CHARLES EHRESMANN

Prolongements des catégories différentiables

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. nº 9, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A9_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE VOL. VI
Séminaire dirigé par Charles Ehresmann
JUIN 1964

PROLONGEMENTS DES CATEGORIES DIFFERENTIABLES *

par Charles EHRESMANN

Soit $\mathcal{C}^r$ une catégorie d'applications r fois différentiables d'un ouvert d'un espace affine localement convexe séparé vers un autre vérifiant les conditions suivantes:

1) $\mathcal{C}^r$ est une sous-catégorie inductive, saturée par induction et stable par produits finis, de la catégorie de toutes les applications continues d'un ouvert d'un espace affine localement convexe dans un autre.

2) Si $F \in \mathcal{C}^r$ et si la différentielle de F en x est un isomorphisme, il existe un voisinage U de x tel que la restriction de F à U soit un isomorphisme sur $F(U)$ (Théorème des fonctions implicites).

3) La classe des applications r fois différentiables entre ouverts d'espaces numériques est contenue dans $\mathcal{C}^r$.

Nous ne préciserons pas ici la notion d'application r fois différentiable. Mais en particulier $\mathcal{C}^r$ peut être la catégorie des applications r fois différentiables entre ouverts d'un espace numérique, ou entre ouverts d'un espace de Banach, r fois différentiable signifiant r fois différentiable au sens de Fréchet.

Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ la catégorie obtenue par élargissement de $\mathcal{C}^r$ au-dessus de la catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$ des applications continues entre espaces topologiques. Un objet de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ est une variété r fois différentiable, c'est-à-dire un atlas complet V compatible avec le pseudogroupe formé par les éléments inversibles de $\mathcal{C}^r$, et tel que les buts des cartes de V forment un recouvrement d'un ensemble, noté $\delta(V)$. La topologie sur $\delta(V)$ sous-jacente à V, ayant pour ouverts les buts des cartes de V, est représentée par $\tau(V)$. Les morphismes de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sont les applications r fois différentiables entre variétés r fois

---
* Texte d'une conférence préparée (mais non donnée effectivement) pour le Colloque international de Géométrie différentielle globale (Bucarest, Juin 1964).

différentiables entre variétés r fois différentiables. Les applications source et but dans $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sont notées α et β.

Nous supposons donné, pour tout entier r, une catégorie $\mathcal{C}^r$ de sorte que l'on ait $\mathcal{C}^r \subset \mathcal{C}^k$, si $k < r$. L'expression «r fois différentiable» signifie appartenant à $\tilde{\mathcal{C}}^r$.

Soit $J^{\lambda, r}$ la classe quotient de la classe des couples (F, x), où $F \in \tilde{\mathcal{C}}^r$ et $x \in \alpha(F)$, par la relation d'équivalence ρ_λ:

$(F, x) \sim (F', x)$ si $\alpha(F)$ et $\alpha(F')$ ont même germe (de variété r fois différentiable) en x, si $\beta(F)$ et $\beta(F')$ ont même germe en $F(x)$ et s'il existe un voisinage U de x tel que F et F' aient même restriction à U.

L'élément $(F, x) \bmod \rho_\lambda$ est appelé *jet local* de F en x, et noté $j_x^\lambda F$. Soit aussi $J^{\lambda, r}$ la catégorie obtenue en munisant $J^{\lambda, r}$ de la loi de composition :

$$j_{x'}^\lambda F' . j_x^\lambda F = j_x^\lambda (F'F)$$

si $\alpha(F')$ et $\beta(F)$ ont même germe en $F(x) = x'$.

La catégorie $J^{\lambda, r}$ admet une catégorie quotient $J^{k, r}$ relativement à la relation d'équivalence ρ_k :

$j_x^\lambda F \sim j_x^\lambda F'$ s'il existe $g \in V$ et $g' \in V'$, où $V = \alpha(F)$, $V' = \beta(F)$, tels que $x \in \beta(g)$, $F(x) \in \beta(g')$ et que la différentielle homogène d'ordre k' de $(g'^{-1} F g - g'^{-1} F' g)$ en $u = g^{-1}(x)$ soit nulle si $k' \leq k$.

