S', p)$ vers $A'(S)$.

COROLLAIRE 3. *Soit p un étalement; alors la restriction de $\overline{p}$ à $I(S', p)$ étale $I(S', p)$ dans $I(S)$. Si de plus S est prélocal, la sous-classe $C(S', p)$ de $I(S', p)$ formée des F tels que $\overline{p}(F) \in T(S)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\dot{I}(S', p)$ que $\overline{p}$ étale dans $T(S)$.*

En effet, la première affirmation résulte du théorème. Si S est prélocal, $T(S)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\dot{I}(S)$; le corollaire s'en déduit.

REMARQUE. La condition que S soit prélocal est nécessaire dans le corollaire 3 car, si S est seulement sous-prélocal, $T(S)$ n'est pas contenu dans $I(S)$.

DEFINITION 2. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de S' vers S; alors on appellera sous- classe* compatible avec *p une sous-classe compatible B de S' telle que la restriction de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soit compatible avec l'intersection finie.*

PROPOSITION 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de S' vers S; si B est une sous-classe de S' compatible avec p, alors $p(B)$ est compatible dans S et la restriction de p à B est compatible avec l'intersection finie.*

DEMONSTRATION. Soient $f \in B$ et $g \in B$; puisque B est compatible, on a :

$$f \cap g = f\alpha(f \cap g) = g(\alpha(f)\alpha(g)),$$

d'où : $p(f \cap g) = p(f)(p(\alpha(f))p(\alpha(g))) = p(f)p(\alpha(g))$ et

$$p(f \cap g) = p(g)\alpha(p(f));$$

il en résulte :

$$p(f)\alpha(p(g)) = p(g)\alpha(p(f)) = p(f) \cap p(g) = p(f \cap g).$$

Donc $p(B)$ est compatible.

PROPOSITION 5. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive; pour qu'une sous-classe* B *de* S' *soit compatible avec* p, *il faut et il suffit que* $\alpha(B)$ *soit compatible avec* p *et que* $p(B)$ *soit compatible.*

DEMONSTRATION. Les conditions sont nécessaires d'après la proposition 4. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soient $f \in B$ et $g \in B$; les relations

$$p(f\alpha(g)) = p(f)p(\alpha(g)) = p(f) \cap p(g) = p(g)\alpha(p(f)) = p(g\alpha(f))$$

et $\qquad \alpha(f\alpha(g)) = \alpha(g\alpha(f))$

entraînent

$$f\alpha(g) = g\alpha(f) = f \cap g \quad \text{et} \quad p(f \cap g) = p(f) \cap p(g).$$

Puisque $f \cap g < \beta(g)f$, on trouve :

$$p(f \cap g) < p(\beta(g)f) < p(\beta(g))p(f) = p(f) \cap p(g) = p(f \cap g),$$

c'est-à-dire $p(\beta(g)f) = p(f \cap g)$; de même $p(\beta(f)g) = p(f \cap g)$, d'où

$$p(\beta(g)f) = p(\beta(f)g) \quad \text{et} \quad \beta(g)f = \beta(f)g = f \cap g.$$

Donc B est compatible avec p.

COROLLAIRE 1. *Pour tout* $F \in H'(S', p)$ *tel que* $p(F)$ *soit compatible, on a* $F \in I_f(S',p)$; *si* $F \in A'(S', p)$ *et* $\overline{p}(F) \in I(S)$, *alors* $F \in I(S', p)$.

En effet, la première affirmation est évidente. Si $F \in A'(S', p)$ et $\overline{p}(F) \in I(S)$, il existe une base $F_1 \in H'(S', p)$ de F telle que $p(F_1) \in I_f(S)$; donc $F_1 \in I_f(S')$ et $F \in I(S', p)$.

COROLLAIRE 2. *Supposons que* S *soit sous-prélocal et que les conditions* $g \in p(S')$, $e \in p(S')$ *et* $e < \alpha(g)$ *entraînent* $ge \in p(S')$. *Alors* $\langle I_f(S), p', I_f(S', p) \rangle$ *(resp.* $\langle \dot{I}_f(S), p', \dot{I}_f(S', p) \rangle$ *) est une espèce de structures sous-préinductive (théorème 1).*

DEMONSTRATION. Soient $E \in I_f(S', p)_o$ et $F \in I_f(S', p)$ tels que $p'(E) = p'(\alpha(F))$. Soit G la classe des éléments $g \in S'$ tels que $p(g) \in p'(F)$ et $\alpha(g) \in E$; d'après la proposition 5, G est alors une sous-classe compatible avec p. Pour tout $e \in E$, il existe $f \in F$ avec $p(e) < \alpha(p(f))$; il en résulte $p(f)p(e) \in p(S')$; donc il existe $g \in G$ tel que

$$p(g) = p(f)p(e) \text{ et } \alpha(g) = e,$$

c'est-à-dire $\alpha(G) = E$. Pour tout $g' \in G$, les relations

$$g \cap g' = g(\alpha(g)\alpha(g')) \text{ et } p(g \cap g') = p(g) \cap p(g') \in p'(F)$$

entraînent $g \cap g' \in G$. Si A est une sous-classe de G admettant un g-agrégat a, on trouve :

$$p(a) = \overset{p(g)}{\bigcup} p(A) \in p'(F) \text{ et } \alpha(a) \in E,$$

d'où $a \in G$ et $G \in I_f(S', p)$. De plus, pour tout $k \in p'(F)$, il existe une sous-classe E' de E telle que $\alpha(k) \in \underline{\bigcup}\, p(E')$; soit M la sous-classe de G formée des m tels que $p(m) < k$ et $\alpha(m) \in E'$; puisque

$$p(\alpha(M)) = p(E') \text{ et } p(M) < k,$$

on a $k \in \underline{\bigcup}\, p(M)$, de sorte que $p(G)$ est une base de $p'(F)$. Ainsi $G \in I_f(S', p)$, $\alpha(G) = E$ et $p'(G) = p'(F)$. Le corollaire se déduit alors du corollaire du théorème 1.

DEFINITION 3. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur inductif de S' vers S; on dit que S' est* complet relativement à p *si la restriction de p à $\underline{\bigcup}\, B$ est une bijection sur $\underline{\bigcup}\, p(B)$, pour toute sous-classe B de S' compatible avec p. On dira qu'une espèce de structures sous-préinductive $\langle S, p, S' \rangle$ telle que S' soit complet relativement à p est* complète.

Il résulte de cette définition que si $p(B)$ admet un agrégat dans S, alors B admet un agrégat dans S'; en particulier, si S est préinductif et S' sous-inductif, alors S' est inductif.

PROPOSITION 6. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur inductif strict de S' dans S. Si, pour tout complexe $C \in (\tilde{S'}, p)$ (corol. 4, prop. 2), la restriction de p à $\underline{\bigcup}\, C$ est une bijection sur $\underline{\bigcup}\, p(C)$, alors S' est complet relativement à p.*

En effet, soit B une sous-classe de S' qui soit compatible avec p; alors le complexe C obtenu en saturant par induction B est compatible avec p d'après la proposition 1, et on a

$$\underline{\bigcup}\, B = \underline{\bigcup}\, C, \quad \underline{\bigcup}\, p(B) = \underline{\bigcup}\, p(C);$$

comme p applique biunivoquement $\underline{\bigcup}\, C$ sur $\underline{\bigcup}\, p(C)$, p applique aussi biunivoquement $\underline{\bigcup}\, B$ sur $\underline{\bigcup}\, p(B)$ et S' est complet relativement à p.

COROLLAIRE. *Si S est préinductif et S' inductif et si $\bigcup \overline{C}$ est défini dans S' pour toute sous-classe complète $\overline{C}$ telle que $\bigcup p(\overline{C})$ soit défini, alors S' est complet relativement à p.*

En effet, soit C un complexe de S' et $\overline{C}$ la sous-classe complète qu'il engendre. Si $f = \bigcup p(C)$, puisque $p(C)$ est base de $p(\overline{C})$, la classe $p(\overline{C})$ admet aussi f pour agrégat. Comme $\overline{C}$ est une sous-classe qui est compatible avec p d'après la proposition 5, $\overline{f} = \bigcup \overline{C}$ est défini. C étant contenu dans $\overline{C}$, il est majoré par $\overline{f}$, et par suite admet un agrégat dans le groupoïde inductif S'.

PROPOSITION 7. *Soient S, S' et S'' des groupoïdes sous-préinductifs, p et p' des foncteurs inductifs stricts de S' vers S et de S'' vers S' respectivement. Si S' est complet relativement à p et S'' complet relativement à p', alors S'' est complet relativement à pp'.*

PROPOSITION 8. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive telle que $p(S')$ soit un sous-groupoïde saturé de S; si $\langle S_0, p, S'_0 \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive complète, $\langle S, p, S' \rangle$ est complète.*

En effet, soit $C \in (\tilde{S}', p)$ et $f \in \underline{\bigcup} p(C)$; puisque $\alpha(C)$ est un complexe et que $\alpha(f) \in \bigcup p(\alpha(C))$, il existe un et un seul $e \in \underline{\bigcup} \alpha(C)$ tel que $p(e) = \alpha(f)$; Comme $p(\overline{S'})$ est saturé dans S et que (S, p, S') est une espèce de structures, il existe $f' \in S'$ tel que $p(f') = f$ et $\alpha(f') = e$. La classe C admet f' pour sous-agrégat.