$(j_x^\lambda F) \bmod \rho_k$ est désigné par $j_x^k F$ et appelé *jet d'ordre k de F en x*. Par suite on a : $j_{x'}^k F' . j_x^k F = j_x^k (F'F)$ si $\alpha(F')$ et $\beta(F)$ ont le même germe en $x' = F(x)$. La classe des unités est identifiée à la classe des germes de variétés r fois différentiables; les applications source et but dans $J^{k, r}$ sont notées α^r et β^r. Si V et V' sont deux variétés r fois différentiables, la sous-classe $J^{k, r}(V', V)$ des $X \in J^{k, r}$ tels que $\alpha^r(X)$ soit un germe de V et $\beta^r(X)$ un germe de V' est canoniquement munie d'une structure de variété $r-k$ fois différentiable, sous-jacente à sa structure d'espace fibré de base $V \times V'$. La classe de ces structures $r-k$ fois différentiables est une classe compatible au-dessus de $\tilde{\mathcal{T}}$ et détermine une variété $r-k$ fois différentiable non séparée $A^{k, r}$ telle que $J^{k, r} = \delta(A^{k, r})$. Soit $\Pi^{k, r}$ le groupoïde des éléments inversibles de $J^{k, r}$.

$J^{\lambda, r}$ opère sur $J^{k, r}$ relativement à la loi de composition :

$$(j_{x'}^\lambda F', j_x^k F) \to j_x^k (F'F) \quad \text{si} \quad \beta^r(j_x^k F) = \alpha(j_{x'}^\lambda F').$$

De plus on définit une loi de composition entre $\tilde{\mathcal{C}}^r$ et $J^{k, r}$ en posant $F'(j_x^k F) = j_x^k (F'F)$ si $\beta^r(j_x^k F)$ est le germe de $\alpha(F')$ en $F(x)$.

Si $(V', F, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$, nous désignerons par $T_x F$ l'application : $X \to FX$ de $T_x V$ dans $T_y V'$, où $x \in \delta(V)$, $y = F(x)$ et $T_x V$ est l'espace tangent à V en x (considéré comme l'ensemble des $X \in J^{1,r}(V, R)$ tels que $\alpha^r(X)$ soit le germe de R en 0 et que $\beta^r(X)$ soit le germe de V en x).

Soit $S(\mathcal{C}^r)$ la sous-catégorie de $\hat{\mathcal{C}}^r$ formée des surjections régulières, c'est-à-dire des applications r fois différentiables (V', F, V) telles que, pour tout $x \in \delta(V)$, le noyau de $T_x F$ admette un supplémentaire topologique M' dans $T_x V$ et que $T_x F$ définisse un isomorphisme de M' sur $T_y V'$, où $y = F(x)$.

Nous appelons *catégorie r fois différentiable* une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}^r((S(\tilde{\mathcal{C}}^r), S(\tilde{\mathcal{C}}^r)), \tilde{\mathcal{C}}^r)$-structurée, c'est-à-dire un couple $(C^\bullet, A)$ d'une catégorie $C^\bullet$ et d'une variété r fois différentiable A telle que $\delta(A)$ soit la classe C sous-jacente à $C^\bullet$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Soient α et β les applications source et but dans $C^\bullet$ et soit $C_o^\bullet$ la classe des unités de $C^\bullet$; il existe une variété r fois différentiable A_o telle que $\delta(A_o) = C_o^\bullet$, que l'injection canonique de $C_o^\bullet$ dans C définisse une application r fois différentiable (A, ι, A_o) et que α et β définissent des surjections régulières de A dans A_o.

2) Soit $A * A$ la sous-variété propre de $A \times A$ produit fibré de (A_o, α, A) et de (A_o, β, A) dans $\tilde{\mathcal{C}}^r$. La loi de composition κ de $C^\bullet$ définit une application r fois différentiable de $A * A$ sur A.

Sauf indication contraire, toutes les variétés A utilisées dans la suite sont supposées séparées (c'est-à-dire $\tau(A)$ est une topologie séparée).