THEOREME 5. *Soit S un groupoïde sous-préinductif; soit θ l'application de $\dot{T}(S)$ dans S qui applique la paratopologie T sur son plus grand élément t. Alors $\langle S, \theta, \dot{T}(S) \rangle$ (th. 7- 4- [2]) est une espèce de structures sous-préinductive complète.*

DEMONSTRATION. Si T est une paratopologie, nous désignons par t son plus grand élément. Soit $(T_i)_{i \in I}$ est une classe de paratopologies majorée par $T \in T(S)$. On a

$$\theta(T_i) \cap \theta(T_j) = \theta(T_i \mathbin{\dot\cap} T_j) \text{ si } i, j \in I.$$

Si $(T_i)_{i \in I}$ admet un T- agrégat T', et si on a $t_i < m < t'$ pour tout $i \in I$, la paratopologie $T' \alpha(m)$ majore T_i, d'où

$$T' \lessdot T' \alpha(m) \text{ et } t' = \overset{t}{\bigcup_{i \in I}} t_i .$$

Donc θ est un foncteur inductif.- La relation $T' \lessdot T$ entraînant que T' est saturé par induction dans T, on a $T' = T$ si $\theta(T') = \theta(T)$.- Soient $f \in S$ et T_0 une paratopologie sur $\alpha(f)$; la classe $f T_0$ est l'unique paratopologie sur f telle que $\alpha(f T_0) = T_0$. Par suite $\langle S, \theta, \dot{T}(S) \rangle$ est une espèce de structures sous- préinductive sur S .- Soit C une sous-classe compatible de $\dot{T}(S)$ telle qu'il existe $t' = \overset{f}{\bigcup_{T \in C}} \theta(T)$; la sous-classe inductive faible T' engendrée dans $\varphi(f)$ par la classe réunion C' des sous-classes $T \in C$ est une paratopologie sur t' dont C' est une base. Soit $T \in C$; pour tout $T_1 \in C$, on a

$$T \cap T_1 = T\alpha(T_1) \precsim T;$$

soient $g \in T$ et $g' \in T'$; puisque g' est le f-agrégat d'une sous-classe A de C', on obtient

$$g'\alpha(g) = g\alpha(g') = \overset{f}{\bigcup} g\alpha(A) \in T,$$

de sorte que T' est un majorant de C dans $\dot{\mathfrak{J}}(S)$. Pour tout majorant M de C, T' est contenu dans M; par ailleurs, soit $m \in M$; la relation

$$m\alpha(g') = \overset{f}{\bigcup} m\alpha(A) \in T'$$

entraîne $M\alpha(T') = T'$; il en résulte que M majore T', d'où $T' \in \underline{\bigcup} C$.

COROLLAIRE. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-inductive au-dessus de S; alors p se décompose canoniquement sous la forme $p = \theta\tau$, où τ désigne l'étalement canonique de S' dans $T(S)$ (corollaire du théorème 2).*

THEOREME 6. *Soit S un groupoïde sous-(pré)inductif et $\hat{S}$ la sous-classe du groupoïde produit $S \times S$ formée des couples (f', f) tels que $f' < f$. Muni de la relation*

$$(f', f) < (g', g) \text{ si, et seulement si, } f = g \text{ et } f' < g' \text{ ou } (f', f) = (0, 0),$$

$\hat{S}$ est un groupoïde (pré)inductif. Soit S^* le groupoïde S auquel on a ajouté un élément $0^* < 0$; alors S^* est un groupoïde quotient inductif de $\hat{S}$, le foncteur projection canonique π étant défini par :

$$\pi((f', f)) = f' \text{ si } f \neq 0 \text{ et } \pi((0, 0)) = 0^*.$$

De plus π est un étalement de la classe préinductive $\hat{S}$ dans S^*.

DEMONSTRATION. L'intersection de (f', f) et de (g', g) est $(0, 0)$ si $f \neq g$ et $(f' \cap g', f)$ si $f = g$. Tout élément de $\hat{S}$ est contenu dans un élément maximal. Supposons $g' . f'$ défini, où $g' \in S$ et $f' \in S$; comme

$$(g', g').(f', f') = (g'.f', g'.f')$$

a $g'.f'$ pour image par π, S^* est un groupoïde quotient de $\hat{S}$ d'après la proposition 12-2-I-[1].- Si (f', f) et (f', f_1) sont deux éléments de $\overset{-1}{\pi}(f')$, ces éléments ne sont pas comparables dans $\hat{S}$. Si $f'_1 < f'$ dans S, pour tout $(f', g) \in \overset{-1}{\pi}(f')$, on a

$$(f'_1, g) \in \hat{S} \text{ et } (f'_1, g) < (f', g).$$

Il en résulte, d'après le théorème 1-1, que $\hat{S}$ admet S^* pour groupoïde quotient inductif; de plus π est un étalement de la classe préinductive $\hat{S}$ dans S^*. Mais $(S^*, \pi, \hat{S})$ peut ne pas être une espèce de structures.

COROLLAIRE 1. *Si S est sous-inductif, toute sous-classe de $\underset{\wedge}{S}$ compatible avec π admet un agrégat dans $\underset{\wedge}{S}$.*

En effet, pour qu'une sous-classe B de $\underset{\wedge}{S}$ soit une classe compatible avec π, il faut et il suffit que B soit majorée par $(b', b) \in \underset{\wedge}{S}$. La classe B admettant un b-agrégat $\overline{b}$ dans S, on a : $\bigcup B = (\overline{b}, b)$ dans $\underset{\wedge}{S}$.

COROLLAIRE 2. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S; alors $\langle \underset{\wedge}{S}, p \wedge p, \underset{\wedge}{S}' \rangle$, où $p \wedge p$ est une restriction de $p \times p$, est une espèce de structures préinductive (presque) au-dessus de $\underset{\wedge}{S}$. Si S' est sous-inductif et p inductif, $\underset{\wedge}{S}'$ est complet relativement à $p \wedge p$. Si p est un étalement de S' dans S (et si S' est complet relativement à p), $p \wedge p$ est un étalement de $\underset{\wedge}{S}'$ dans $\underset{\wedge}{S}$ (et $\underset{\wedge}{S}'$ est complet relativement à $p \wedge p$).*

DEMONSTRATION. La première affirmation est évidente. Soit p un étalement; pour tout $(b', b) < p \times p(f', f)$ on a $b = p(f)$ et $b' < p(f')$; par suite il existe $f'_1 < f'$ tel que $p(f'_1) = b'$ et

$$(p \times p)((f'_1, f)) = (b', p(f)) = (b', b).$$

Ainsi $p \wedge p$ est un étalement.- Soit C une sous-classe de $\underset{\wedge}{S}'$ qui soit compatible avec $p \wedge p$ et dont l'image par $p \wedge p$ admette un agrégat; soient $(f'_i, f_i) \in C$ et $(f'_j, f_j) \in C$; comme $p(f_i) = p(f_j)$ et

$$(p(f'_i) \cap p(f'_j), p(f_i)) = p \wedge p((f'_i, f_i) \cap (f'_j, f_j)),$$

on trouve

$$f_i = f_j \text{ et } p(f'_i) \cap p(f'_j) = p(f'_i \cap f'_j).$$

Si S' est sous-inductif, la classe B des f'_i tels que $(f'_i, f_i) \in C$ admet un f_i-agrégat b', d'où $(b', f_i) = \bigcup C$. Si p est un étalement et si S' est complet relativement à p, la classe B est une sous-classe qui est compatible avec p et dont la projection admet un $p(f_i)$-agrégat a, de sorte qu'il existe $a' \in S'$ tel que

$$p(a') = a \text{ et } a' = \overset{f_i}{\bigcup} B;$$

donc $\underset{\wedge}{S}'$ est complet relativement à $p \wedge p$.

PROPOSITION 9. *Soit S un groupoïde local, S' un groupoïde sous-préinductif et p un foncteur sous-inductif de S' vers S. La classe $\tilde{C}(S', p)$ des complexes $C \in (\tilde{S}', p)$ tels qu'il existe $\bigcup p(C)$ dans S est un sous-groupoïde saturé par induction de $(\tilde{S}', p)$, complet relativement au foncteur inductif κ qui associe $\bigcup p(C)$ à C.*

DEMONSTRATION. Soit $C \in \tilde{C}(S', p)$. Si $C'.C$ est défini, où $C' \in \tilde{C}(S', p)$, on a

$$\kappa(C').\kappa(C) = \bigcup p(C').\bigcup p(C) = \bigcup p(C').p(C) = \bigcup p(C'.C),$$

d'où $C'.C \in \tilde{C}(S', p)$ et $\kappa(C').\kappa(C) = \kappa(C'.C)$. Soit $C_1 \in \tilde{C}(S', p)$ tel que $C_1 \subset C$. La classe $p(C_1)$ étant majorée par $\kappa(C)$ admet un agrégat et par suite $C_1 \in \tilde{C}(S', p)$. Soit $C_2 \subset C$, où $C_2 \in \tilde{C}(S', p)$; on a $C_1 \cap C_2 = C_1 \alpha(C_2)$, donc

$$\kappa(C_1 \cap C_2) = \kappa(C_1)\alpha(\kappa(C_2)) = \kappa(C_1) \cap \kappa(C_2).$$

Ainsi κ est un foncteur sous-inductif. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une sous-classe de $\tilde{C}(S', p)$ qui est compatible avec κ et telle que $a = \bigcup_{i \in I} \kappa(C_i)$ soit défini; d'après la proposition 1, pour tout $c \in C_i$ et tout $c' \in C_j$, où $i, j \in I$, on a

$$\kappa(c^{>}) \cap \kappa(c'^{>}) = \kappa(c^{>} \cap c'^{>}),$$

c'est-à-dire $p(c) \cap p(c') = p(c \cap c')$; la classe des éléments $c \in C_i$, où $i \in I$, étant compatible, elle engendre un complexe C tel que $\kappa(C) = a$. On a $C = \bigcup_{i \in I} C_i$, de sorte que $\tilde{C}(S', p)$ est complet relativement à κ.