THEOREME. *Soit $(C^\bullet, A)$ une catégorie r fois différentiable; alors A_o est une sous-variété propre fermée de A. Le groupoïde $C_\gamma^\bullet$ des éléments inversibles de $C^\bullet$ forme un ouvert pour $\tau(A)$ et l'application $h \to h^{-1}$ définit un automorphisme de la sous-variété déterminée par $C_\gamma^\bullet$.*

On dira que $(C^\bullet, A)$ est une *catégorie r fois régulièrement différentiable* si $(C^\bullet, A)$ est une catégorie r fois différentiable vérifiant la condition supplémentaire :

3) La sous-classe $C_o^\bullet \frown C_o^\bullet$ de $C_o^\bullet \times C_o^\bullet$ formée des couples (e', e) tels que $Hom(e', e) \neq \emptyset$ définit une sous-variété r fois différentiable $A_o \frown A_o$ de $A_o \times A_o$ et l'application $[\beta, \alpha] : f \to (\beta(f), \alpha(f))$ définit une surjection régulière de A sur $A_o \frown A_o$.

Si on suppose de plus $C_o^\bullet \frown C_o^\bullet$ ouvert pour $\tau(A_o \times A_o)$, la catégorie $(C^\bullet, A)$ est dite *localement triviale.*

Un exemple important de catégorie $r-k$ fois différentiable (non séparée) est celui de la catégorie localement triviale $(J^{k,r}, A^{k,r})$, où $k < r$, appelée la *catégorie des jets d'ordre k d'applications r fois différentiables.* $A_o^{k,r}$ est la variété $r-k$ fois différentiable sous-jacente à $A_o^{0,r}$, laquelle est une variété r fois différentiable «universelle» définie sur la classe des germes de variétés r fois différentiables. Toute variété $V \in \tilde{\mathcal{C}}^r$ admet la bijection canonique $x \to \hat{x}$, où $\hat{x}$ est le germe de V en x, sur la sous-variété de $A_o^{k,r}$ définie par la classe $\hat{V}$ des germes de V.

Si $X_i \in J^{k,r}$, $i = 1, 2$, et $\beta^r(X_1) = \beta^r(X_2)$, on dit, en accord avec la théorie générale, que $((X_1, X'_1), (X_2, X'_2))$ est un produit fibré naturalisé si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $X'_i \in J^{k,r}$ et $X_1 . X'_1 = X_2 . X'_2$;

2) Si $X''_i \in J^{k,r}$, $i = 1, 2$ et si $X_1 . X''_1 = X_2 . X''_2$, alors il existe un et un seul $\overline{X} \in J^{k,r}$ tel que $X'_i . \overline{X} = X''_i$.

Dans ce cas, $\alpha^r(X'_i)$ est appelé produit fibré de (X_1, X_2) dans $J^{k,r}$. En particulier un tel produit fibré naturalisé est défini si $X_i = j^k_{x_i} f_i$, $\beta^r(X_1) = \beta^r(X_2)$ et $f_i \in S(\tilde{\mathcal{C}}^r)$.

Soit $(C^\cdot, A)$ une catégorie r fois différentiable, soit $\hat{A} . J^{k,r}$ la sous-classe de $J^{k,r}$ formée des jets X d'ordre k tels que $\beta^r(X)$ soit un germe de A. Soit $\hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$ la classe des $X \in \hat{A} . J^{k,r}$ tels que $\alpha^r(X) = \hat{x}$.

Soient $a = (A_o, \alpha, A)$ et $b = (A_o, \beta, A)$. Si $z = (y_1, y_2) \in C^\cdot * C^\cdot$, les jets $j^k_{y_1} a$ et $j^k_{y_2} b$ admettent un produit fibré naturalisé :

$$((j^k_{y_1} a, \tilde{a}_{y_1}), (j^k_{y_2} b, \tilde{b}_{y_2})) \qquad \text{tel que } \alpha^r(\tilde{b}_{y_2}) = \hat{z}$$

Si $X_i \in \hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$ et $a X_2 = b X_1$, il existe un et un seul $Z \in J^{k,r}$ tel que si $\hat{y}_i = \beta^r(X_i)$, on ait : $\quad \alpha^r(Z) = \hat{x}, \ \beta^r(Z) = \hat{z}, \ \tilde{b}_{y_2} . Z = X_2, \ \tilde{a}_{y_1} . Z = X_1$.