REMARQUE. Si de plus $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive, alors $(S, \kappa, \tilde{C}(S', p))$ est une espèce de structures. Mais en général, κ n'est pas inductif strict; en effet, supposons p inductif et soient f et g deux éléments de S admettant un sous-agrégat h; le complexe F engendré par f et g appartient à $\tilde{C}(S', p)$ et on a $\kappa(F) = p(h) = \kappa(h^{>})$.

THEOREME 7. *(Théorème de complétion). Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures locale au-dessus de S; soit $(\overline{S'}, p)$ la sous-classe de $C(S', p)$ formée des sous-classes complètes (corollaire 3 du théorème 4); alors $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S'}, p) \rangle$ est une espèce de structures locale complète, qui est un élargissement inductif de $\langle S, p, S' \rangle$ déterminé à une équivalence près par la condition (A) suivante :*

(A) Pour toute espèce de structures locale complète $\langle S, q, \Sigma' \rangle$ telle que S' soit une base de Σ' et que la restriction de q à S' soit p, il existe une et une seule application covariante inductive $\langle Id_S, \sigma_0 \rangle$ de $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S'}, p) \rangle$ sur $\langle S, q, \Sigma' \rangle$ telle que la restriction de σ_0 à S'_0 soit l'identité et que $q\sigma_0$ soit une restriction de $\theta\overline{p}$.

DEMONSTRATION. Un élément de $(\overline{S'}, p)$ est une sous-classe complète C de S' compatible avec p et telle que $\overline{p}(C) \in T(S)$, c'est-à-dire que $\theta\overline{p}(C) = \bigcup p(C)$ soit défini. Le groupoïde $(\overline{S'}, p)$ est saturé par induction dans $\dot{I}(S', p)$, car S est inductif. On peut se ramener au cas où p est un étalement en appliquant, si besoin est, la décomposition canonique du corollaire du théorème 5, puisque $(\overline{S'}, p) = (\overline{S'}, \tau)$ et que $T(T(S))$ est complet relativement à sa projection canonique sur $T(S)$, et par suite relativement à $\theta\theta'$.- Il résulte du corollaire 3 du théorème 4 que la restriction de $\overline{p}$ à $(\overline{S'}, p)$ est un étalement dans $T(S)$ et que $\langle T(S), \overline{p}, (\overline{S'}, p) \rangle$ est une espèce de structures locale; aussi $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S'}, p) \rangle$ est-elle une espèce de structures locale. Comme S' est une base de $(\overline{S'}, p)$ saturée par induction et que p est la restriction de $\theta\overline{p}$ à S', on a : $\langle S, p, S' \rangle \overleftarrow{\prec} \langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S}', p) \rangle$.- Soit A une sous-classe de S' compatible relativement à $\overline{p}$ telle que $\bigcup(\theta\overline{p}(A))$ soit défini. D'après la proposition 1, la classe des minorants dans $(\overline{S}', p)$ des éléments de A est compatible, de sorte que, si $c \in C$, $c' \in C'$, $C \in A$ et $C' \in A$, on a

$$\overline{p}(c^{>}) \cap \overline{p}(c'^{>}) = \overline{p}(c^{>} \cap c'^{>});$$

c'est-à-dire la classe des éléments $c \in C$, $C \in A$ est compatible dans S'. Donc elle engendre une sous-classe complète $\overline{A}$ telle que

$$\theta\overline{p}(\overline{A}) = \theta\overline{p}(A) \text{ et } \overline{A} = \bigcup A \text{ dans } (\overline{S}', p).$$

Par conséquent $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S}', p) \rangle$ est une espèce de structures complète .- Soit $\langle S, q, \Sigma' \rangle$ une espèce de structures locale complète au-dessus de S telle que S' soit une base de Σ'. Pour tout $C \in (\overline{S}', p)$, la classe des éléments $c \in C$ est une classe compatible dans S' et $\bigcup p(C)$ existe; il en résulte que C est complète relativement à q; par suite elle admet un agrégat Γ dans Σ' tel que $q(\Gamma) = \bigcup p(C)$. Soit σ l'application $C \to \Gamma$ de $(\overline{S}', p)$ dans Σ'. Pour tout $\Gamma \in \Sigma'$, la sous-classe complète engendrée dans S' par les éléments $f \in S'$, $f < \Gamma$, est appliquée par σ sur Γ. Soient $C \in (\overline{S}', p)$ et $C' \in (\overline{S}', p)$ tels que $\overline{a}(C') = \overline{b}(C)$; puisque $C' \odot C$ admet $C'.C$ pour base et que Σ' est local, on a

$$\sigma(C' \odot C) = \sigma(C').\sigma(C).$$

Ceci montre que σ est un foncteur, dont la restriction à S' est l'identité; de plus σ est un étalement de la classe locale $(\overline{S}', p)$ sur Σ'. Autrement dit, $\langle Id_S, \sigma_o \rangle$ vérifie la condition (A), en désignant par σ_o la restriction de σ à Σ'_o.- Inversement soit $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ une espèce de structures locale complète vérifiant la condition (A) relativement à une application covariante $\langle Id_S, \sigma'_o \rangle$; celle-ci détermine un unique foncteur inductif σ' de S'_1 sur $(\overline{S}', p)$ se réduisant à l'identité sur S' et admettant σ'_o pour restriction à $(S'_1)_o$ (prop.11-1). Soit $f' \in S'_1$; on a $f' = \bigcup_{S'_1} F$, où F est une sous-classe de S'. Par hypothèse $\sigma'(f')$ est une sous-classe complète contenant F et on a $\sigma'(f') = \bigcup \sigma'(F)$, de sorte que $\sigma'(f')$ est la sous-classe complète engendrée par F dans S' et, d'après ce qui précède, $\sigma(\sigma'(f')) = f'$. De même $\sigma'\sigma = Id$, donc σ' est une équivalence.- Remarquons que la condition (A) entraîne que S' est saturé par induction dans Σ'.

COROLLAIRE. *Σ' est un groupoïde quotient inductif de $(\overline{S}', p)$.*

Démonstration analogue à celle du corollaire du théorème 2-5-[2].

DEFINITION 4. *Avec les notations du théorème 7, l'espèce de structures $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S}', p) \rangle$ est appelée* la complétion de $\langle S', p, S \rangle$ *ou* la complétion de S' relativement à p.

THEOREME 8. *(Théorème d'élargissement complet). Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures locale au-dessus de* S *et soit* (S, p_1, S'_1) *l'élargissement maximal (thé. 2-2-III-[1]) de* $(S, \overline{p}, (\overline{S'}, p))$*. La complétion de l'espèce de structures locale* $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ *est un élargissement inductif* $\langle S, \theta_1 \overline{p}_1, (\overline{S'}_1, p_1) \rangle$ *de* $\langle S, p, S' \rangle$*. Une structure* $\overline{s}$ *de cet élargissement s'identifie à un atlas faible complet* F *saturé par induction tel que* $\overline{s} = \bigcup \beta(F)$ *et que* $a(F)$ *soit une composante inductive faible de* S'*.*

Ce théorème résulte des théorèmes 7, 4.2 et du corollaire 2 de la proposition 5. L'atlas F est la classe des couples $(f, s) \in S \times S'_o$ tels que

$$\alpha(f) = p(s) \text{ et } \beta(f, s) S' < \overline{s}.$$

DEFINITION 5. *Avec les notations du théorème 8, l'espèce de structures complète* $\langle S, \theta_1 \overline{p}_1, (\overline{S'}_1, p_1) \rangle$ *est appelée* élargissement complet de $\langle S, p, S' \rangle$.

THEOREME 9. *(Transitivité verticale). Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *et* $\langle S', p', S'' \rangle$ *deux espèces de structures locales où* $\langle S', p', S'' \rangle$ *est une espèce de superstructures locale au-dessus de* $\langle S, p, S' \rangle$ *; soient* $\langle (\overline{S'}, p), q', (\overline{S''}, p'') \rangle$ *et* $\langle S, q, (\overline{S'}, p) \rangle$ *les complétions de* $\langle (\overline{S'}, p), p', S'' \rangle$ *et de* $\langle S, p, S' \rangle$*. Alors la complétion de* $\langle S, pp', S'' \rangle$ *est identique à* $\langle S, qq', (\overline{S''}, p'') \rangle$*.*

DEMONSTRATION. Soit $C'' \in (\overline{S''}, p'')$; la classe $p'(C'')$ admettant un agrégat C' dans $(\overline{S'}, p)$, elle engendre la sous-classe complète C' et on a $\bigcup pp'(C'') = \bigcup q(C')$, d'où $C'' \in (\overline{S''}, pp')$.- Inversement, soit $C'' \in (\overline{S''}, pp')$; pour tout $c \in C''$ et tout $c' \in C''$, les relations

$$pp'(c \cap c') = pp'(c) \cap pp'(c'),\ p'(c \cap c') < p'(c) \cap p'(c')$$

et
$$p(p'(c \cap c')) < p(p'(c) \cap p(c')) < pp'(c) \cap pp'(c')$$

entraînent
$$p(p'(c) \cap p'(c')) = pp'(c) \cap pp'(c') = pp'(c \cap c'),$$

d'où $p'(C'') \in (\overline{S'}, p)$. Comme p est inductif strict, il en résulte $p'(c) \cap p'(c') = p'(c \cap c')$, de sorte que C'' est aussi compatible avec p'; par suite $C'' \in (\overline{S''}, p'')$. Ceci montre que $(\overline{S''}, p'') = (\overline{S''}, pp')$.

COROLLAIRE. *Si* $\langle \overline{S'}_1, \overline{p'}_1, \overline{S}''_1 \rangle$ *et* $\langle S, \overline{p}_1, \overline{S'}_1 \rangle$ *sont les élargissements complets de* $\langle \overline{S'}_1, p', S'' \rangle$ *et* $\langle S, p, S' \rangle$*, alors l'élargissement complet de* $\langle S, pp', S'' \rangle$ *est équivalent à l'espèce de structures complète* $\langle S, \overline{p'}_1 \overline{p}_1, \overline{S}''_1 \rangle$*.*

Ce corollaire résulte du théorème 3-2-III-[1] et admet des corollaires analogues.

Si F est un atlas faible complet d'un groupoïde sous-préinductif S', soit $\mathfrak{F}$ le sous-groupoïde de $S' \times I \times I$, où I est une classe, engendré par la classe $(F, (2, 1))$, où $2 \in I$ et $1 \in I$ (cor. 2 prop. 3-3-[2]).

PROPOSITION 10. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, F un atlas faible complet de S' et q un foncteur inductif de $a(F)$ vers S; si $\bar{q}$ est une application de F dans S telle que l'on ait, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$*

$$(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(f') = q(f^{-1}f'), \text{ si } f^{-1}f' \text{ est défini,}$$

alors il existe un foncteur inductif q' de $\mathcal{F}$ vers S prolongeant $\bar{q} \times Id \times Id$ et dont la restriction à $(b(F),(2,2))$ est un foncteur inductif. De plus $(F,(2,1))$ est compatible avec q'.

DEMONSTRATION. Pour tout $f \in F$, on a

$$q(\alpha(f)) = (\bar{q}(f))^{-1}(\bar{q}(f)) = \alpha(\bar{q}(f)).$$

Soit $e \in \alpha(F)$, $e < \alpha(f)$; la relation $f^{-1}(fe) = e$ entraîne

$$(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(fe) = q(e), \text{ d'où } \bar{q}(f)q(e) = \beta(\bar{q}(f))\bar{q}(fe) = \bar{q}(fe),$$

puisque $\bar{q}(fe) < \bar{q}(f)$.- Soit $h \in a(F)$. Soit $f.h$ défini; de l'égalité $f^{-1}(f.h) = h$, on déduit :

$$(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(f.h) = q(h) \text{ et } \beta(\bar{q}(f))\bar{q}(f.h) = \bar{q}(f)q(h);$$

comme $\alpha(\bar{q}(f.h)) = q(\alpha(h))$ et $\alpha(\bar{q}(f)) = q(\alpha(f)) = \beta(q(h))$,

il en résulte $\bar{q}(f.h) = \bar{q}(f).q(h)$. Par ailleurs si $\beta(h)\alpha(f)$ est défini, on a

$$\bar{q}(fh) = \bar{q}(f\beta(h)).q(\alpha(f)h) = \bar{q}(f)q(h),$$

d'après ce qui précède. Soient f', f_1 et f'_1 des éléments de F tels que $f'f^{-1} = f'_1f_1^{-1}$, ou encore $f'f^{-1}f_1 = f'_1\alpha(f_1)$; on a :

$$\bar{q}(f'(f^{-1}f_1)) = \bar{q}(f')q(f^{-1}f_1) = \bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(f_1) = \bar{q}(f'_1)\ \alpha(\bar{q}(f_1));$$

par suite $\bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1}\beta(\bar{q}(f_1)) = \bar{q}(f'_1)\bar{q}(f_1)^{-1}$;

de même : $\bar{q}(f'_1)(\bar{q}(f_1))^{-1}\beta(\bar{q}(f)) = \bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1}$,

donc : $\bar{q}(f'_1)(\bar{q}(f_1))^{-1} = \bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1}$.

- Il s'ensuit qu'on définit une application q' de $\mathcal{F}$ dans S en posant :

$$q'(g,(j,i)) = \begin{cases} \bar{q}(g) & \text{si } (j,i) = (2,1), \\ q(g) & \text{si } (j,i) = (1,1), \\ (\bar{q}(g^{-1}))^{-1} & \text{si } (j,i) = (1,2), \\ \bar{q}(f')\,(\bar{q}(f))^{-1} & \text{si } (j,i) = (2,2) \text{ et } \\ & g = f'f^{-1} \text{ où } f \in F,\ f' \in F. \end{cases}$$

Soient $(g',(k,j)) \in \mathcal{F}$ et $(g,(j,i)) \in \mathcal{F}$. La définition de q' entraîne

$$q'(g',(k,j))q'(g,(j,i)) = q'(g'g,(k,i))$$

si $(j,i) \neq (2,2)$. Supposons $(j,i) = (2,2)$, il existe $f \in F$ et $f' \in F$ tels que $g = f' f^{-1}$; si $k = 1$, on a $g' \in F^{-1}$ et :

$$q'(g' f' f^{-1}, (1,2)) = (\overline{q}(f f'^{-1} g'^{-1}))^{-1} = (\overline{q}(f)\overline{q}(f')^{-1}\overline{q}(g'^{-1}))^{-1}$$
$$= q'(g', (1,2))\, q'(g, (2,2));$$

si $k = 2$, c'est-à-dire si $g' = f'_1 f_1^{-1} \in b(F)$, on trouve $g'g = (g' f') f^{-1}$, d'où

$$q'(g'g, (2,2)) = \overline{q}(g' f')(\overline{q}(f))^{-1} = \overline{q}(f'_1)\overline{q}(f_1)^{-1}\overline{q}(f')\overline{q}(f)^{-1}$$
$$= q'(g', (2,2))\, q'(g, (2,2)).$$

Donc q' est un foncteur sous-inductif, ainsi que sa restriction à $(b(F), (2,2))$.- Soit $(A, (2,2))$ une sous-classe de $\beta(\mathfrak{F})$ admettant un sous-agrégat $c \in (\beta(F), (2,2))$. Il existe $f \in F$ tel que $c = (\beta(f), (2,2))$. La classe Af étant majorée par f, on a

$$f = \overset{f}{\bigcup} Af, \ \hat{f} = \overset{\overline{q}(f)}{\bigcup} \overline{q}(Af) < \overline{q}(f),$$
$$\alpha(\overline{q}(f)) = q(\alpha(f)) = \overset{q(e)}{\bigcup} q(\alpha(Af)) = \overset{q(e)}{\bigcup} \alpha(\overline{q}(Af)) = \alpha(\hat{f}),$$

où $e = \alpha(f)$, ce qui a pour conséquence :

$$\overline{q}(f) = \hat{f} = \overset{\overline{q}(f)}{\bigcup} q'(A, (2,2))\overline{q}(f)$$

et par suite :

$$\beta(\overline{q}(f)) = q'(c) = \overset{q'(c)}{\bigcup} \beta(q'(A), (2,2)).$$

D'après la proposition 4-1, q' est donc un foncteur inductif et, en vertu de la proposition 2, $(F, (2,1))$ est compatible avec q'.

COROLLAIRE 1. *Si $F \in H(S)$ et si la restriction de q à $\alpha(a(F))$ est une bijection sur une sous-classe inductive faible Γ_o de S_o, alors la restriction de q' à $(\beta(F), (2,2))$ est une injection et $\overline{q}(F)$ est un atlas faible complet tel que $a(\overline{q}(F)) = q(a(F))$.*

DEMONSTRATION. Nous désignerons par $\hat{q}'$ le foncteur $g \to q'(g, (2,2))$ de $b(F)$ vers S.- Soient $f \in F$ et $e \in \beta(F)$ tels que $q'(\beta(f)) = q'(e)$; on a

$$q'(ef, (2,1)) = q'(e)\overline{q}(f) = q'(\beta(f))\overline{q}(f),$$

d'où
$$\alpha(q'(ef, (2,1))) = q(\alpha(ef)) = \alpha(\overline{q}(f)) = q(\alpha(f)),$$

ce qui entraîne $\alpha(f) = \alpha(ef)$ et $e = \beta(f)$.- Soit $\hat{E}'$ une sous-classe de $\hat{q}'(\beta(F))$ majorée par $\hat{e}' \in \hat{q}'(\beta(F))$; il existe une sous-classe E' de $\beta(F)$ et $e \in \beta(F)$ tels que $\hat{E}' = \hat{q}'(E')$, $\hat{e}' = \hat{q}'(e)$ et $E' < e$, car F est propre et que la restriction de $\hat{q}'$ à $\beta(F)$ est une bijection compatible avec l'intersection finie. Soit $e = \beta(f)$, où $f \in F$, et supposons que $\hat{E}'$ admette un $\hat{e}'$-agrégat b dans S. La classe $\hat{E}'\overline{q}(f)$ admet $b\overline{q}(f) = g$ pour $\hat{q}'(f)$-agrégat et on a

$$\alpha(g) = \alpha(\overset{\overline{q}(f)}{\bigcup} \overline{q}(E'f)) = \overset{\alpha(g)}{\bigcup} q(\alpha(E'f)) \in \Gamma_o.$$