Posons : $\quad X_2 \circ X_1 = (A, \kappa, A * A)\, Z \in \hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$.

THEOREME. *$\hat{A} . J^{k,r}$, muni de la loi de composition $\circ$ («prolongement de κ»), est une catégorie admettant $J^{k,r}$ pour catégorie d'opérateurs à droite relativement à la loi de composition :*

$$(X, Y) \to X . Y \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(X) = \beta^r(Y).$$

$\hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$ définit une sous-variété propre de $A^{k,r}$ et une catégorie $r-k$ fois différentiable.

Supposons $X_i \in \hat{A} . J^{k,r}$ tels qu'il existe un produit fibré naturalisé : $((a X_2, Y_2), (b X_1, Y_1))$. Soit $X_2 \blacklozenge X_1$ la sous-classe de $J^{k,r}$ formée des éléments $(X_2 . Y_2 \circ X_1 . Y_1) . G$, où $G \in \Pi^{k,r}$. La loi de composition multiforme $\blacklozenge$ a les propriétés suivantes («pseudo-catégorie») :

1) Si $X \in \hat{A} . J^{k,r}$, $\beta^r(X) = \hat{y}$, $e = \alpha(y)$, $e' = \beta(y)$, on a :

$$X \blacklozenge j^k_e a = j^k_{e'} b \blacklozenge X = X . \Pi^{k,r}.$$

2) Si $X_3 \blacklozenge X_2$ et $X_2 \blacklozenge X_1$ sont définis, on a :

$$X_3 \blacklozenge (X_2 \blacklozenge X_1) = (X_3 \blacklozenge X_2) \blacklozenge X_1 .$$

Soit C^k la sous-classe de $\hat{A}.J^{k,r}$ formée des $X \in \hat{A}.J^{k,r}.\hat{A}_o$ tels que $aX = \alpha^r(X)$. Si $X_i \in C^k$ et si $\alpha^r(X_2) = \beta^r(X_1)$, il existe un $Z \in X_2 \blacklozenge X_1$ tel que $\alpha^r(Z) = \alpha^r(X_1)$, à savoir $Z = (X_2 . bX_1) \circ X_1$, que nous noterons $X_2 \bullet X_1$; on a $Z \in C^k$.

THEOREME. *$(C^{k\bullet}, A^k)$ est une catégorie $r-k$ fois différentiable, où A^k est une structure de sous-variété propre de $A^{k,r}$. Si $(C^{\cdot}, A)$ est régulièrement différentiable, $(C^{k\bullet}, A^k)$ est régulièrement différentiable. De plus $C^{k\bullet}$ s'identifie à la sous-catégorie de la catégorie produit croisé (dual) de $\hat{A}.J^{k,r}.\hat{A}_o$ et $\hat{A}_o.J^{k,r}.\hat{A}_o$ formée des triplets $(\beta^r(bX), bX, X)$.*

Nous appellerons $(C^{k\bullet}, A^k)$ le *prolongement d'ordre k de $(C^{\cdot}, A)$.*

La source de $X \in C^{k\bullet}$ est $\alpha^r(X)$, son but $\beta^r(bX)$. Pour que X soit inversible, il faut et il suffit que bX soit inversible dans $J^{k,r}$ et que $\beta^r(X) = \hat{z}$, où $z \in C^{\cdot}_{\gamma}$. L'application $X \to bX$ définit un foncteur $r-k$ fois différentiable de $(C^{k\bullet}, A^k)$ vers la catégorie $r-k$ fois différentiable définie par $\hat{A}_o.J^{k,r}.\hat{A}_o$. L'application $j_C^{k',k} : j_x^k f \to j_x^{k'} f$, où $k' < k$, définit un foncteur $r-k$ fois différentiable, appelé foncteur canonique, de $(C^{k\bullet}, A^k)$ sur $(C^{k'\bullet}, A^{k'})$.