Par suite il existe $a \in \alpha(F)$ tel que $q(a) = \alpha(g)$; comme $fa \in F$, on a :

$$\overline{q}(fa) = \overline{q}(f)\,\alpha(g) = g, \text{ d'où } \beta(\overline{q}(fa)) = \hat{q}'(\beta(fa)) = b$$

et $b \in \hat{q}'(\beta(F))$. Donc $\hat{q}'(\beta(F))$ est une sous-classe inductive faible.- Soit $\mathcal{G}$ le sous-pseudogroupe faible de $S \times (I \times I)$ engendré par $(\overline{q}(F),(2,1))$; d'après ce qui précède, $\mathcal{G}_o$ est formé de $(\Gamma_o,(1,1))$ et de $(q'(\beta(F)),(2,2))$. L'application

$$(g,(j,i)) \to (q'(g),(j,i))$$

de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est un foncteur inductif, qui étale $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$; il résulte du théorème 3 que $(\overline{q}(F),(2,1))$ est un atlas faible complet de S tel que

$$a((\overline{q}(F),(2,1))) = (q(a(F)),(1,1)).$$

Par conséquent $\overline{q}(F)$ est un atlas faible complet de S et $a(\overline{q}(F)) = q(a(F))$.

COROLLAIRE 2. *Si S est un groupoïde local complet et si q_1 est un foncteur inductif de $\overline{a}(F)$ vers S prolongeant q, le foncteur q' construit dans la proposition peut être prolongé en un foncteur inductif q'_1 de $\overline{\mathcal{F}}$ vers S, dont la restriction à $(\overline{a}(F),(1,1))$ soit $q_1 \times Id \times Id$, en désignant par $\overline{\mathcal{F}}$ le sous-pseudogroupe de $S \times I \times I$ engendré par $\mathcal{F}$.*

DEMONSTRATION. $\overline{\mathcal{F}}$ est la classe réunion de $(\overline{F},(2,1))$, $(\overline{F}^{-1},(1,2))$, $(\overline{a}(F),(1,1))$ et $(\overline{b}(F),(2,2))$. Soit $(h,(j,i)) \in \overline{\mathcal{F}}$ et soit $(A,(j,i))$ la classe des $(f,(j,i)) \in \mathcal{F}$ tels que $f < h$; la classe A admet h pour sous-agrégat; la classe $\overline{q}(A)$ étant compatible dans S, elle admet un agrégat a; nous poserons $q'_1(h,(j,i)) = a$, on a :

$$\alpha(a) = \bigcup \alpha(\overline{q}(A)) = q_1(\bigcup \alpha(A)) = q_1(\alpha(h)).$$

Si A' est une sous-classe de A admettant h pour sous-agrégat, la classe $\overline{q}(A')$ est majorée par a; comme $\alpha(\overset{h}{\bigcup} A') = \alpha(h)$, on a :

$$\alpha(a) = q_1(\alpha(h)) = \bigcup q(\alpha(A')) = \alpha(\bigcup \overline{q}(A')),$$

d'où $q'_1(\overset{\hat{h}}{\bigcup}(A',(j,i)) = q_1(h,(j,i))$, où $\hat{h} = (h,(j,i))$.- Soient $(h',(k,j)) \in \overline{\mathcal{F}}$ et $\hat{B} = (B,(k,j))$ la classe des $(b,(k,j)) \in \mathcal{F}$ tels que $b < h'$. La classe B admet h' pour sous-agrégat et $\hat{h}'\hat{h} = (h'h,(k,i)) \in \overline{\mathcal{F}}$ est un sous-agrégat de $\hat{B}.\hat{A}$ où $\hat{A} = (A,(j,i))$. Par suite

$$q'_1(\hat{h}'\hat{h}) = \bigcup q'(\hat{B}.\hat{A}) = \bigcup q'(\hat{B})q'(\hat{A}) = (\bigcup q'(\hat{B}))(\bigcup q'(\hat{A})) = q'_1(\hat{h}')q'_1(\hat{h}).$$

Donc q'_1 est un foncteur inductif de $\overline{\mathcal{F}}$ vers S prolongeant q'.

COROLLAIRE 3. *Soit $F \in H(S)$ et G un atlas complet de S contenant $\overline{q}(F)$, tel que $\overline{q(a(F))} = \overline{a}(G)$ et que la restriction de q à $\alpha(\overline{a}(F))$ soit une injection sur une sous-classe inductive faible, base de $\alpha(G)$. Si $\beta(G) = \beta(\overline{q}(F))$ (resp. si S est sous-prélocal et si $\beta(G)$ et $\beta(\overline{q}(F))$ admettent un même sous-agrégat), alors $\overline{q}(F)$*

est une base de G *et* $\hat{q}'(b(F))$ *une base de* $\overline{b}(G)$.

DEMONSTRATION. $\overline{q}(F)$ est un atlas faible complet tel que $a(\overline{q}(F)) = q(a(F))$, d'après le corollaire 2; soit F' l'atlas complet qu'il engendre dans S. On a :

$$\overline{a}(F') = \overline{q(a(F))} = \overline{a}(G);$$

de plus $$\beta(F')G \subset F'(F'^{-1}G) \subset F'\overline{a}(G) = F' \subset \beta(F')G,$$

d'où $F' = \beta(F')G$.- Supposons $\overline{\beta(G)} = \overline{\beta(\overline{q}(F))} = \overline{\beta(F')}$; soient $g \in G$ et $f' \in F'$ tels que $g\alpha(f')$ soit défini. La relation

$$g\alpha(f') = \beta(g\alpha(f'))(g\alpha(f')) \in \overline{\beta(F')}G \subset F'$$

entraîne $F' = G\alpha(F')$; par suite $F' \prec G$ et $F' = G$.- De plus, $\overline{b}(G) = \overline{b}(F')$ admet $b(\overline{q}(F_1))$ pour base, où F_1 est une base de F appartenant à $H(S')$. Comme q est une bijection de $\alpha(a(F))$ sur une base de $\alpha(G)$, si $h = \overline{q}(f'_1)\overline{q}(f_1)^{-1}$ est défini, où $f_1 \in F_1$ et $f'_1 \in F_1$, on a

$$h = \hat{q}'(f'_1 f_1^{-1}) \in \hat{q}'(b(F)).$$

Il en résulte que $\hat{q}'(b(F))$ est une base de $\overline{b}(G)$.- Supposons S sous-prélocal et $\overset{c}{\bigcup}\, \overline{\beta(G)} = \overset{c}{\bigcup}\, \overline{\beta(\overline{q}(F))}$. Soit $g \in G$; en appliquant l'axiome D, on obtient

$$\beta(g) = \overset{c}{\bigcup}\, \beta(\overline{q}(F))\beta(g).$$

Si $\beta(\overline{q}(f))g$ est défini, où $f \in F$, on a $\beta(\overline{q}(f))g \in \beta(F')G = F'$; par conséquent

$$\beta(g) \in \overline{\beta(\overline{q}(F))} \text{ et } \overline{\beta(G)} = \overline{\beta(\overline{q}(F))}.$$

On est ainsi ramené au cas précédent, ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 6. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* F *et* G *deux atlas complets de* S' *et* S *respectivement et* q *un foncteur inductif de* $\overline{a}(F)$ *vers* $\overline{a}(G)$; *on dit que* G *est* associé *à* F *si l'on s'est donné une application* $\overline{q}$ *de* F *sur une base de* G *telle que, si* $f \in F$, $f' \in F$ *et si* $f^{-1}f'$ *est défini, on ait :*

$$(\overline{q}(f))^{-1}\overline{q}(f') = q(f^{-1}f').$$

THEOREME 10. *Soit* S' *un groupoïde sous-préinductif et* $\overline{S'}$ *un élargissement inductif de* S' *qui soit aussi un élargissement de* S'; *soit* q *un foncteur inductif de* S' *vers un groupoïde sous-préinductif* S *dont la restriction à* S'_0 *soit une bijection sur* S_0; *alors il existe un élargissement inductif* $\overline{S}$ *de* S *qui est un groupoïde quotient inductif de* $\overline{S'}$ *relativement à un foncteur inductif* $\overline{q}$ *dont la restriction à* S' *est* q.