Puisque $(C^{k\bullet}, A^k)$ est une catégorie $r-k$ fois différentiable, on peut définir le prolongement d'ordre k' de $(C^{k\bullet}, A^k)$, pour tout $k' \leq r-k$; c'est une catégorie $r-k-k'$ fois différentiable. En particulier, on définit par récurrence $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$, prolongement non holonome d'ordre k de $(C^{\cdot}, A)$, en posant : $(\tilde{C}^{0\bullet}, A^0) = (C^{\cdot}, A)$ et :

$$(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k) = ((\tilde{C}^{k-1\bullet})^{1\bullet}, (\tilde{A}^{k-1})^1).$$

PROPOSITION. *$(C^{k\bullet}, A^k)$ s'identifie à une sous-catégorie différentiable de $(\tilde{C}^{k\bullet}, A^k)$.*

Le composé des foncteurs canoniques

$$(\tilde{C}^{i\bullet}, \tilde{A}^i) \leftarrow (\tilde{C}^{i+1\bullet}, \tilde{A}^{i+1}) \leftarrow \cdots \leftarrow (\tilde{C}^{k-1\bullet}, \tilde{A}^{k-1}) \leftarrow (\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$$

est un foncteur $(r-k)$ fois différentiable $\tilde{j}_C^{i,k}$.

Soit $\overline{\varphi} = (A, \varphi, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$. Soit V^k la classe des $X \in \hat{V}.J^{k,r}.\hat{A}$ tels que $\overline{\varphi}X \in C^k$. La classe $\overline{\varphi}V^k$ est appelée le prolongement d'ordre k de l'ensemble différentiable paramétré $(\varphi(\delta(V)), \overline{\varphi})$. Par récurrence, on définit le prolongement non holonome d'ordre k de $(\varphi(\delta(V)), \overline{\varphi})$.

Soit $\overline{\varphi} = (V', \varphi, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$, où V est une sous-variété de A telle que $\delta(V)$ soit ouvert pour $\tau(A)$. Soit $O \in V'$ et $w = \overset{-1}{\varphi}(O)$; le couple $(w, j_w^{\lambda} A)$, où $j_w^{\lambda} A$ est le germe (jet local) de A autour de w, s'appelle variété élémentaire extraite de A. Soit W une variété extraite de A, c'est-à-dire une classe complète de variétés élémentaires extraites de A. On appelle *prolongement d'ordre k de W* la classe W^k des $X \in C^k$

tels qu'il existe une variété élémentaire extraite $(w, j_w^\lambda A)$ définie par $\overline{\varphi}$, où $w = \overset{-1}{\varphi}(O)$, et que $\overline{\varphi}X$ soit le jet de l'application constante sur O. On définit d'une manière analogue le prolongement non holonome d'ordre k de W, noté $\tilde{W}^k$.

PROPOSITION. *La classe des* $X \in \tilde{C}^{k+1}$ *tels que* $\tilde{j}_C^{k-1,k} X = z$, *où* $\beta^r(X) = \hat{z}$, *définit une sous-catégorie* $r-k-1$ *fois différentiable de* $(\tilde{C}^{k+1\bullet}, \tilde{A}^{k+1})$, *est appelée prolongement semi-holonome d'ordre 1 de* $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$.

Par récurrence, on définit, en partant de $(C^{1\bullet}, A^1)$, le prolongement semi-holonome $(\overline{C}^{k\bullet}, \overline{A}^k)$ d'ordre k de $(C^\cdot, A)$, qui est une sous-catégorie $r-k$ fois différentiable de $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$ et qui admet pour sous-catégorie $r-k$ fois différentiable le prolongement ("holonome") $(C^{k\bullet}, A^k)$. Posons : $\overline{j}_C^{i,k} = (\overline{C}^{i\bullet}, \tilde{j}_C^{i,k}\iota, \overline{C}^{k\bullet})$.

La construction précédente peut s'appliquer à la catégorie r fois différentiable (non séparée) $(J^{0,r}, A^{0,r})$; on obtient de cette façon les catégories $r-k$ fois différentiables (non séparées) des jets non holonomes et semi-holonomes d'ordre k, associées à $\tilde{\mathcal{C}}^r$, notées respectivement $(\tilde{J}^{k,r}, \tilde{A}^{k,r})$ et $(\overline{J}^{k,r}, \overline{A}^{k,r})$. En particulier, si $k > 1$, on a :

$$\tilde{C}^k \subset \tilde{J}^{k,r} \quad \text{et} \quad \overline{C}^k \subset \overline{J}^{k,r}.$$

Soit V une variété r fois différentiable et $E = \delta(V)$. Soit $(C^\cdot, A)$ une catégorie r fois différentiable. On dira que $((C^\cdot, A), V, \kappa')$ est une *espèce de structures r fois différentiable*, ou que $(C^\cdot, A)$ est une catégorie r fois différentiable d'opérateurs sur V, relativement à κ', si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $(C^\cdot, E, \kappa')$ est une espèce de structures; soit $C^\cdot * E$ la classe des couples composables (i.e. tels que $\kappa'(f, z)$ soit défini) et soit p l'application canonique de E sur $C_o^\cdot$ telle que $p(z) = e$ si $(z, e) \in C^\cdot * E$ et $e \in C_o^\cdot$.

2) (A_o, p, V) est une surjection régulière.

3) Soit $A * V$ la sous-variété r fois différentiable de $A \times V$ produit fibré de (A_o, α, A) et de (A_o, p, V); alors κ' définit une application r fois différentiable de $A * V$ dans V.

La catégorie des hypermorphismes associée à $(C^\cdot, E, \kappa')$ est désignée par $(C^\cdot * E)^\cdot$.

THEOREME. *Soit* $((C^\cdot, A), V, \kappa')$ *une espèce de structures r fois différentiable et* $E = \delta(V)$. *Si, pour tout* $f \in C$, *l'application* $z \to \kappa'(f, z)$ *définit une surjection régulière de la sous-variété* $\overset{-1}{p}(\alpha(f))$ *de* V *dans* $\overset{-1}{p}(\beta(f))$ *et si* $(C^\cdot, A)$ *est régulièrement différentiable, alors* $((C^\cdot * E)^\cdot, A * V)$ *est une catégorie r fois régulièrement différentiable.*

L'application $z \to (p(z), z)$ définit un isomorphisme r fois différentiable de V

sur $(A * V)_o$.

Soit $((C^{\cdot}, A), V, \kappa')$ une espèce de structures r fois différentiable vérifiant les conditions du théorème précédent. Soit $((C^{\cdot} * E)^{\cdot}, A * V)$ la catégorie r fois différentiable des hypermorphismes correspondante. Soit $z \in E$ et $X \in C^k$ tels que $\alpha^r(X) = \beta^r(p\hat{z})$, où $\hat{z}$ désigne le germe de V en z. Soit $[Xp, \hat{z}]$ le jet de source $\hat{z}$, de but le germe de $A * V$ en (f, z), où $\hat{f} = \beta^r(X)$, tel que $p_1[Xp, \hat{z}] = Xp$ et $p_2[Xp, \hat{z}] = \hat{z}$, en désignant par p_1 et p_2 les projections canoniques de $A * V$ vers A et V respectivement. Soit

$$X\hat{z} = (V, \kappa', A * V)[Xp, \hat{z}]$$

(jet de source $\hat{z}$ et de but $\hat{z}'$, où $z' = fz$, obtenu par prolongement de κ'). La catégorie $C^{k\bullet}$ opère sur E relativement à la loi de composition $\kappa'^k : (X, z) \to fz$. Soit $(C^{k\bullet} * E)^{\bullet}$ la catégorie des hypermorphismes correspondante.

THEOREME. *$((C^{k\bullet}, A^k), V, \kappa'^k)$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable; $((C^{k\bullet} * E)^{\bullet}, A^k * V)$ est une catégorie $r-k$ fois régulièrement différentiable et s'identifie à une sous-catégorie du prolongement d'ordre k de $((C^{\cdot} * E)^{\cdot}, A * V)$ par l'application $(X, z) \to [Xp, \hat{z}]$.*

THEOREME. *Si $\eta' = ((C^{k\bullet} * E)^{\bullet}, A^k * V), V', \kappa'')$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable, alors $\eta'' = ((C^{k\bullet}, A^k), V', \overline{\kappa}')$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable, isomorphe à η', où $\overline{\kappa}'$ est la loi de composition*

$$(X, z') \to \kappa''((X, p'(z')), z'),$$

en désignant par p' la projection canonique de $\delta(V')$ dans $C_o^{k\bullet}$.

La $\tilde{\mathcal{C}}^r$- application covariante inversible définissant l'isomorphisme est $(\eta'', (\Phi, \varphi_o), \eta')$, où $\Phi(X, z') = ((X, p'(z')), z')$ et $\varphi_o(z) = z$, si $z \in E$.

THEOREME. *Les deux théorèmes précédents sont encore valables en y remplaçant C^k par $\overline{C}^k$.*

Le théorème de transitivité des prolongements d'une variété r fois différentiable W est un cas particulier des théorèmes précédents lorsqu'on prend pour $C^{\cdot}$ une sous-catégorie localement triviale de $\hat{W}.\overline{J}^{k,r}.\hat{W}$.

Soit $(C^{\cdot}, A)$ un groupoïde r fois différentiable et soit $\overline{C}_\gamma^{k\bullet}$ le sous-groupoïde de tous les éléments inversibles de $\overline{C}^{k\bullet}$. Supposons $k+3 < r$ et A de dimension finie. Soit φ un foncteur 3 fois différentiable section du foncteur de $\overline{C}_\gamma^{k\bullet}$ vers $\overline{C}_\gamma^{k-1\bullet}$ restriction de $\overline{j}_C^{k-1,k}$. Soit Φ la sous-variété de $\overline{C}^k$ définie par $\varphi(\overline{C}^{k-1})$ (on peut considérer Φ comme un système différentiel). Alors $(\varphi(\overline{C}^{k-1})^{\bullet}, \Phi)$ est un sous-groupoïde différentiable de $\overline{C}^{k\bullet}$.

THEOREME. *Soit Σ la classe des applications k fois différentiables σ de A_o dans A*

telles que $a.\sigma = A_o$, *que* $b.\sigma$ *soit un automorphisme de* A_o *et que* $j^k_x \sigma \in \Phi$ *pour tout* $x \in C^{\bullet}_o$. *Alors* Σ *est canoniquement muni d'une structure de groupe de Lie.*

Ce qui précède permet d'étudier les sous-groupoïdes $r-1$ fois différentiables $(C^{\bullet}, A)$ de $((\hat{V}.\Pi^{k,r}.\hat{V})^{\bullet}, A^{k,r}_V)$, où V est une variété r fois différentiable et $A^{k,r}_V$ la sous-variété de $A^{k,r}$ définie par $\hat{V}.\Pi^{k,r}.\hat{V}$. En particulier ces résultats s'appliquent à la théorie des G-structures (cas où $(C^{\bullet}, A)$ est localement trivial) et à la théorie des connexions d'ordre supérieur.

NOTES. Les notations utilisées sont celles de :

Catégories et structures (cours multigraphié, Paris 1964) et d'une série de Notes à l'Académie des Sciences : 233, 1951, p. 598, 777, 1081 ; 234, 1952, p. 587, 1028, 1424 ; 239, 1954, p. 1762 ; 240, 1955, p. 397, 1755.

Voir aussi : *Sur les connexions d'ordre supérieur,* Atti V Congresso Un. Mat. It., 1956.

La notion de catégorie r fois différentiable est définie dans :

Catégories topologiques et catégories différentiables, Coll. Géo. diff. Globale, Bruxelles, 1959, p. 137,

Catégories structurées. Ann. Ec. Norm. Sup. 1963.

Le dernier théorème se ramène au cas $k = 1$, indiqué dans une conférence au Congrès de l'Union Mat. Argentina (Cordoba, 1959) :

Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie, Rev. Un. mat. Argentina, XIX, 1960.

Un cas particulier du théorème est démontré dans *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini,* C.R.A.S. 246, 1958, p. 360.

Les résultats esquissés dans cet article, ainsi que leurs applications à la théorie des connexions d'ordre supérieur, ont fait l'objet de plusieurs cours et seront prochainement développés dans un livre.