DEMONSTRATION. Soit κ' un foncteur inductif pour lequel $\overline{S'}$ est une extension inessentielle de S' (proposition 4-2-III-[1]) et posons $p = q\kappa'$. D'après la proposition 8-1-III-[1] et le corollaire de la proposition 4-2-III-[1], l'image canonique de $\overline{S'}$ dans $p_0^*(S)$ est un élargissement de S (lequel est identifié à $q_0^*(S)$) et q se prolonge en un foncteur $\overline{q}$ de $\overline{S'}$ vers $\overline{S}$ tel que $\overline{q}_o$ soit une bijection. On a

$$\overline{q}(k) = (p(k), \beta(k), \alpha(k)).$$

De plus $\overline{S}$ est un groupoïde sous-préinductif pour la relation d'ordre induite sur $\overline{S}$ par la classe ordonnée produit $\overline{S'_o} \times \overline{S'_o} \times S$. Comme S' est saturé par induction dans $\overline{S'}$, la classe S est saturée par induction dans $\overline{S}$, de sorte que l'on a $S \overline{\overline{\leqslant}} \overline{S}$. $\overline{q}$ est évidemment inductif.- Soit $k < k'$ dans $\overline{S'}$ et $k'' \in \overline{S'}$ tel que $\overline{q}(k') = \overline{q}(k'')$, i.e.

$$p(k') = p(k''),\ \alpha(k') = \alpha(k'') \text{ et } \beta(k') = \beta(k'').$$

Posons $k_1 = k''\alpha(k')$; on a :

$$k = k'\alpha(k),\ p(k) = p(k')\, q(\alpha(k))$$

et $$p(k_1) = p(k'')q(\alpha(k')) = p(k')q(\alpha(k')) = p(k).$$

Donc les conditions du théorème 1.1 sont vérifiées et $\overline{S}$ est un groupoïde quotient inductif de $\overline{S'}$.

THEOREME 11. *Soient S et S' deux groupoïdes locaux. Soit q un foncteur inductif de S' vers S dont la restriction à S'_o soit une bijection sur S_o. Si $\tilde{S'}$ est un élargissement inductif de S', il existe un élargissement inductif $\tilde{S}$ de S, défini à un isomorphisme près, qui soit un groupoïde quotient inductif de $\tilde{S'}$ relativement à un foncteur inductif $\tilde{q}$ prolongeant q et dont la restriction à $\tilde{S'_o}$ soit une bijection.*

DEMONSTRATION. Il existe un élargissement $\overline{S'}$ de S', base de $\tilde{S'}$. D'après la prop. 3.2, ce $\overline{S'}$ est un groupoïde local; on peut lui appliquer le théorème 10, dont nous reprenons les notations. D'après le corollaire de la proposition 2.1, κ' se prolonge en un foncteur inductif $\overline{\kappa'}$ de $\tilde{S'}$ sur S'. Soit $\tilde{S}$ l'image canonique de $\tilde{S'}$ dans $\overline{p}^*_o(S)$, où $\overline{p} = q\overline{\kappa'}$. L'application $\tilde{q}$:

$$k \to (\overline{p}(k), \beta(k), \alpha(k)), \text{ où } k \in \tilde{S'},$$

définit un foncteur inductif $\tilde{q}$ de $\tilde{S'}$ sur $\tilde{S}$ prolongeant q. Puisque $\overline{S}$ est une base de $\tilde{S'}$, pour tout $k' \in \tilde{S'}$ il existe $A \subset \overline{S'}$ tel que $k' = \bigcup A$, de sorte que l'on trouve :

$$\overline{q}(k') = \bigcup q(A), \text{ où } q(A) \subset \overline{S};$$

ainsi $\overline{S}$ est une base de $\tilde{S}$ et $S \overline{\overline{\leqslant}} \tilde{S}$. On voit comme dans la démonstration du théorème 10 que $\tilde{q}$ définit $\tilde{S}$ comme groupoïde quotient inductif de $\tilde{S'}$.- Soit $\tilde{S}_1$ un autre élargissement inductif de S et $\tilde{q}_1$ un foncteur inductif de $\tilde{S'}$ sur $\tilde{S}_1$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit $k \in \tilde{S'}$ et $k' \in \tilde{S'}$ tels que $\tilde{q}_1(k) = \tilde{q}_1(k')$. On a :

$$\alpha(k) = \alpha(k') \text{ et } \beta(k) = \beta(k'),$$

car la restriction de $\tilde{q}_1$ à $\tilde{S'_o}$ est bijective. Par suite, il existe $h \in S$ tel que

$$\overline{\kappa}'(k) = \overline{\kappa}'(k').h \text{ et } q(h) \in S_o .$$

Il en résulte :

$$\overline{p}(k) = \overline{p}(k').q(h) = \overline{p}(k'),$$

d'où $\tilde{q}(k) = \tilde{q}(k')$. Il s'ensuit que l'application $\tilde{q}_1(k) \to \tilde{q}(k)$ définit une équivalence de $\tilde{S}_1$ sur $\tilde{S}$.

COROLLAIRE. *Si S' est un sous-pseudogroupe d'un groupoïde local S'', il existe un élargissement inductif canonique $\tilde{S}$ de S vérifiant la condition : si F est un atlas complet de S'' tel que $\overline{a}(F) \prec S'$ et qu'il existe $\bigcup \beta(F)$, alors il existe un atlas complet de $\tilde{S}$ associé à F par une application prolongeant q.*

DEMONSTRATION. Soit $\tilde{S}'$ l'élargissement complet de S' au-dessus de S'', qui est (th. 8) la complétion au-dessus de S'' du groupoïde quotient de $\overline{\alpha}^*(S)$, où $\overline{\alpha}$ désigne la restriction de α à $S''_\gamma . S'_o$, par la relation d'équivalence ρ :

$$(k, m', m) \sim (k', m'_1, m_1) \text{ si, et seulement si, il existe } g \in S_\gamma \text{ et } g' \in S_\gamma$$
$$\text{tels que } m_1 = m.g,\ m'_1 = m'.g' \text{ et } k.g = g'.k'.$$

Soit j la projection canonique

$$(k, m', m) \bmod \rho \to m'.k.m^{-1}$$

de $\tilde{S}'$ vers S''. Soit $\tilde{F}$ la classe des éléments

$$\tilde{f} = (\alpha(f), f, \alpha(f)) \bmod \rho \text{ où } f \in F.$$

Si $f \in F$, $f' \in F$ et $\beta(f) = \beta(f')$, on a $f^{-1}.f' \in S'$, d'où $\beta(\tilde{f}) = \beta(\tilde{f}')$. L'application $f \to \tilde{f}$ est une bijection de F sur $\tilde{F}$ et $\tilde{F}$ est un atlas complet de $\tilde{S}'$ tel que $\overline{a}(\tilde{F}) = \overline{a}(F)$. Comme la restriction de j à $\beta(\tilde{F})$ est une bijection sur $\beta(F)$ et qu'il existe $\bigcup \beta(F)$, il existe aussi $\bigcup \beta(\tilde{F}) = \tilde{e}$ dans l'élargissement complet $\tilde{S}'$, de sorte que $\tilde{F}$ est l'atlas qui détermine la structure $\tilde{e}$ (corollaire th. 9). Soit $\tilde{S}$ l'élargissement inductif de S construit dans le théorème 11, et $\tilde{q}$ le foncteur de $\tilde{S}'$ vers $\tilde{S}$ prolongeant q. D'après le théorème 4, $\tilde{q}(\tilde{F})$ est base d'un atlas complet G de $\tilde{S}$ et, en vertu de la proposition 2 et de la définition 6, G est associé à $\tilde{F}$ par la restriction de $\tilde{q}$ à $\tilde{F}$. Il en résulte que G est aussi associé à F par l'application $f \to \tilde{q}(\tilde{f})$.

REMARQUE. Un atlas complet F peut être considéré comme une structure sur $\overline{\beta(F)}$. Le corollaire du théorème 11 permet ainsi d'associer à la classe $\tilde{S}'_o$ la classe des atlas complets $G = \tilde{q}(\tilde{F})$, où $\tilde{F}$ désigne un des atlas déterminant une unité de $\tilde{S}'$, ou, ce qui revient au même, une classe de structures sur $\overline{\beta(G)}$; elle peut être appelée *la classe de structures associée à $\tilde{S}'_o$.*

CAHIERS
de
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
1965

APPENDICE

«Guide des catégories ordonnées»

par Charles Ehresmann

Les catégories ordonnées et les espèces de structures ordonnées entrent comme cas particulier dans la théorie générale des catégories structurées et des espèces de structures structurées exposée dans [5],[7] et [10 a]. Plusieurs de nos travaux étant consacrés partiellement ([1],[3],[5],[6],[7],[12]) ou entièrement ([2],[4], [8] et [9]) à l'étude des catégories ordonnées, il pourrait être utile de guider le courageux lecteur à travers ces quelque 700 pages. Nous allons donc donner : un bref sommaire de chacun de ces travaux; un index des notions et des problèmes qu'ils abordent (avec les changements de terminologie que nous avons été conduits à faire); enfin quelques remarques. L'article «Espèces de structures sous-inductives» précédant cet Appendice sera désigné par ESS.

I. Sommaire.

Les articles précédemment cités peuvent être groupés en trois classes :

1) *Premiers articles sur les groupoïdes et catégories inductives, antérieurs à la notion de catégorie structurée générale :*

a) [3] est l'article le plus ancien (1957) et les mémoires [2],[4] et [ESS] en sont des développements ou des généralisations. Il contient la définition des groupoïdes inductifs et des espèces de structures inductives et locales, pour lesquelles est énoncé le théorème d'élargissement complet; un cas particulier de catégories d'homomorphismes inductives y est considéré.

b) [4] étudie les groupoïdes inductifs, les catégories $\mathfrak{J}(\mathfrak{J}', \mathfrak{J}'')$- structurées (appelées inductives dans [4]) et les catégories inductives régulières. Les principaux résultats sont les suivants : caractérisation d'un groupoïde inductif par les propriétés de la pseudomultiplication; catégories des filtres et des jets locaux associées à une catégorie inductive suprarégulière au-dessus d'une autre.

c) [2] et [ESS] étendent aux groupoïdes sous-préinductifs et aux espèces de structures sous-préinductives au-dessus d'un groupoïde sous-préinductif les théorèmes donnés dans [4] dans le cas inductif régulier. Ces articles, dont la fin de [0] est un résumé, contiennent essentiellement l'étude des groupoïdes des atlas faibles complets et des atlas complets, notions qui généralisent les atlas considérés dans [3] (lesquels sont les atlas complets F d'un groupoïde inductif S tels que $a(F)$ soit saturé dans S et que $\beta(F)$ admette un agrégat). Les théorèmes de complétion et de complétion relative d'un groupoïde prélocal sont obtenus à partir de sous-groupoïdes des groupoïdes des atlas complets.

2) Articles contenant des résultats sur les catégories ordonnées obtenus en appliquant la théorie générale des catégories structurées :

a) [5] définit les catégories ordonnées et inductives et discute la question des groupoïdes fonctiorellement ordonnés et inductifs. A une catégorie ordonnée ou inductive est associée la catégorie ordonnée des homomorphismes locaux et la catégorie ordonnée ou inductive des quatuors.

b) Les catégories complètement régulières a gauche, sous-préinductives et sous-inductives sont définies dans [6]; elles y sont appliquées au problème de la recherche des p-injections relatives à un foncteur fidèle p ordonné, sous-préinductif ou sous-inductif.

c) Comme application de la théorie des structures quotient, nous étudions [7] les structures quotient d'une classe ordonnée, sous-préinductive ou sous-inductive et nous obtenons des théorèmes de passage au quotient pour les catégories et groupoïdes ordonnés, sous-préinductifs ou inductifs. De plus les théorèmes de complétion des groupoïdes prélocaux obtenus dans [2] sont énoncés sous forme de solution d'un problème universel.

3) Mémoires récents sur les catégories ordonnées :

a) Dans [8] sont définies les catégories semi-régulières, assez régulières et régulières (comme cas particuliers de catégories structurées), auxquelles sont associées des catégories d'atlas. La notion d'espèce de morphismes ordonnée ou quasi-inductive conduit au problème de la cohomologie ordonnée (d'ordre 0 et 1), par l'intermédiaire des homomorphismes croisés ordonnés. Ces résultats sont appliqués à la construction du groupoïde d'holonomie complet associé à une structure feuilletée (qui est un groupoïde quotient d'un sous-groupoïde du groupoïde des atlas associé au groupoïde d'holonomie du feuilletage), et à la définition de structures transverses à un feuilletage.

b) Dans [9], suite de [8], le problème général de la complétion des catégories ordonnées est abordé et résolu dans le cas des groupoïdes ordonnés, des catégories préinductives et des catégories sous-prélocales. L'outil utilisé est la notion de fusée et ses raffinements : fusées régulières, fusées strictes, fusées maximales et superfusées, généralisations de la notion d'atlas, adaptées à la structure des catégories ordonnées. Les résultats de [9] ont été résumés dans [10 b].

4) Signalons enfin que nous avons utilisé les catégories sous-inductives dans différents problèmes, en particulier en relation avec la théorie des espaces fibrés et des structures feuilletées ([3], [11] et [12]).

II. Index de la terminologie actuelle.

Catégories d'homomorphismes entre classes ordonnées :

Voir [2] (p. 2, 3, 9) pour la définition des notions : classe inductive, sous-inductive, préinductive, sous-préinductive, sous-prélocale (*).

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie pleine d'applications contenant avec une application toutes ses restrictions, avec deux applications leur produit. Ω_o désigne la classe des classes ordonnées $(M, <)$ telles que $M \in \mathfrak{M}_o$. Ω désigne la catégorie des applications ordonnées, i. e, la catégorie dont les éléments sont les triplets

$$\overline{h} = ((M', <), h, (M, <))$$

tels que $(M', h, M) \in \mathfrak{M}$ et que $x < y$ dans $(M, <)$ entraîne $h(x) < h(y)$ dans $(M', <)$. Le foncteur $p_\Omega = (\mathfrak{M}, \omega, \Omega)$, où $\omega(\overline{h}) = (M', h, M)$, est un foncteur d'homomorphismes saturé (déf. 20, II [11]).

Ω admet les sous-catégories suivantes :

1) Ω' = catégorie des applications ordonnées strictes :

$\overline{h} \in \Omega'$ si, et seulement si, $x' < x$ et $h(x') = h(x)$ entraîne $x = x'$.

Ω'_1 = catégorie des applications s - ordonnées :

$\overline{h} \in \Omega'_1$ si, et seulement si, les conditions $x' < x$, $x'' < x$ et $h(x') = h(x'')$ ont pour conséquence $x' = x''$.

Ω'_2 = sous-catégorie de Ω dont les éléments sont les $\overline{h} \in \Omega$ tels que les conditions $x' < x$, $x'' < x$ et $h(x'') < h(x')$ entraînent $x'' < x'$.

Ω'' = catégorie des applications ordonnées étalées :

$\overline{h} \in \Omega''$ si, et seulement si, pour tout $x \in M$ et tout $y < h(x)$, il existe $x' < x$ tel que $h(x') = y$.

Ω_2 = catégorie des applications ordonnées régulières $\subset \Omega''$:

$\overline{h} \in \Omega_2$ si, et seulement si, pour tout $x \in M$ et tout $y < h(x)$ la classe des $x' < x$ tels que $h(x') < y$ admet un plus grand élément $\overline{x}$ tel que $h(\overline{x}) = y$.

$\Omega^{\cup}$ = sous-catégorie de Ω dont les éléments sont les $\overline{h} \in \Omega$ tels que pour toute sous-classe C de M on ait

$$h(\underline{\bigcup} C) \subset \underline{\bigcup}\, h(C),$$

où $\underline{\bigcup}\, C$ = congrégation de C (voir [2], p. 4).

2) Ω^s = sous-catégorie pleine de Ω ayant pour unités les classes sous-inductives $(M,<) \in \Omega$.

$\mathcal{J}^{\cup}$ = catégorie des applications quasi-inductives = $\Omega^{\cup} \cap \Omega^s$.

$\mathcal{J}^{ps}$ = catégorie des applications sous-préinductives :

$\overline{h} \in \mathcal{J}^{ps}$ si, et seulement si, $(M,<)$ et $(M',<)$ sont des classes sous-préinductives et si les conditions $x' < x$ et $x'' < x$ dans $(M,<)$ entraînent

$$h(x' \cap x'') = h(x') \cap h(x'').$$

$\mathcal{J}^s$ = catégorie des applications sous-inductives = $\mathcal{J}^{\cup} \cap \mathcal{J}^{ps}$.

$\mathcal{J}$ = catégorie des applications inductives = sous-catégorie pleine de $\mathcal{J}^s$ ayant pour unités les classes inductives $(M,<) \in \Omega_o$.

3) Si $\mathcal{H}$ est l'une des catégories $\mathcal{J}^{\cup}$, $\mathcal{J}^{ps}$, $\mathcal{J}^s$ ou $\mathcal{J}$, nous posons :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap \Omega', \quad \mathcal{H}'' = \mathcal{H} \cap \Omega''$$

et nous désignons par $\mathcal{H}_l$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ ayant pour unités les $(M,<) \in \mathcal{H}_o$ dans lesquelles est vérifié l'axiome de distributivité :

(D) : Si $x = (\bigcup C) \cap x'$ est défini, où $\overline{x} \in M$, $C \subset M$ et $x' \in M$, alors la classe des $c \cap x'$, où $c \in C$, admet x pour $\overline{x}$- agrégat.

Ainsi $\mathcal{J}_l^{\cup}$ (resp. $\mathcal{J}_l^{ps}, \mathcal{J}_l^s, \mathcal{J}_l$) = catégorie des applications quasi-locales (resp. sous-prélocales, sous-locales, locales).

REMARQUES. 1) Dans les articles [5] à [9], on utilise le symbole $\tilde{\Omega}$ au lieu du symbole Ω comme ci-dessus et, dans ces articles, Ω désigne le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie $\tilde{\Omega}$ (que nous notons maintenant Ω_γ).

2) Les applications sous-préinductives et sous-inductives sont respectivement appelées application sous-inductives et inductives dans [0], [6], [7], [ESS].

Catégories structurées par des relations d'ordre :

1) Catégorie Ω- structurée [5], [8] et [9],

catégorie ordonnée = $\Omega(\Omega', \Omega)$- structurée [5] à [9],

catégorie s- ordonnée = $\Omega(\Omega'_1, \Omega)$- structurée [6] et [8],

catégorie semi-régulière = $\Omega((\Omega'', \Omega''), \Omega)$- structurée [8] et [9].

catégorie assez régulière = $\Omega((\Omega_2, \Omega_2), \Omega)$- structurée [8] et [9],

catégorie regulière = $\Omega((\Omega_2, \Omega_2), \Omega'')$- structurée [8] et [9],

catégorie complètement régulière à droite = catégorie s- ordonnée $(C^\bullet, <)$ telle que, si $e \in C^\bullet_o$, $E \in C^\bullet_o$ et $e < E$, il existe un pseudoproduit $Ee \in E.C.e$.

2) Catégorie quasi-inductive = $\mathfrak{J}^{\cup}(\mathfrak{J}^{\cup'}, \mathfrak{J}^{\cup})$- structurée [8] et [9],

catégorie sous-préinductive = $\mathfrak{J}^{ps}(\mathfrak{J}^{ps'}, \mathfrak{J}^{ps})$- structurée [6], [8] et [9],

catégorie préinductive = catégorie sous-préinductive $(C^{\cdot}, <)$ telle que $(C, <)$ soit une classe préinductive [8] et [9],

catégorie sous-inductive = $\mathfrak{J}^{s}(\mathfrak{J}^{s'}, \mathfrak{J}^{s})$- structurée [6], [8] et [9],

catégorie inductive = $\mathfrak{J}(\mathfrak{J}', \mathfrak{J})$- structurée [3], [4], [5], [7] et [8].

3) Groupoïde ordonné = groupoïde $\Omega((\Omega', \Omega'), \Omega)$- structuré [5],

groupoïde fonctoriellement ordonné = groupoïde $\Omega((\Omega' \cap \Omega'', \Omega' \cap \Omega''), \Omega)$-structuré [5],

groupoïde sous-préinductif (resp. sous-inductif, préinductif, inductif) = groupoïde fonctoriellement ordonné qui est une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, préinductive, inductive) [0], [2], [3], [4], [8].

4) Catégorie (resp. groupoïde) sous-prélocale, prélocale, sous-locale ou locale =

catégorie (resp. groupoïde) sous-préinductive, préinductive, sous-inductive ou inductive $(C^{\cdot}, <)$ telle que $(C, <)$ soit une classe sous-prélocale.

5) Les foncteurs structurés correspondant à chacun des cas précédents sont appelés du même nom que la catégorie correspondante : ainsi foncteur Ω- structuré, ordonné, s-ordonné, quasi-inductif,...

REMARQUE. Dans [4], catégorie inductive signifie catégorie $\mathfrak{J}(\mathfrak{J}', \mathfrak{J}'')$- structurée; dans [3], catégorie inductive est pris dans un sens encore plus particulier.

Pseudoproduit dans une catégorie ordonnée :

On définit dans [4] le pseudoproduit de deux éléments d'un groupoïde inductif. Dans [0] et [2], cette notion est étendue au cas d'un groupoïde sous-préinductif. Dans [5], la pseudomultiplication est définie dans une catégorie inductive; dans [6], elle est aussi définie dans une catégorie sous-préinductive. La définition générale du pseudoproduit dans une catégorie ordonnée est donnée et utilisée dans [8], modifiant un peu celle indiquée dans [6].

Filtres :

Dans [4] est construite la catégorie inductive des filtres associée à une catégorie inductive. Dans [0] et [2], le groupoïde sous-inductif des filtres correspondant à un groupoïde sous-préinductif est construit et comparé aux groupoïdes des atlas faibles complets et complets. En liaison avec la catégorie des filtres, la catégorie des jets locaux relatifs à une catégorie inductive suprarégulière au-dessus d'une autre est étudiée dans [4].

Atlas :

Un cas particulier d'atlas dans une catégorie d'homomorphismes inductive est défini dans [3], en relation avec le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures locales. La notion générale d'atlas faible, d'atlas faible complet, d'atlas complet propre, est définie dans [0] et [2], où sont construits les groupoïdes sous-inductifs d'atlas complets associés à un groupoïde sous-préinductif. Ces groupoïdes admettent pour sous-groupoïdes sous-inductifs les groupoïdes des sous-classes compatibles (faibles), des complexes et des sous-classes complètes. La notion d'atlas dans une catégorie quelconque est introduite dans [8], où sont considérées les catégories ordonnées d'atlas réguliers associées à un groupoïde ordonné.

Fusées :

Les fusées, fusées maximales, fusées strictes, fusées maximales strictes et superfusées sont définies dans [9] et appliquées à la construction de catégories ordonnées régulières ou quasi-inductives régulières associées à une catégorie ordonnée régulière. Dans le cas des groupoïdes réguliers, la notion de fusée se réduit à celle d'atlas.

Espèces de structures ordonnées et catégories d'homomorphismes ordonnées :

Dans [3] sont définies les espèces de structures inductives ou locales et les catégories d'homomorphismes inductives régulières.Dans [ESS] est développée la théorie des espèces de structures sous-préinductives au-dessus d'un groupoïde sous-préinductif. La notion d'espèce de morphismes ordonnée est appliquée dans [8] à l'étude de la cohomologie ordonnée. Les catégories d'homomorphismes régulières inductives sont considérées dans [4], les catégories d'homomorphismes sous-préinductives, sous-inductives et ordonnées dans [6].

Théorèmes de complétion :

Le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures locales au-dessus d'un groupoïde est énoncé dans [3] et [0] et démontré dans [ESS], à l'aide des groupoïdes d'atlas complets. Les théorèmes de complétion d'un groupoïde prélocal en un groupoïde inductif, inductif complet ou inductif relativement complet sont obtenus dans [2], par l'intermédiaire des groupoïdes d'atlas complets, et présentés sous forme de solution d'un problème universel dans [7]. Les théorèmes de complétion d'une catégorie préinductive ou sous-prélocale sont énoncés dans [10 b] et démontrés dans [9]; le théorème de complétion d'une catégorie préinductive utilise la catégorie des fusées strictes; le théorème de complétion d'une catégorie sous-prélocale, qui résoud un problème universel, est la catégorie quotient d'une sous-catégorie de la catégorie des superfusées. Dans [8], se trouve le théorème de complétion d'un groupoïde ordonné, utilisé pour construire le groupoïde d'holonomie complet d'une structure feuilletée.

Catégories ordonnées quotient :

Des théorèmes de passage au quotient sont indiqués et démontrés dans [7]. D'autres résultats de la même espèce viennent d'être obtenus par Joubert [13], en liaison avec le problème de l'extension ordonnée d'un foncteur ordonné.

Graphes multiplicatifs ordonnés :

La théorie des graphes structurés de [7] a été appliquée par S. Legrand à l'étude des graphes multiplicatifs ordonnés; en particulier un graphe multiplicatif ordonné peut être «universellement» plongé dans une catégorie ordonnée [14].

III. Compléments.

1) Certains résultats des n°1 et 2 de [ESS] peuvent actuellement se déduire de théorèmes généraux sur les espèces de structures structurées [10 a], les catégories structurées quotient et les catégories induites structurées [7] (une catégorie $\kappa^*(H,p)$ induite de (H,p) par κ, nous l'appelons maintenant catégorie produit fibré $p \vee \kappa$, en accord avec la terminologie générale des produits fibrés dans les catégories). Le théorème 1 du n°2 signifie que la catégorie des foncteurs sous-préinductifs est à produits fibrés finis, ce qui peut aussi résulter du fait qu'elle est à produits finis et résolvante à droite au-dessus de $\mathfrak{M}$.

2) Les groupoïdes sous-inductifs d'atlas complets ou d'atlas complets propres pourraient être obtenus à partir des groupoïdes sous-inductifs des atlas faibles complets et faibles complets propres, par passage au quotient relativement à la relation d'équivalence :

$$F \sim F' \text{ si, et seulement si, } \overline{F} = \overline{F'} \text{ (notation de [2])},$$

en appliquant le théorème de passage au quotient de [7].

3) Nous étudierons dans un prochain article les questions suivantes :

a) Catégories de fusées, fusées strictes et superfusées compatibles avec un foncteur ordonné. Nous montrerons que, par un procédé analogue à celui utilisé dans [ESS] et en utilisant les théorèmes de complétion de [9], ces catégories permettent de résoudre d'une façon «universelle» le problème de la complétion relative d'un foncteur sous-prélocal, généralisant ainsi les résultats de [ESS].

b) Catégories des jets locaux associées à un foncteur ordonné régulier, généralisant les résultats de [4].

(*) Erratum : Dans [2] et [4], la définition d'une classe inductive $(A, <)$ doit être lue : Toute partie *non vide* de A admet une intersection.

Bibliographie.

[0] Espèces de structures locales, élargissement de catégories, Top. et Géo. dif., 3 (1961), 73 p.

[1] Catégories différentiables et géométrie différentielle, Séminaire d'été Montréal (1961), 91 p.

[2] Groupoïdes sous-inductifs, Ann. Inst. Fourier, 13, 2 (1963), 1-60

[3] Gattungen von Lokalen Strukturen, Jahresb. D.M.V. 60, 2 (1957), 49-77.

[4] Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Inst. Fourier, 10 (1960), 305-332.

[5] Catégories structurées, Ann. Ec. Norm. Sup. 80, 3e Série (1963), 349-426.

[6] Sous-structures et catégories ordonnées, Fund. Math. 54 (1964), 211-228.

[7] Structures quotient, Comm. Math. Helv. 38, (1963) 219-283.

[8] Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, Ann. Inst. Fourier, 14, 1 (1964), 205-268.

[9] Complétion des catégories ordonnées, Ann. Inst. Fourier, 14, 2 (1964), 89-144.

[10] a) C.R. 256 (1963), p. 1198, 1891, 2080, 2280, 5031.
b) C.R. 257 (1963), p. 4110; 259 (1964), 701.

[11] Structures feuilletées, Proc. 5 th Canad. Math. Cong. (1961); 109-172.

[12] Catégories et structures, extraits, Topo. et Géo. dif. 6 (1964), 31 p.

[13] JOUBERT G. C.R. 260 (1965), p. 3251.

[14] LEGRAND S. C.R. 260 (1965), p. 3255.

C.R. signifie «Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris».