TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

CHARLES EHRESMANN

Catégories et structures : extraits

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. nº 8, p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A8_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE VOL. VI
Séminaire dirigé par C. EHRESMANN
MARS 1964

CATEGORIES ET STRUCTURES : Extraits

par Charles EHRESMANN

Le texte suivant est formé d'extraits des chapitres 2 et 3 d'un livre provisoirement polycopié sur les catégories et les structures qui développe un cours donné à l'Institut Henri Poincaré (1963-64). Comme ce livre ne paraîtra pas avant plusieurs mois, nous en indiquons ici, afin de pouvoir ultérieurement nous y référer, un certain nombre de définitions et résultats. Ce travail est un complément aux articles [1], [2] et [3] dont nous reprenons la plupart des notations.

1. Espèces de structures dominées.

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie pleine d'applications et soit $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\overline{C}^{\bullet}, \Phi, C^{\bullet})$ tels que $(\overline{C}, \Phi, C) \in \mathfrak{M}$; soit $(\mathfrak{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ le foncteur canonique défini par $p_{\mathcal{F}} : (\overline{C}^{\bullet}, \Phi, C^{\bullet}) \to (\overline{C}, \Phi, C)$.

Si $C^{\bullet}$ est une catégorie et si une sous-catégorie $C_1^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$ est une catégorie d'opérateurs sur une classe S_o relativement à la loi de composition κ', le triplet $(C^{\bullet}, S_o, \kappa')$ définit une espèce de structures (au-dessus de $C^{\bullet}$); si $C_1^{\bullet} = C^{\bullet}$, nous écrirons aussi $[C^{\bullet}, S_o, \kappa']$ au lieu de $(C^{\bullet}, S_o, \kappa')$. Nous désignerons par $C^{\bullet} * S_o$ la classe des couples $(f, z) \in C \times S_o$ tels que $\kappa'(f, z)$ soit défini et nous poserons $\kappa'(f, z) = fz$. La catégorie des hypermorphismes associée à $(C^{\bullet}, S_o, \kappa')$ sera notée $(C^{\bullet} * S_o)^{\bullet}$. Soit $\tilde{f}$ l'application définie, lorsque $f \in C_1$, par : $z \to fz$, où $(f, z) \in C^{\bullet} * S_o$. Soit $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$ la classe des espèces de structures $\eta = (C^{\bullet}, S_o, \kappa')$ telles que $C^{\bullet} \in \mathcal{F}_o$ et $S_o \in \mathfrak{M}_o$; soit $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ la catégorie des applications covariantes $(\overline{\eta}, (\Phi, \varphi_o), \eta)$ pour lesquelles $\eta \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$ et $\overline{\eta} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$; soit p l'application :

$$((\overline{C}^{\bullet}, \overline{S}_o, \overline{\kappa}'), (\Phi, \varphi_o), (C^{\bullet}, S_o, \kappa')) \to (\overline{S}_o, \varphi_o, S_o)$$

de $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ dans $\mathfrak{M}$, qui définit un foncteur $(\mathfrak{M}, p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$.

DEFINITION . *Soit* $\overline{\lambda} = (\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L}) \in \mathfrak{F}$. *On dit que* $(C^{\cdot}, F)$ *est* un couple dominant dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ une espèce de structures, *ou que* $((C^{\cdot}, S_o, \kappa'), F)$ *est* une espèce de structures dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$, *si* $\overline{F} = (\mathfrak{L}, F, C^{\cdot}_1)$ *est un foncteur et si* $(C^{\cdot}, \overline{\lambda}.\overline{F})$ *est un couple définissant l'espèce de structures* $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$; *on appelle* $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ l'espèce de structures sous $(C^{\cdot}, F)$.

Soit $\eta = (C^{\cdot}, S_o, \kappa') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$ et soit π' l'application : $z \to e$, où $e \in C^{\cdot}_o$ et $(e, z) \in C^{\cdot} * S_o$.

PROPOSITION. *Si* $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L})$ *est un foncteur fidèle,* (η, F) *est une espèce de structures dominée dans* $(\lambda, \mathfrak{L})$ *si, et seulement si,* F *est une application de* $C_1 \subset C$ *dans* $\mathfrak{L}$ *vérifiant les conditions :*

1) Si $e \in \pi'(S_o)$, *on a* $F(e) \in \mathfrak{L}_o$ *et* $\lambda(F(e)) = \overset{-1}{\pi'}(e)$.

2) Si $f \in C$ *et s'il existe* $z \in S_o$ *tel que* $\kappa'(f, z)$ *soit défini, on a:*

$$F(f) = (F(e'), \tilde{f}, F(e)), \qquad \text{où } e = \alpha(f),\ e' = \beta(f).$$

Une espèce de structures dominée dans $(p\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ est appelée une *espèce de morphismes* [1].

DEFINITION. *On dira que* $S^{\cdot}$ *est une* catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs $C^{\cdot}$, la loi de composition étant κ', *si* $C^{\cdot}$ *est une catégorie d'opérateurs sur* S *relativement à* κ', *et si* $S^{\cdot}$ *vérifie les conditions :*

c_1) *Si* $(z', z) \in S^{\cdot} * S^{\cdot}$ *et si* $(f, z'.z) \in C^{\cdot} * S$, *on a :*

$$(f, z') \in C^{\cdot} * S,\ (f, z) \in C^{\cdot} * S \ \text{ et } \ f(z'.z) = fz'.fz.$$

c_2) *Si* $z_o \in S^{\cdot}_o$ *et si* $(f, z_o) \in C^{\cdot} * S$, *on a* $fz_o \in S^{\cdot}_o$.

Cette définition signifie [1] que $[C^{\cdot}, S, \kappa']$ est l'espèce de structures sous une espèce de morphismes (η, F) et que $S^{\cdot}$ est la catégorie somme des catégories $F(e)$, où $e \in C^{\cdot}_o$.

Un cas important d'espèces de structures dominées est celui des *espèces de structures dominées par des applications covariantes,* c'est-à-dire des espèces de structures dominées dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$.

Pour que (η, F) soit une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) $\eta = (C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ est une espèce de structures; soit π' l'application $z \to e$ de S_o dans $C^{\cdot}_o$, où $(e, z) \in C^{\cdot} * S_o$ et soit $C^{\cdot}_1$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ opérant sur S_o.

2) Il existe un foncteur G de $C^{\cdot}_1$ vers $\mathfrak{F}$ et, pour tout $e \in \pi'(S_o)$, $F(e)$ est une espèce de structures $(G(e), \overset{-1}{\pi'}(e), \overline{\kappa'}(e))$.

3) Si $f \in C_1$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, alors $F(f) = (F(e'), (G(f), \varphi_o(f)), F(e))$ est une application covariante, c'est-à-dire $\varphi_o(f)$ est une application de $\overset{-1}{\pi'}(e)$ dans $\overset{-1}{\pi'}(e')$ telle que, si $z \in \overset{-1}{\pi'}(e)$ et $(g,z) \in G(e) * \overset{-1}{\pi'}(e)$, on ait :

$$\varphi_o(f)(gz) = G(f)(g)\,\varphi_o(f)(z).$$

Supposons ces conditions réalisées. Pour tout $e \in (C_1)^{\bullet}_o$, désignons par $\hat{F}(e)$ la catégorie $(G(e) * \overset{-1}{\pi'}(e))^{\bullet}$. Pour tout $f \in C_1$, posons :

$$\hat{F}(f) = (\hat{F}(\beta(f)), \hat{f}, \hat{F}(\alpha(f))), \quad \text{où } \hat{f}(g, z) = (G(f)(g), \varphi_o(f)(z)).$$

Soit $\Sigma^{\bullet}$ la catégorie somme des catégories $\hat{F}(e)$.

PROPOSITION. *$\Sigma^{\bullet}$ est une catégorie munie de la catégorie d'opérateurs $C_1^{\bullet}$ relativement à la loi de composition $\hat{\kappa}'$:*

$$(f, (g, z)) \to \hat{f}(g, z) \quad \textit{si, et seulement si,} \quad (g, z) \in \hat{F}(\alpha(f)).$$

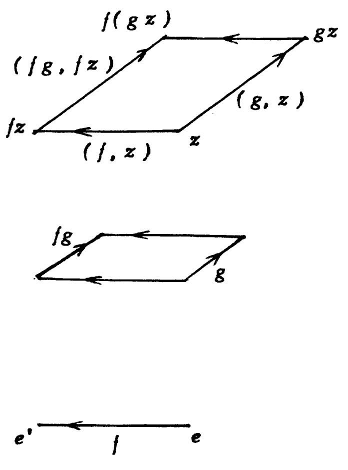
REMARQUE. Les conditions 1, 2 et 3 n'entraînent pas que $(C^{\bullet}, G)$ soit un couple dominant dans $(p\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ une espèce de structures. On peut toutefois se ramener à ce cas en remplaçant $G(e)$ par la catégorie équivalente dont les éléments sont les couples (e, g) tels que $g \in G(e)$.

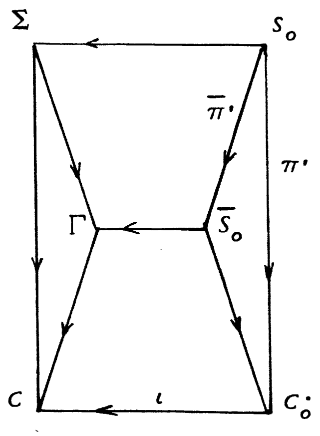
Supposons de plus que $(C^{\bullet}, G)$ soit un couple dominant dans $(p\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ une espèce de structures μ, c'est-à-dire que (μ, G) soit une espèce de morphismes. Soit $\Gamma^{\bullet}$ la catégorie des hypermorphismes associée à l'espèce de structures μ. On sait [4a] que $(\Gamma^{\bullet}, \Gamma^{\perp})$ est une catégorie double, la loi de composition $\perp$ étant définie par:

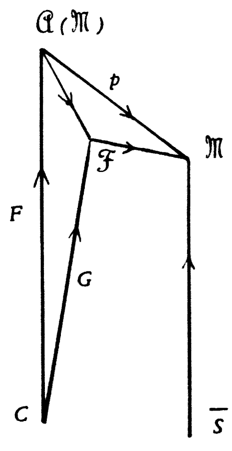
$$(f', g') \perp (f, g) = (f, g'.g)$$

si, et seulement si, $f' = f$ et $(g', g) \in G(e) * G(e)$, où $e = \alpha(f)$.

Soit $(\overline{S}^{\bullet}, S_o, \overline{\kappa}')$ l'espèce de structures somme des espèces de structures $F(e)$, où $e \in \pi'(S_o)$.







Rappelons le théorème suivant (voir [4b], p.2) qui relie la notion d'espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ à la notion d'espèce de structures au-dessus d'une espèce de morphismes, définie dans [4b] :

THEOREME. *$((\Gamma^{\cdot}, \Gamma^{\perp}), \overline{\pi}', S_o)$ est une espèce de structures au-dessus de l'espèce de morphismes (μ, G), où $\overline{\pi}'(z) = s$ si $\overline{\kappa}'(s, z)$ est défini. L'application :*

$$((C^{\cdot}, S_o, \kappa'), F) \to ((\Gamma^{\cdot}, \Gamma^{\perp}), \overline{\pi}', S_o)$$

est une bijection de la classe des espèces de structures dominées par des applications covariantes sur la classe des espèces de structures au-dessus d'une espèce de morphismes.

CAS PARTICULIER. Soit $C^{\cdot}$ la catégorie des couples (U', U), où U et U' sont des ouverts d'un espace topologique E et $U' \subset U$, munie de la loi de composition entre couples. Si (μ, G) est une espèce de morphismes et si $G(U, U)$ est un groupe (resp un groupoïde) pour tout $(U, U) \in C^{\cdot}_o$, alors G est un préfaisceau de groupes (resp. groupoïdes). Si de plus l'espèce de structures μ est une espèce de structures inductive complète [5], G est un faisceau de groupes (resp. groupoïdes). Supposons que $[C^{\cdot}, S_o, \kappa']$ soit une espèce de structures complètes et que $([C^{\cdot}, S_o, \kappa'], F)$ soit une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$. Avec les notations des conditions 1, 2 et 3 et si G est un faisceau de groupes, pF est un faisceau d'ensembles muni du faisceau de groupes d'opérateurs G [6].

COUPLE DE CATEGORIES D'OPERATEURS.

Soit $([C^{\cdot}, S_o, \kappa'], F)$ une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$; reprenons les notations des conditions 1, 2, 3, ci-dessus; supposons que, pour tout $f \in C$, $G(f)$ soit le foncteur identité de la catégorie $\overline{C}^{\perp}$ et que, pour tout $e \in C^{\cdot}_o$, $F(e) = [\overline{C}^{\perp}, \overset{-1}{\pi'}(e), \overline{\kappa}'(e)]$. Alors $\overline{C}^{\perp}$ est aussi une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à la loi de composition $\overline{\kappa}'$:

$$(g, z) \to \overline{\kappa}'(e)(g, z) \text{ si, et seulement si, } \pi'(z) = e \text{ et } (g, z) \in \overline{C}^{\perp} * \overset{-1}{\pi'}(e).$$

Soit $\overline{\pi}'$ l'application : $z \to s$ si, et seulement si, $\overline{\kappa}'(s, z)$ est défini, de S_o sur $\overline{C}^{\perp}_o$; cette application est l'application somme des applications $\overline{\pi}'(e)$ correspondantes aux espèces de structures $F(e)$.

La situation précédente est équivalente à la suivante :

Soient $C^{\cdot}$ et $\overline{C}^{\perp}$ deux catégories, S_o une classe vérifiant les conditions suivantes :

A) $C^{\cdot}$ est une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à κ'.

B) $\overline{C}^{\perp}$ est une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à $\overline{\kappa}'$.

C) Soient $z \in S$, $f \in C$ et $\overline{f} \in \overline{C}$. Si fz et $\overline{f}z$ sont définis, les composés $\overline{f}(fz)$ et

$f(\overline{f}z)$ sont définis et on a : $f(\overline{f}z) = \overline{f}(fz)$.

DEFINITION. *Si les conditions A, B et C sont vérifiées, on dira que* $(C^{\cdot}, \overline{C}^{\perp})$ *est un* couple de catégories d'opérateurs sur S_o relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$.

Les catégories $C^{\cdot}$ et $\overline{C}^{\perp}$ jouent des rôles équivalents dans la définition précédente.

Soit $(C^{\cdot}, \overline{C}^{\perp})$ un couple de catégories d'opérateurs sur une classe Σ relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$. Soit H la classe somme de C, de $\overline{C}$ et de Σ.

PROPOSITION. *$H^{\cdot}$ est une catégorie admettant $C^{\cdot}$ et la catégorie duale de $\overline{C}^{\perp}$ pour sous-catégories pleines, la loi de composition étant définie par*

$$\begin{cases} (f', f) \to f'.f & \text{si} \quad (f', f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} \\ (\overline{f}', \overline{f}) \to \overline{f}.\overline{f}' & \text{si} \quad (\overline{f}, \overline{f}') \in \overline{C}^{\perp} * \overline{C}^{\perp} \\ (z, \overline{f}) \to \overline{f}z & \text{si} \quad (\overline{f}, z) \in \overline{C}^{\perp} * \Sigma \\ (f, z) \to fz & \text{si} \quad (f, z) \in C^{\cdot} * \Sigma \end{cases}$$

EXEMPLE. Soit $[C^{\cdot}, S_o, \kappa']$ une espèce de structures et soit $\overline{C}^{\perp}$ la catégorie ayant pour seul élément une unité $a \notin C$. Alors $(C^{\cdot}, a)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur S_o relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$, où :

$$\overline{\kappa}'(a, z) = z \qquad \text{pour tout } z \in S_o.$$

La classe H est la classe somme de C, de S_o et de a. Dans la catégorie $H^{\cdot}$ correspondante, tout élément $z \in S_o$ admet a pour unité à droite.

Soit $K^{\cdot}$ une catégorie; soient $(K^{\cdot}, p, C^{\cdot})$ et $(K^{\cdot}, \overline{p}, \overline{C}^{\perp})$ deux foncteurs. Soit Σ la classe des triplets $(e, k, \overline{e})$ tels que :

$$e \in C_o^{\cdot}, \quad \overline{e} \in \overline{C}_o^{\perp}, \quad k \in K, \quad \beta(k) = p(e) \quad \text{et} \quad \alpha(k) = \overline{p}(\overline{e}).$$

$C^{\cdot}$ opère sur Σ relativement à la loi de composition κ' :

$$(f, (e, k, \overline{e})) \to (\beta(f), p(f).k, \overline{e}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(f) = e.$$

La catégorie duale $(\overline{C}^{\perp})^*$ de $\overline{C}^{\perp}$ opère sur Σ relativement à $\overline{\kappa}'$:

$$(\overline{f}, (e, k, \overline{e})) \to (e, k.\overline{p}(\overline{f}), \alpha(\overline{f})) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \overline{e} = \beta(\overline{f}).$$

PROPOSITION. *$(C^{\cdot}, (\overline{C}^{\perp})^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur Σ relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$; soit $H^{\cdot}$ la catégorie correspondante; il existe un foncteur $(K^{\cdot}, \tilde{p}, H^{\cdot})$ admettant p et $\overline{p}$ pour restrictions.*

Nous aurons en particulier à utiliser la construction précédente dans le cas où $\overline{C}^{\perp}$ est une sous-catégorie de $K^{\cdot}$ et $\overline{p} = \iota$.

CATEGORIES DOMINEES.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie; pour tout couple (e', e) d'unités de $C^{\cdot}$, nous désignons par $Hom(e', e)$ la classe des $h \in C$ tels que $\alpha(h) = e$ et $\beta(h) = e'$. Soit $\Gamma^{\cdot}$ la sous-catégorie de la catégorie produit $C^{\cdot} \times C^{*}$ formée des couples $(f', f) \in C \times C$ tels que $Hom(\alpha(f'), \beta(f)) \neq \emptyset$. Cette catégorie est une catégorie d'opérateurs sur la classe C relativement à la loi de composition $\kappa'(C^{\cdot})$:

$$((f', f), h) \to f'.h.f$$

si, et seulement si, $(h, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(f', h) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$.

Soit $\eta(C^{\cdot}) = (\Gamma^{\cdot}, C, \kappa'(C^{\cdot}))$ l'espèce de structures ainsi définie. Le couple définissant $\eta(C^{\cdot})$ est le couple $(C^{\cdot} \times C^{*}, Hom)$, où Hom est le foncteur de $\Gamma^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$ tel que $Hom(f', f)$ soit l'application : $h \to f'.h.f$ de $Hom(\alpha(f'), \beta(f))$ dans $Hom(\beta(f'), \alpha(f))$, pour tout $(f', f) \in \Gamma$.

DEFINITION. *Si $(\eta(C^{\cdot}), F)$ est une catégorie dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$, où $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L}) \in \mathfrak{F}$, on dira que $(C^{\cdot}, F)$ est une* catégorie dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$.

EXEMPLE. Une catégorie préadditive [8] est une catégorie dominée dans $(p_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{G})$, où $\mathfrak{G}$ est la catégorie des homomorphismes entre groupes abéliens et $p_{\mathfrak{G}}$ la restriction de $p_{\mathfrak{F}}$ à $\mathfrak{G}$.

CONSTRUCTION D'ESPECES DE STRUCTURES DOMINEES A PARTIR DE (η, F).

1) Soit $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, \mathcal{H}_{\gamma})$ une catégorie d'homomorphismes; soit $(\mathfrak{M}, q\ \overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$ le foncteur tel que $\overline{\mathcal{H}}$ soit la catégorie des foncteurs $\mathcal{H}$-structurés et $\overline{q}$ sa projection canonique dans $\mathcal{H}$ (voir [1]). Soit (η, F) l'espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ considérée au début, (μ, G) l'espèce de morphismes correspondante. Supposons que $(\mu, \tilde{G})$ soit une espèce de structures dominée dans $(\overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$ telle que $G = \overline{q}\ \tilde{G}$ et que (η, H) soit une espèce de structures dominée dans $(q, \mathcal{H})$. Supposons de plus que $\tilde{H}(e) = (\tilde{G}(e), \overline{\pi}'_e, H(e))$, où $\overline{\pi}'_e$ est la restriction de $\overline{\pi}'$ à $\overset{-1}{\pi}'(e) = p\ \ F(e) = q\ \ H(e)$, soit une $\mathcal{H}$-espèce de structures (voir [4c]), pour tout $e \in (C_1)^{\cdot}_0$ et que, pour tout $f \in C_1$,

$$\tilde{H}(f) = (\tilde{H}(e'), (G(f), \varphi_0(f)), \tilde{H}(e))$$

soit une application $\mathcal{H}$-covariante [4c], où $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Ceci signifie que $(\eta, \tilde{H})$ est une espèce de structures dominée dans $(p\ \ p_{\mathcal{H}}, \mathfrak{A}(\mathcal{H}))$ où $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ est la catégorie des applications $\mathcal{H}$-covariantes [4c] et $p_{\mathcal{H}}$ sa projection canonique dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$.

EXEMPLE. Si on prend pour $\mathcal{H}$ la catégorie des applications continues entre espaces topologiques (resp. des applications r fois différentiables entre variétés r fois différentiables), on obtient une situation qui généralise celle des espaces fibrés topologiques (resp. différentiables), et que nous préciserons plus loin.

2) Soit (η, F) l'espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ déjà considérée. Soit $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L})$ un foncteur. Supposons que, pour tout $e \in (C_1)^{\cdot}_o$, $(F(e), N_e)$ soit une espèce de structures dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ et que, pour tout $f \in C_1$, $((F(e'), N_{e'}), F(f), (F(e), N_e))$ soit une application covariante $\tilde{F}(f)$ entre espèces de structures dominées dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ (voir [3], p. 16). Ceci signifie que $(\eta, \tilde{F})$ est une espèce de structures dominée dans $(p\,\overline{\lambda}, \mathfrak{A}'(\lambda, \mathfrak{L}))$, où $\mathfrak{A}'(\lambda, \mathfrak{L})$ est la catégorie des applications covariantes entre espèces de structures dominées dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ et $\overline{\lambda}$ sa projection canonique dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ (voir [3]).

EXEMPLE. On peut prendre pour $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L})$ le foncteur $(\mathfrak{M}, p\mathfrak{J}, \mathfrak{F})$; ce cas intervient en théorie de la cohomologie sur les catégories; la notion de faisceau de groupes admettant un faisceau de groupes d'opérateurs [6] en est un cas particulier. D'autres cas particuliers ont été utilisés dans des constructions d'Analyse ou de Géométrie différentielle.

2. Surjections et projections.

Soit $C^\cdot$ une catégorie. Nous désignerons par $R_g(C^\cdot)$ (resp. $R_d(C^\cdot)$) la sous-catégorie de $C^\cdot$ formée des monomorphismes (resp. épimorphismes) de $C^\cdot$, par $R(C^\cdot)$ la sous-catégorie $R_g(C^\cdot) \cap R_d(C^\cdot)$ dont les éléments sont les éléments réguliers de $C^\cdot$.

Les conditions $f \in C$, $f' \in R_g(C^\cdot)$ et $f' = f.g$ entraînent $g \in R_g(C^\cdot)$.

Soit $(\hat{C}^\cdot, p, C^\cdot)$ un foncteur et soit $\hat{C}'$ une sous-classe de $\hat{C}$. Nous désignerons *) par $C^\cdot(\hat{C}', p)_{\llcorner}$ et $C^\cdot(\hat{C}', p)_{\lrcorner}$ les classes des $(\hat{C}', p)$-injections et $(\hat{C}', p)$-surjections respectivement, qui sont des catégories [2] si $\hat{C}^\cdot$ est une sous-catégorie de $\hat{C}$. Si $h \in C$ et si h' est un $(\hat{C}', p)$-sous-morphisme (resp. $(\hat{C}', p)$-morphisme quotient) de h, nous poserons *)

$$h' \xrightarrow[(\hat{C}', p)]{} h \quad (\text{resp. } h' \xrightarrow{(\hat{C}', p)} h).$$

PROPOSITION. *Si* $j \in C^\cdot(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$ *et si* $p(j) \in R_d(\hat{C}^\cdot)$ *(resp.* $\in \hat{C}^\cdot_\gamma$*), on a* $j \in R_d(C^\cdot)$ *(resp.* $\in C^\cdot_\gamma$*). Si* f *admet un inverse à gauche dans* $C^\cdot$ *et si* $p(f) \in R_d(\hat{C}^\cdot)$*,* f *est une* $(\hat{C}, p)$*-surjection faible. Si* f *admet un inverse à droite dans* $C^\cdot$ *et si* $(\hat{C}^\cdot, p, C^\cdot)$ *est un foncteur fidèle,* $f \in C^\cdot(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$.

PROPOSITION. *Soient* $f' \in C$ *et* $f \in R_d(C^\cdot)$*. Si* $f'.f$ *est une* $(\hat{C}, p)$*-surjection (resp. surjection faible), alors* f' *est une* $(\hat{C}, p)$*-surjection (resp. surjection faible).*

COROLLAIRE. *Soient* $j \in C^\cdot(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$, $j_1 \in C^\cdot(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$ *et* $(j_1, f, j, h) \in \square C^\cdot$*. Si* $h \in R_d(C^\cdot)$*, on a :* $j_1 \xrightarrow{(\hat{C}, p)} h$.

---

*) Ces notations diffèrent de celles de [3] où $C^\cdot(\hat{C}', p)_{\llcorner}$ et $C^\cdot(\hat{C}', p)_{\lrcorner}$ sont représentés par $C^{\cdot s}(\hat{C}', p)$ et $C^{\cdot i}(\hat{C}', p)$ et où les symboles $\lrcorner$ et $\ulcorner$ sont resp. notés $\prec$ et $\subseteq$.

THEOREME. *Soient* $h \in C$ *et* $h' \in C$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) h' *est un* $(\hat{C}, p)$*-morphisme quotient de* h.
2) Il existe des $(\square \hat{C}, \square p)$*-surjections* $(\beta(j), j, j, \alpha(j))$ *et* (h', j_1, j, h).

PROPOSITION. *Soit* $C_1^{\bullet}$ *une sous-catégorie de* $C^{\bullet}$. *Si* $j_1 \in C_1 \cap C^{\bullet}(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$, *on a* $j \in C_1^{\bullet}(\hat{C}, p\iota)_{\lrcorner}$ *si, et seulement si, les conditions* $g \in C$ *et* $g . j_1 \in C_1$ *entraînent* $g \in C_1$.

Soit $C_1^{\bullet}$ une sous-catégorie de $C^{\bullet}$ et $\hat{C}^{\bullet}$ une sous-catégorie de $\hat{C}^{\bullet}$ contenant $p(s)$ pour tout $s \in (C_1^{\bullet})_0$.

DEFINITION. *On dira que* $C_1^{\bullet}$ vérifie la condition (σ) *(resp.* (σ^*)*)* relativement à $(\hat{C}', p)$ *si les conditions* $j \in C^{\bullet}(\hat{C}', p)_{\lrcorner}$ *(resp.* $j \in C^{\bullet}(\hat{C}', p)_{\ulcorner}$*)*, $\alpha(j) \in C_1$ *et* $\beta(j) \in C_1$ *entraînent* $j \in C_1^{\bullet}(\hat{C}', p\iota)_{\lrcorner}$ *(resp.* $j \in C_1^{\bullet}(\hat{C}', p\iota)_{\ulcorner}$ *)*.

Une sous-catégorie pleine de $C^{\bullet}$ vérifie la condition (σ) relativement à $(\hat{C}', p)$.

PROPOSITION. *Pour que* $C_1^{\bullet}$ *vérifie la condition* (σ) *relativement à* $(\hat{C}', p)$ *il faut et il suffit que les conditions :*

$$h' \xrightarrow{(\hat{C}', p)} h, \quad h \in C_1, \quad \alpha(h') \in C_1 \quad \text{et} \quad \beta(h') \in C_1$$

entraînent $h' \in C_1$.

PROJECTIONS ET INJECTIONS.

Soit $H^{\bullet}$ une catégorie, $C^{\bullet}$ et $\overline{C}^{\bullet}$ deux sous-catégories pleines de $H^{\bullet}$. Supposons que H soit la somme de C, de $\overline{C}$ et d'une sous-classe Σ de H telle que, pour tout $f \in \Sigma$, on ait $\alpha(f) \in \overline{C}$ et $\beta(f) \in C$. Cette situation se présente par exemple si $H^{\bullet}$ est la catégorie associée (voir paragraphe 1) à un couple $(C^{\bullet}, \overline{C}^{\perp})$ de catégorie d'opérateurs sur Σ. Remarquons que la donnée de $H^{\bullet}$ et de C détermine entièrement Σ et $\overline{C}$.

Soit Θ la catégorie ayant 3 éléments distincts z, $\alpha(z) = \overline{e}$ et $\beta(z) = e$. Il existe un foncteur $(\Theta, Z, H^{\bullet})$ tel que $\overset{-1}{Z}(e) = C$, à savoir le foncteur défini par :

$$g \to e \quad \text{si} \quad g \in C, \quad \overline{g} \to \overline{e} \quad \text{si} \quad \overline{g} \in \overline{C} \quad \text{et} \quad f \to z \quad \text{si} \quad f \in \Sigma .$$

DEFINITION. *On dira que* $j \in H$ *est un* $(C, H^{\bullet})$-projecteur *si* j *est une* (Θ, Z)*-surjection telle que* $Z(j) \neq \overline{e}$. *Si* $h' \in C$ *est un* (Θ, Z)*-morphisme quotient de* $h \in H$, *on dira que* h' *est une* $(C, H^{\bullet})$-projection *de* h.

Tout $(C, H^{\bullet})$-projecteur est un épimorphisme puisque z est un épimorphisme de Θ.

PROPOSITION. *Pour que* $j \in H$ *soit un* $(C, H^{\bullet})$*-projecteur, il faut et il suffit que* $j \in C_{\gamma}^{\bullet}$ *ou que les conditions* $g \in \Sigma$ *et* $\alpha(g) = \alpha(j)$ *assurent l'existence d'un et d'un seul* $g' \in \Sigma$ *tel que* $g' . j = g$.

Soit $K^\cdot$ une catégorie et soit $C^\cdot$ une sous-catégorie pleine de $K^\cdot$. Soit $\overline{C}^\cdot$ la sous-catégorie pleine de $K^\cdot$ ayant pour unités les $s \in K_o^\cdot$ tels que $s \notin C_o^\cdot$. Appliquons la construction du § 1 aux foncteurs $(K^\cdot, \iota, C^\cdot)$ et $(K^\cdot, \iota, \overline{C}^\cdot)$ et identifions la classe Σ des triplets $(s, k, \overline{s})$ tels que $k \in K$, $\overline{s} = \alpha(k) \in \overline{C}$ et $s = \beta(k) \in C$ à la sous-classe de K formée des morphismes k pour lesquels $\alpha(k) \in \overline{C}$ et $\beta(k) \in C$. Soit $H^\cdot$ la catégorie construite au § 1 qui s'identifie à la sous-catégorie de $K^\cdot$ réunion de C, de $\overline{C}$ et de Σ.

DEFINITION. *On dira que $j \in K$ est un $(C, K^\cdot)$-*projecteur *si j est un $(C, H^\cdot)$-projecteur. On dira que $h' \in C$ est une $(C, K^\cdot)$-*projection *de $h \in K$ s'il existe un quatuor $(h', j', j, h) \in \square K^\cdot$ tel que j et j' soient des $(C, K^\cdot)$-projecteurs; dans ce cas, on posera : $h' \xrightarrow{(C, K^\cdot)} h$.*

Cette définition, qui est donnée dans [3], coïncide avec la définition précédente lorsque $K = H$. Nous allons énoncer ici des propriétés des $(C, K^\cdot)$-projecteurs non indiquées dans [3].

PROPOSITION. *Pour que $j \in K$ soit un $(K, K^\cdot)$-projecteur, il faut et il suffit que j soit inversible dans $K^\cdot$.*

REMARQUE. Plus généralement la construction précédente s'applique même si $C^\cdot$ n'est pas une sous-catégorie pleine de $K^\cdot$; alors un $(C, K^\cdot)$-projecteur est soit un élément de $C_\gamma^\cdot$ soit un $j \in K$ tel que $\alpha(j) \notin C$ et que les conditions $g \in K$, $\alpha(g) = \alpha(j) \notin C_o^\cdot$ et $\beta(g) \in C_o^\cdot$ assurent l'existence et l'unicité de $g' \in C$ vérifiant $g = g' . j$.

PROPOSITION. *Soient $h \in K$, et j et j' deux $(C, K^\cdot)$-projecteurs tels que $\alpha(h) = \alpha(j)$ et $\beta(h) = \alpha(j')$. Il existe un et un seul $h' \xrightarrow{(C, K^\cdot)} h$ tel que $(h', j', j, h) \in \square K^\cdot$.*

PROPOSITION. *Si j est un $(C, K^\cdot)$-projecteur, alors $j . g$ est un $(C, K^\cdot)$-projecteur, pour tout $g \in K_\gamma^\cdot$.*

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) (h', j', j, h) et $(\beta(j), j, j, \alpha(j))$ sont des $(\square C^\cdot, \square K^\cdot)$-projecteurs.

2) h' est une $(C, K^\cdot)$-projection de h et $(h', j', j, h) \in \square K^\cdot$, où j et j' sont des $(C, K^\cdot)$-projecteurs.

PROPOSITION. *Si $h \in K$, $h' \xrightarrow{(C, K^\cdot)} h$ et $h'' \xrightarrow{(C, K^\cdot)} h$, il existe un et un seul quatuor $(h', \gamma', \gamma, h) \in \square C^\cdot$ tel que $\gamma \in C_\gamma^\cdot$ et $\gamma' \in C_\gamma^\cdot$.*

CATEGORIES A C-PROJECTIONS.

DEFINITION. *On dira que $K^\cdot$ est une* catégorie à C-projections *(resp. à C-*éjections*) si $C^\cdot$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $K^\cdot$ et si, pour tout $e \in K_o^\cdot$, il existe un $(C, K^\cdot)$-projecteur j tel que $\alpha(j) = e$ (resp. un $(K^\cdot, C)$-éjecteur j tel que $\beta(j) = e$).*

Soit $K^{\cdot}$ une catégorie à C-projections. Soit $U(C, K^{\cdot})$ la sous-catégorie de $\boxminus K^{\cdot}$ formée des quatuors (h', j', j, h) tels que $h' \in C$ et que j et j' soient des $(C, K^{\cdot})$-projecteurs.

PROPOSITION. *$\overline{\psi} = (K^{\cdot}, \psi, U(C, K^{\cdot}))$, où $\psi(h', j', j, h) = h$, est un foncteur définissant $K^{\cdot}$ comme catégorie quotient strict de $U(C, K^{\cdot})$ (voir [2]).*

Soit ρ_ψ la relation d'équivalence sur $U(C, K^{\cdot})$ associée à ψ, qui est définie par :

$$(h'', \overline{j}', \overline{j}, h) \sim (h', j', j, h).$$

Soit P l'équivalence de $K^{\cdot}$ sur la catégorie quotient strict $U(C, K^{\cdot})/\rho_\psi$ de $U(C, K^{\cdot})$ par ρ_ψ, définie par :

$$h \to (h', j', j, h) \bmod \rho_\psi .$$

THEOREME. *Supposons que $C^{\cdot}$ vérifie la condition :*
(0) Tout trio (g, g, f) de $C^{\cdot}$, où $f \in C^{\cdot}_\gamma$, est contenu dans un quatuor de $(C^{\cdot}; C, C^{\cdot}_\gamma)$.
Pour tout $h \in K$, représentons par $\sigma(h)$ la classe des $(C, K^{\cdot})$-projections de h. Alors $C^{\cdot}$ admet une catégorie quotient strict $\hat{C}^{\cdot}$ par la relation d'équivalence $g \sim g'$ si $\sigma(g) = \sigma(g')$, dont les unités sont les saturantes[1] des unités de $C^{\cdot}$ dans $C^{\cdot}$; de plus $(\hat{C}^{\cdot}, \sigma, K^{\cdot})$ est une $p\mathcal{F}$-surjection définissant $\hat{C}^{\cdot}$ comme catégorie quotient strict de $K^{\cdot}$.

PROPOSITION. *Un foncteur section Π de $\overline{\psi}$ est une équivalence de $K^{\cdot}$ sur une sous-catégorie de $U(C, K^{\cdot})$; tout autre foncteur section Π_1 de $\overline{\psi}$ se déduit de Π par une équivalence naturelle. Soit π l'application de K dans K telle que $(\pi(e))^{\boxminus} = \alpha^{\boxminus}(\Pi(e))$,[2] pour tout $e \in K^{\cdot}_0$; alors $(\beta^{\boxdot}\Pi, \pi)$ est un foncteur naturalisé.*

PROPOSITION. *Soit π une application de $K^{\cdot}_0$ dans la classe des $(C, K^{\cdot})$-projecteurs telle que $\alpha(\pi(e)) = e$ pour tout $e \in K^{\cdot}_0$. Il existe un foncteur naturalisé $(\overline{\pi}, \pi)$ tel que $\overline{\pi}(h) \underline{(C, K^{\cdot})} h$ pour tout $h \in K$ et l'application $h \to (\overline{\pi}(h), \pi(\beta(h)), \pi(\alpha(h)), h)$ définit un foncteur section de $\overline{\psi}$.*

DEFINITION. *Une application π de K dans la classe des $(C, K^{\cdot})$-projecteurs telle que $e = \alpha\pi(e)$ pour tout $e \in K^{\cdot}_0$ sera appelée $(C, K^{\cdot})$-*projection naturalisée; *le foncteur naturalisé $(\overline{\pi}, \pi)$ correspondant sera appelé* foncteur $(C, K^{\cdot})$-projection naturalisé associé à π.

---

1) Dans une catégorie $C^{\cdot}$ on appelle saturante d'une sous-classe B de C la catégorie engendrée dans $C^{\cdot}$ par la classe

$$C^{\cdot}_\gamma . B \cup B . C^{\cdot}_\gamma$$

2) Si $f \in K$, on pose $f^{\boxminus} = (\beta(f), f, f, \alpha(f))$ et $f^{\boxdot} = (f, \beta(f), \alpha(f), f)$.

IMAGE D'UNE PROJECTION PAR UN FONCTEUR.

Soient $K^{\cdot}$ et $\hat{K}^{\cdot}$ deux catégories, $C^{\cdot}$ et $\hat{C}^{\cdot}$ des sous-catégories pleines de $K^{\cdot}$ et $\hat{K}^{\cdot}$ respectivement. Soient $P(C, K^{\cdot})$ et $P(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$ les classes des $(C, K^{\cdot})$ projecteurs et des $(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$-projecteurs, $E(K^{\cdot}, C)$ et $E(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$ les classes des $(K^{\cdot}, C)$-éjecteurs et des $(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$-éjecteurs.

Soit $\bar{p} = (\hat{K}^{\cdot}, p, K^{\cdot})$ un foncteur tel que $p(C) \subset \hat{C}$; soit p_{γ} la restriction de p à $C^{\cdot}_{\gamma}$.

PROPOSITION. *Soient j et j' deux $(C, K^{\cdot})$-projecteurs tels que $\alpha(j) = \alpha(j')$ et $p(j) = p(j')$. Si $(\hat{C}^{\cdot}_{\gamma}, p_{\gamma}, C^{\cdot}_{\gamma})$ est de plus un foncteur bien fidèle *) et si $p(j)$ est un épimorphisme de $\hat{K}^{\cdot}$, on a $j = j'$.*

PROPOSITION. *Si $f \in K$ est une $(\hat{K}, p)$-surjection telle que $\beta(f) \in C$ et $p(f) \in P(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$, on a $f \in P(C, K^{\cdot})$. Si $\overset{-1}{p}(\hat{C}) = C$ et si les conditions $\hat{k} \in \hat{K}$ et $\alpha(\hat{k}) \in \hat{C}$ entraînent $\beta(\hat{k}) \in \hat{C}$, les relations $j \in P(C, K^{\cdot})$ et $p(j) \in R_d(\hat{K}^{\cdot})$ assurent que j est une $(\hat{K}, p)$-surjection.*

DEFINITION. *On dira que $\bar{p}$ est* un foncteur $(\hat{C}, C)$-compatible avec les projections *(resp.* les éjections*) si $p(P(C, K^{\cdot})) \subset P(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$ (resp. si $p(E(K^{\cdot}, C)) \subset E(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$).*

PROPOSITION. *Soit p un foncteur $(\hat{C}, C)$-compatible avec les projections; si h' est une $(C, K^{\cdot})$-projection de $h \in K$, on a $p(h') \xrightarrow{(C, K^{\cdot})} p(h)$.*

Supposons que $\hat{K}^{\cdot}$ soit une catégorie à $\hat{C}$-projections (resp. $\hat{C}$-éjections). Soit $\hat{\pi}$ une $(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$-projection (resp. $(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$-éjection) naturalisée et $(\hat{\Pi}, \hat{\pi})$ le foncteur naturalisé associé à $\hat{\pi}$.

DEFINITION. *On dira que π est une $(C, K^{\cdot})$-* projection *(resp. $(K^{\cdot}, C)$-* éjection*)* naturalisée appliquée par $\bar{p}$ sur $\hat{\pi}$ *si π est une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée telle que $p\pi = \hat{\pi} p_0$. On dira que $\bar{p}$ est* compatible avec *$(\hat{\pi}, C)$ s'il existe une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée π appliquée par p sur $\hat{\pi}$.*

Si on suppose le foncteur $(\hat{C}^{\cdot}_{\gamma}, p_{\gamma}, C^{\cdot}_{\gamma})$ bien fidèle, il existe au plus une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée appliquée par $\bar{p}$ sur $\hat{\pi}$.

PROPOSITION. *Si π est une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée appliquée par $\bar{p}$ sur $\hat{\pi}$ et si (Π, π) est le foncteur naturalisé associé à π, on a :*

$$\bar{p} . \Pi = \hat{\Pi} . \bar{p} .$$

PROPOSITION. *Si $\bar{p}$ est compatible avec $(\hat{\pi}, C)$, alors $\bar{p}$ est un foncteur $(\hat{C}, C)$-compatible avec les projections (resp. les éjections).*

---

*) Un foncteur $(\hat{K}^{\cdot}, q, K^{\cdot})$ est ***bien fidèle*** si les conditions : $k_i \in K$, $\alpha(k_1) = \alpha(k_2)$ et $q(k_1) = q(k_2)$ entraînent $k_1 = k_2$.

3. Applications des projections : Produits et produits fibrés .

PRODUIT DANS UNE CATEGORIE.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. Soit $\mathcal{I}$ une classe de classes (qui peut être réduite à un seul élément I). Soit $\mathcal{I}(C^{\cdot})$ la catégorie dont les éléments sont les familles $(f_i)_{i \in I}$, où $f_i \in C$ et $I \in \mathcal{I}$, munie de la loi de composition suivante :

$$((f'_j)_{j \in J}, (f_i)_{i \in I}) = (f'_i \cdot f_i)_{i \in I}$$

si, et seulement si, $J = I$ et $(f'_i, f_i) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ pour tout $i \in I$.

En particulier si $\mathcal{I}$ admet I pour seul élément, $\mathcal{I}(C^{\cdot})$ est la catégorie produit $C^{\cdot I}$; dans le cas général, $\mathcal{I}(C^{\cdot})$ est la catégorie somme des catégories $C^{\cdot I}$, où $I \in \mathcal{I}$.

Soit $\Sigma(\mathcal{I})$ la classe des couples $((f_i)_{i \in I}, e)$ tels que $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{I}(C^{\cdot})$ et $\alpha(f_i) = e$ pour tout $i \in I$. C^* opère sur $\Sigma(\mathcal{I})$ relativement à la loi de composition κ'_1 :

$$(g, ((f_i)_{i \in I}, e)) \to ((f_i \cdot g)_{i \in I}, \alpha(g)) \text{ si, et seulement si, } e = \beta(g).$$

$\mathcal{I}(C^{\cdot})$ opère sur $\Sigma(\mathcal{I})$ relativement à la loi de composition κ' :

$$((g_j)_{j \in J}, ((f_i)_{i \in I}, e)) \to ((g_i \cdot f_i)_{i \in I}, e)$$

si, et seulement si, $I = J$ et $(g_i, f_i) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ pour tout $i \in I$.

De plus $(\mathcal{I}(C^{\cdot}), C^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\Sigma(\mathcal{I})$ relativement à (κ', κ'_1). Soit $H^{\cdot}(\mathcal{I})$ la catégorie correspondante (§ 1) dont $\mathcal{I}(C^{\cdot})$ et $C^{\cdot}$ sont des sous-catégories pleines.

DEFINITION. *Un $(H^{\cdot}(\mathcal{I}), C)$-éjecteur $((f_i)_{i \in I}, e)$ est appelé* $\mathcal{I}$-produit naturalisé*) *dans* $C^{\cdot}$; *une $(H^{\cdot}(\mathcal{I}), C)$-éjection de $(h_i)_{i \in I}$ est appelée* $\mathcal{I}$-produit dans $C^{\cdot}$ *de $(h_i)_{i \in I}$. On dit que $C^{\cdot}$ est* une catégorie à $\mathcal{I}$-produits *si $H^{\cdot}(\mathcal{I})$ est une catégorie à C-éjections; une application (resp. un foncteur) $(H^{\cdot}(\mathcal{I}), C)$-éjection naturalisée est appelé* application *(resp.* foncteur*)* $\mathcal{I}$-produit.

Si $\mathcal{I}$ est la classe de tous les ensembles finis, non vides, d'entiers, une catégorie à $\mathcal{I}$-produits sera appelée *catégorie à produits finis.*

PROPOSITION. *Si $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$, $((f_i)_{i \in I}, e)$ est un $\mathcal{I}'$-produit dans $C^{\cdot}$ si, et seulement si, c'est un $\mathcal{I}$-produit dans $C^{\cdot}$ tel que $I \in \mathcal{I}'$.*

Nous supposerons que toutes les classes I d'indices considérées appartiennent à une même classe $\mathfrak{M}_o$ de classes, qui contient avec une classe toute ses sous-classes et qui admet pour élément tout ensemble fini d'entiers; ainsi $\mathcal{I}$ désignera une sous-classe de $\mathfrak{M}_o$. Nous désignerons par $P(C^{\cdot})$ la classe de tous les $\mathfrak{M}_o$-produits. En vertu de la proposition précédente, on peut dire produit au lieu de $\mathcal{I}$-produit, ou de

*) La notion de produit naturalisé dans $C^{\cdot}$ est équivalente à celle de produit dans $C^{\cdot}$ au sens de [7], texte auquel nous renvoyons pour d'autres propriétés du produit.

$\mathfrak{M}_o$ - produit.

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) h est un produit de $(h_i)_{i \in I}$ dans $C^\cdot$.

2) Il existe $((h_i, f'_i, f_i, h)_{i \in I}, h^{\square\square}) \in P(\square C^\cdot)$ et $((f'_i{}^{\boxminus})_{i \in I}, \beta(h)^{\square\square}) \in P(\square\square C^\cdot)$.

COROLLAIRE. *Si h' et h sont deux produits de $(h_i)_{i \in I}$ dans $C^\cdot$, il existe $\gamma \in C^\cdot_\gamma$ et $\gamma' \in C^\cdot_\gamma$ tels que $h' . \gamma = \gamma' . h$.*

Soit $C^\cdot$ une catégorie à $\mathcal{J}$-produits. Soit (Π, π) un foncteur $\mathcal{J}$-produit naturalisé. On posera :

$$\Pi((h_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} h_i \quad \text{ou} \quad \Pi((h_i)_{i \leq n}) = h_1 \times \ldots \times h_n .$$

Soit $e_i \in C^\cdot_o$ pour tout $i \in I$ et $\pi((e_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, e)$; on appellera p_i la *projection canonique* de $\prod_{i \in I} e_i$ sur e_i. Si $g_i \in C$, $\alpha(g_i) = e'$ et $\beta(g_i) = e_i$ pour tout $i \in I$, nous représenterons par $[g_i]_{i \in I}$ (ou $[g_1, \ldots, g_n]$ si I est fini) l'unique élément de C tel que :

$$p_i . [g_i]_{i \in I} = g_i \text{ pour tout } i \in I .$$

Soit $(\hat{C}^\cdot, p, C^\cdot) = \overline{p}$ un foncteur; soit p_γ la restriction de p à $C^\cdot_\gamma$. $\overline{p}$ s'étend en un foncteur $\mathcal{J}(\overline{p})$ de $H^\cdot(\mathcal{J})$ vers $\hat{H}^\cdot(\mathcal{J})$ en posant :

$$\mathcal{J}(\overline{p})((h_i)_{i \in I}) = (p(h_i))_{i \in I}, \qquad \text{où } h_i \in C,$$

$$\mathcal{J}(\overline{p})((f_i)_{i \in I}, e) = ((p(f_i))_{i \in I}, p(e)), \qquad \text{où } f_i \in C \text{ et } e = \alpha(f_i).$$

PROPOSITION. *Si $(\hat{C}^\cdot_\gamma, p_\gamma, C^\cdot_\gamma)$* ***est de plus un foncteur bien fidèle*** *les conditions $((f_i)_{i \in I}, e) \in P(C^\cdot)$, $((f'_i)_{i \in I}, e') \in P(C^\cdot)$, $\beta(f_i) = \beta(f'_i)$, $p(f_i) = p(f'_i)$ et $((p(f_i))_{i \in I}, p(e)) \in P(\hat{C}^\cdot)$ entraînent $e = e'$.*

DEFINITION. *On dira que $\overline{p}$ est* compatible avec les $\mathcal{J}$-produits *si on a $\mathcal{J}(\overline{p})(P(C^\cdot)) \subset P(\hat{C}^\cdot)$. Si $\hat{\pi}$ est une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé dans $\hat{C}^\cdot$, on dira que $\overline{p}$ est* $\hat{\pi}$-compatible *s'il existe une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé π dans $C^\cdot$ appliquée sur $\hat{\pi}$ par $\mathcal{J}(\overline{p})$.*

PROPOSITION. *Soit $(\hat{\Pi}, \hat{\pi})$ un foncteur $\mathcal{J}$-produit naturalisé dans $\hat{C}^\cdot$ et supposons que $\overline{p}$ est $\hat{\pi}$-compatible. Il existe un foncteur $\mathcal{J}$-produit naturalisé (Π, π) dans $C^\cdot$ tel que:*

$$p(\prod_{i \in I} h_i) = \prod_{i \in I} p(h_i) \qquad \text{si} \quad h_i \in C.$$

Si $g_i \in C$ et $\alpha(g_i) = e'$ pour tout $i \in I$, on a : $p([g_i]_{i \in I}) = [p(g_i)]_{i \in I}$.

PROPOSITION. *Si $C^\cdot$ et $\hat{C}^\cdot$ sont des catégories à produits finis et si $\overline{p}$ est compatible avec les $\{1, 2\}$-produits, alors $\overline{p}$ est compatible avec les produits finis.*

THEOREME. *Soit $\hat{\pi}$ une application produit fini naturalisé dans $C^\cdot$ et soit $\hat{\pi}_2$ sa* *restriction à* $\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_o \times \hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_o$. *Si* $\overline{p}$ *est* $\hat{\pi}_2$*-compatible et si* $(\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_\gamma, p_\gamma, C^{\boldsymbol{\cdot}}_\gamma)$ *est une catégorie d'hypermorphismes saturée, alors* $\overline{p}$ *est* $\hat{\pi}$*-compatible.*

Soit $(\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, p, C^{\boldsymbol{\cdot}})$ un foncteur fidèle (respectivement soit $(\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, p, C^{\boldsymbol{\cdot}}, C^{\boldsymbol{\cdot}}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes). Soit $\hat{\pi}$ une application produit fini naturalisé dans $\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$. Pour que $\overline{p}$ soit compatible avec les produits finis (resp. soit $\hat{\pi}$-compatible), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées, où $s_i \in C^{\boldsymbol{\cdot}}_o$, $i = 1, 2$ et $\hat{\pi}(p(s_1), p(s_2)) = ((\hat{p}_1, \hat{p}_2), \hat{e})$:

1) Il existe $s_1 \times s_2 \in C^{\boldsymbol{\cdot}}_o$ tel que $p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2)$;

2) Il existe $p_i \in C$ tels que $\alpha(p_i) = s_1 \times s_2$, $\beta(p_i) = s_i$ et $p(p_i) = \hat{p}_i$,

3) Si $g_i \in C$, $\alpha(g_i) = s'$ et $\beta(g_i) = s_i$, il existe $[g_1, g_2] \in C$ tel que :

$$\alpha([g_1, g_2]) = s', \ \beta([g_1, g_2]) = s_1 \times s_2 \ \text{ et } p([g_1, g_2]) = [p(g_1), p(g_2)].$$

PROPOSITION. *Soient* $C^{\boldsymbol{\cdot}}$ *et* $\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$ *des catégories à* $\{I\}$*-produits. Si* $\overline{p}$ *est compatible avec les* $\{I\}$*-produits et si on a* $j \in C^{\boldsymbol{\cdot}}(\hat{C}, p)$ *pour tout* $i \in I$, *tout produit de* $(j_i)_{i \in I}$ *est une* $(\hat{C}, p)$*-injection.*

CATEGORIE D'HOMOMORPHISMES A PRODUITS AU-DESSUS DE $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie pleine d'applications telle que $\mathcal{M}_o$ contienne avec une classe toutes ses parties, avec 2 classes leur produit. Soit (Π, π) le foncteur produit naturalisé dans $\mathcal{M}$ tel que :

$$\pi((M_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} M_i), \text{ où } p_i(x_i)_{i \in I} = x_i.$$

DEFINITION. *Soit* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$ *un foncteur et soit* $s_i \in \mathcal{H}_o$*; on dira que* $(s_i)_{i \in I}$ admet $((\overline{p}_i)_{i \in I}, S)$ pour produit dans $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$ *et on posera :* $S = \prod_{i \in I} s_i$, *si* $((\overline{p}_i)_{i \in I}, S)$ *est un produit naturalisé de* $(s_i)_{i \in I}$ *dans* $\mathcal{H}$ *tel que* $p(\overline{p}_i)$ *soit la projection canonique de* $\prod_{i \in I} p(s_i)$ *sur* $p(s_i)$.

Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes.

PROPOSITION. *Si* $s \in \mathcal{H}_o$, *si* $(s)_{i \in I}$ *admet un produit* $((\overline{p}_i)_{i \in I}, S)$ *dans* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$ *et s'il existe* $s_\delta \,\overline{\vert}_p\, S$ *tel que* $p(s_\delta)$ *soit la diagonale* Δ *de* $p(S)$, *il existe* $\overline{\delta} \in \mathcal{H}_\gamma$ *tel que* $\alpha(\overline{\delta}) = s$, $\beta(\overline{\delta}) = s_\delta$ *et :*

$$p(\overline{\delta}) = (\Delta, [p(s)]_{i \in I}, p(s)).$$

DEFINITION. *Soit* $s \in \mathcal{H}_o$*; si* $(s)_{i \in I}$ *admet un produit* $((\overline{p}_i)_{i \in I}, S)$ *dans* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$ *et s'il existe* $s_\delta \,\overline{\vert}_p\, S$ *tel que* $p(s_\delta)$ *soit la diagonale de* $p(S)$ *on dira que* s_δ *est* une structure diagonale de $(s)_{i \in I}$ *et on appellera l'élément* $\overline{\delta}$ *de* $\mathcal{H}_\gamma$, *dont l'existence est assurée par la proposition ci-dessus,* l'isomorphisme diagonal de $(s)_{i \in I}$.

PROPOSITION. *Supposons* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, .)$ *résolvante à droite (resp. saturée). Si* $(s)_{i \leq n}$ *admet* $((\overline{p}_i)_{i \leq n}, S)$ *pour produit dans* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$, *il existe une structure diagonale* s_δ *de* $(s)_{i \leq n}$.

PROPOSITION. *Soient* $s \in \mathcal{H}_o$ *et* $s' \in \mathcal{H}_o$. *Supposons que* $(s)_{i \in I}$ *et* $(s')_{i \in I}$ *admettent des produits* $((\overline{p}_i)_{i \in I}, S)$ *et* $((\overline{p}'_i)_{i \in I}, S')$ *dans* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$ *et des structures diagonales* s_δ *et* s'_δ *respectivement. On a :* $s \underset{p}{\prec} s'$ *si, et seulement si,* $S \underset{p}{\prec} S'$. *Soit* ρ *une relation d'équivalence sur* $p(s)$. *S'il existe* $j \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, p)$, *tel que* $\alpha(j) = S$, $\beta(j) = S'$ *et* $p(j) = \prod_{i \in I} \tilde{\rho}$, *alors* s' *est la* p*-structure quotient de* s *par* ρ [2].

DEFINITION. *On dira que la catégorie d'homomorphismes* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, .)$ *est* à produits finis *si* $\overline{p} = (\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$ *est un foncteur* π*-compatible; on munit toujours* $\mathcal{H}$ *du foncteur produit naturalisé* $(\overline{\Pi}, \overline{\pi})$ *tel que* $\overline{\pi}$ *soit appliqué sur* π *par* $\mathcal{J}(\overline{p})$.

Cette définition est équivalente à celle donnée dans [1], II.

PRODUITS FIBRES.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie et $\mathcal{J}$ une classe de classes. Soit $\mathcal{J}(\boxminus C^{\cdot})$ la catégorie des familles de $\boxminus C^{\cdot}$. Soit $Q(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ la sous-classe de $\mathcal{J}(\boxminus C^{\cdot})$ formée des familles $(q_i)_{i \in I}$ telles que $I \in \mathcal{J}$ et $\beta^{\square}(q_i) = \beta^{\square}(q_j)$ pour tout $i, j \in I$. Alors $Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{J}(\boxminus C^{\cdot})$ et nous identifierons sa classe des unités à la classe des familles $(f_i)_{i \in I}$ de C telles que $\beta(f_i) = e$ pour tout $i \in I$.

Soit $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ la classe des familles $(h_i, f_i)_{i \in I}$ telles que :

$$f_i \in C, \quad h_i \in C \quad \text{et} \quad h_i . f_i = h_j . f_j \text{ pour tout } i, j \in I.$$

$Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ opère sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition $\tilde{\kappa}'$:

$$((q_i)_{i \in I}, (h_i, f_i)_{i \in I}) \to (h'_i, k_i . f_i)_{i \in I}, \text{ si } q_i = (k', h'_i, h_i, k_i).$$

C^* opère sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition $\tilde{\kappa}'_1$:

$$(h, (h_i, f_i)_{i \in I}) \to (h_i, f_i . h)_{i \in I} \text{ si } \alpha(f_i) = \beta(h).$$

De plus $(Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J}), C^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ relativement à $(\tilde{\kappa}', \tilde{\kappa}'_1)$. Soit $\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ la catégorie correspondante, dont $Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ et $C^{\cdot}$ sont des sous-catégories pleines (§ 1).

DEFINITION. *Un* $(\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J}), C)$*-éjecteur* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *est appelé* un $\mathcal{J}$-produit fibré naturalisé de $(h_i)_{i \in I}$ dans $C^{\cdot}$. *Une* $(\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J}), C)$*-éjection de* $(q_i)_{i \in I}$ *est appelée* un $\mathcal{J}$-produit fibré de $(q_i)_{i \in I}$ *dans* $C^{\cdot}$. *Si* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *est un* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé dans* C^*, *on dira que* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *est* une $\mathcal{J}$- somme fibrée naturalisée dans $C^{\cdot}$.

PROPOSITION. *Si* $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$, *un* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *dans* $C^{\cdot}$ *tel que*

$I \in \mathcal{J}'$ est un $\mathcal{J}'$-produit fibré naturalisé dans $C^{\cdot}$; en particulier, c'est un $\{I\}$-produit fibré naturalisé dans $C^{\cdot}$.

Comme plus haut, nous supposerons que toutes les classes $\mathcal{J}$ sont des sous-classes de $\mathfrak{M}_o$. Nous désignerons par $V(C^{\cdot})$ la classe des $\mathfrak{M}_o$-produits fibrés naturalisés dans $C^{\cdot}$ et un élément de $V(C^{\cdot})$ sera simplement appelé produit fibré naturalisé.

PROPOSITION. *Pour que $((f_i)_{i \in I}, e)$ soit un produit naturalisé dans $C^{\cdot}$, il faut et il suffit que $((a, \beta(f_i)), f_i)_{i \in I}$ soit un produit fibré naturalisé dans la catégorie $\overline{C}^{\cdot}$ obtenue en ajoutant à $C^{\cdot}$ un $\emptyset$-produit $a \notin C$ (par la construction du § 1).*

PROPOSITION. *On a $(h, f) \in V(C^{\cdot})$ si, et seulement si $(h, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $f \in C^{\cdot}_{\gamma}$.*

PROPOSITION. *Supposons $q_i = (k', h'_i, h_i, k_i) \in \square C^{\cdot}$ pour tout $i \in I$ et $k_i \in R_g(C^{\cdot})$. Les conditions $(h'_i, k_i \cdot f_i)_{i \in I} \in V(C^{\cdot})$ et $h_i \cdot f_i = h_j \cdot f_j$ pour tout $i, j \in I$ entraînent $(h_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^{\cdot})$; en particulier si $q_i \in (\boxminus C^{\cdot})_{\gamma}$, on a $(h_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^{\cdot})$ si, et seulement si, $(h'_i, k_i \cdot f_i)_{i \in I} \in V(C^{\cdot})$.*

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) k est un produit fibré de $(q_i)_{i \in I}$ dans $C^{\cdot}$.
2) Il existe $(q_i, (k_i, f'_i, f_i, k))_{i \in I} \in V(\square\square C^{\cdot})$ et $(\beta^{\boxminus}(q_i), f'^{\boxminus}_i)_{i \in I} \in V(\square\square C^{\cdot})$.

THEOREME. *La classe $V'(C^{\cdot})$ des quatuors (h_2, h_1, f_2, f_1) tels que l'on ait $(h_i, f_i)_{i = 1,2} \in V(C^{\cdot})$ est une sous-catégorie saturée de $\square\square C^{\cdot}$.*

DEFINITION. *On dira que $C^{\cdot}$ est* une catégorie à $\mathcal{J}$-produits fibrés *si $\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ est une catégorie à C-éjections; une application (resp. un foncteur) $(\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J}), C)$-éjection naturalisée est appelé* application *(resp.* foncteur) $\mathcal{J}$-produit fibré naturalisé dans $C^{\cdot}$.

Si $\mathcal{J}$ est la classe de tous les ensembles finis d'entiers non vides, une catégorie à $\mathcal{J}$-produits fibrés sera appelée *catégorie à produits fibrés finis.*

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie à $\mathcal{J}$-produits fibrés; un foncteur $\mathcal{J}$-produit fibré naturalisé sera généralement désigné par (V, ν) et on posera :

$$V((q_i)_{i \in I}) = \bigvee_{i \in I} q_i \quad \text{ou} \quad V((q_i)_{i \leq n}) = q_1 \vee \ldots \vee q_n .$$

Soit $h_i \in C$ et $\beta(h_i) = \beta(h_j)$ pour tout $i, j \in I$. Si on a :

$$\nu((h_i)_{i \in I}) = (h_i, v_i)_{i \in I},$$

on appelle v_i la projection canonique de $\bigvee_{i \in I} h_i$ dans $\alpha(h_i)$ et on désigne souvent cette projection par $v_i(h_j)_{j \in I}$. Si $g_i \in C$ et $h_i \cdot g_i = h_j \cdot g_j$ pour tout $i, j \in I$, l'unique élément g de C tel que $f_i \cdot g = g_i$ sera noté $[h_i \mid g_i]_{i \in I}$.

Soit $(\hat{C}^{\cdot}, p, C^{\cdot}) = \overline{p}$ un foncteur; soit p_{γ} la restriction de p à $C^{\cdot}_{\gamma}$. $\overline{p}$ s'étend en un foncteur $\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})$ de $\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot},\mathcal{J})$ vers $\tilde{H}^{\cdot}(\hat{C}^{\cdot},\mathcal{J})$ en posant :

$$\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})((q_i)_{i\in I}) = (\square p(q_i))_{i\in I}, \qquad \text{si } (q_i)_{i\in I} \in Q^{\cdot}(C^{\cdot},\mathcal{J})$$

$$\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})((h_i,f_i)_{i\in I}) = (p(h_i),p(f_i))_{i\in I}, \qquad \text{si } (h_i,f_i)_{i\in I} \in \tilde{\Sigma}(\mathcal{J}).$$

PROPOSITION. *Si* $(\hat{C}^{\cdot}_{\gamma}, p_{\gamma}, C^{\cdot}_{\gamma})$ *est de plus un foncteur bien fidèle , les conditions* $(h_i,f_i)_{i\in I} \in V(C^{\cdot})$, $(h_i,f'_i)_{i\in I} \in V(C^{\cdot})$, $p(f_i) = p(f'_i)$ *pour tout* $i\in I$ *et* $(p(h_i),p(f_i))_{i\in I} \in V(\hat{C}^{\cdot})$ *entraînent* $f_i = f'_i$.

DEFINITION. *On dira que* $\overline{p}$ *est* compatible avec les $\mathcal{J}$-produits fibrés *si on a :* $\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})(V(C^{\cdot}))\subset V(\hat{C}^{\cdot})$. *Si* $\hat{\nu}$ *est une application* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisée dans* $\hat{C}^{\cdot}$, *on dira que* $\overline{p}$ *est* $\hat{\nu}$-compatible *s'il existe une application* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé* ν *dans* $C^{\cdot}$ *telle que* $\hat{\nu}\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})_o = \tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})\nu$, *et on dira que* ν *est* appliquée par $\overline{p}$ sur $\hat{\nu}$.

THEOREME. *Soit* $\hat{\nu}$ *une application* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé dans* $\hat{C}^{\cdot}$ *et soit* $\hat{\nu}_2$ *sa restriction à la classe des* $(\hat{h}_1,\hat{h}_2)\in\hat{C}\times\hat{C}$ *tels que* $\beta(\hat{h}_1)=\beta(\hat{h}_2)$. *Si* $\overline{p}$ *est* $\hat{\nu}_2$*-compatible et si* $(\hat{C}^{\cdot}_{\gamma}, p_{\gamma}, C^{\cdot}_{\gamma})$ *est une catégorie d'hypermorphismes saturée,* $\overline{p}$ *est* $\hat{\nu}$*-compatible.*

PROPOSITION. *Soient* $C^{\cdot}$ *et* $\hat{C}^{\cdot}$ *des catégories à* $\{I\}$*-produits et supposons* $\overline{p}$ *compatible avec les* $\{I\}$*-produits. Si on a* $q_i = (k', h'_i, h_i, k_i) \in \square C^{\cdot}$ *et si* k' *et* k_i *sont des* $(\hat{C}\ ,p)$*-injections pour tout* $i\in I$, *alors tout produit fibré de* $(q_i)_{i\in I}$ *est une* $(\hat{C}\ ,p)$*-injection.*

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie d'applications déjà considérée. Soient h_i des applications de M_i dans M, où i appartient à une classe finie I. Alors $(h_i)_{i\in I}$ admet pour produit fibré dans $\mathfrak{M}$ la sous-classe $\bigvee_{i\in I} M_i$ de $\prod_{i\in I} M_i$ ayant pour éléments les $(x_i)_{i\in I}$ tels que :

$$h_i(x_i) = h_j(x_j) \text{ pour tout } i,j\in I,$$

la projection canonique $\nu_i = \nu_i(h_i)_{i\in I}$ étant la restriction de p_i à $\bigvee_{i\in I} M_i$, où p_i est la projection canonique de $\prod_{i\in I} M_i$ sur M. Nous désignerons toujours par (V,ν) le foncteur produit fibré naturalisé tel que :

$$\nu((h_i)_{i\in I}) = (h_i,\nu_i)_{i\in I}.$$

DEFINITION. *Soit* $(\mathfrak{M},p,C^{\cdot})$ *un foncteur et soit* $h_i\in C$, $\beta(h_i)=\beta(h_j)$ *pour tout* $i,j\in I$. *On dira que* $(h_i,f_i)_{i\in I}$ *est* un produit fibré naturalisé dans $(\mathfrak{M},p,C^{\cdot})$ *si* $(h_i,f_i)_{i\in I}\in V(C^{\cdot})$ *et si* $p(f_i) = \nu_i(p(h_i))_{i\in I}$. *On dira qu'une catégorie d'homomorphismes* $(\mathfrak{M},p,C^{\cdot},C^{\cdot}_{\gamma})$ *est* à produits fibrés finis *si* $(\mathfrak{M},p,C^{\cdot})$ *est* ν-compatible.

THEOREME. *Supposons que* $\overline{p} = (\hat{C}^{\cdot},p,C^{\cdot})$ *soit un foncteur fidèle et soit* $h_i\in C$ *tel que* $\beta(h_i)=\beta(h_j)$ *pour tout* $i,j\in I$. *Supposons qu'il existe un produit naturalisé*

$((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(\alpha(h_i))_{i \in I}$ dans $C^\cdot$ tel que l'on ait $(p(p_i)_{i \in I}, p(S)) \in P(\hat{C}^\cdot)$ et qu'il existe $(p(h_i), \hat{v}_i)_{i \in I} \in V(\hat{C}^\cdot)$. Pour qu'il existe $(h_i, v_i)_{i \in I} \in V(C^\cdot)$ tel que $p(v_i) = \hat{v}_i$, il faut et il suffit qu'il existe une $(\hat{C}, p)$-injection k telle que $\alpha(k) = S$ et $p(p_i).p(k) = \hat{v}_i$; dans ce cas, on a $(h_i, p_i.k)_{i \in I} \in V(C^\cdot)$.

COROLLAIRE 1. *Si $(\mathfrak{M}, p, C^\cdot, C^\cdot_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite et à produits finis, c'est une catégorie d'homomorphismes à produits fibrés finis.*

COROLLAIRE 2. *$(\mathfrak{M}, p_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}, .)$, $(\mathfrak{M}, p_{\mathfrak{N}'}, \mathfrak{N}', .)$ et $(\mathfrak{M}, p_{\mathfrak{F}}, \mathfrak{F}, .)$ sont des catégories d'homomorphismes à produits fibrés finis.*

PROPOSITION. *Soit $(C^\cdot_j)_{j \in I}$ une famille de catégories. Si $(h^j_i, f^j_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans $C^\cdot_j$, pour tout $j \in I$, on a :*

$$H = ((h^j_i)_{j \in J}, (f^j_i)_{j \in J})_{i \in I} \in V(\prod_{j \in J} C^\cdot_j).$$

De plus les projections canoniques $\overline{p}_j = (C^\cdot_j, p_j, \prod_{j \in J} C^\cdot_j)$ sont compatibles avec les produits fibrés.

COROLLAIRE. *Si $C^\cdot_j$ est une catégorie à $\mathcal{J}$-produits fibrés pour tout $j \in J$, alors $\prod_{j \in J} C^\cdot_j$ est une catégorie à $\mathcal{J}$-produits fibrés.*

COROLLAIRE. *Soit $C^\cdot_j$ une catégorie, où $j \in J$. Si on a $((f^j_i)_{i \in I}, e^j) \in P(C^\cdot_j)$ pour tout $j \in J$, on a $F = (((f^j_i)_{j \in J})_{i \in I}, (e^j)_{j \in J}) \in P(\prod_{j \in J} C^\cdot_j)$. Si $C^\cdot_j$ est une catégorie à $\mathcal{J}$-produits, $\prod_{j \in J} C^\cdot_j$ est une catégorie à $\mathcal{J}$-produits et $\overline{p}_j$ est un foncteur compatible avec les $\mathcal{J}$-produits.*

THEOREME. *Soit $(q_j)_{j \in J} \in Q(\mathfrak{F}, \{J\})$, où $q_j = (\Phi', \hat{H}_j, H_j, \overline{\Phi}_j)$ et $\overline{\Phi}_j = (\hat{K}^\cdot_j, \Phi_j, K^\cdot_j)$. Soit $\overline{\Phi} = \bigvee_{j \in J} q_j$. Soit H^s_j la restriction de H_j à la sous-catégorie $K^s_j = K^\cdot_j(\hat{K}_j, \Phi_j)_\smile$. Les conditions :*

$$(f_j)_{j \in J} \in \bigvee_{j \in J} H^s_j \quad \text{et} \quad H_j(f_j) \in R_d(\alpha(\Phi'))$$

entraînent $(f_j)_{j \in J} \in (\bigvee_{j \in J} H_j)(\bigvee_{j \in J} \hat{H}_j, \overline{\Phi})_\smile$. De même si H^i_j est la restriction de H_j à $K^\cdot_j(\hat{K}_j, \Phi_j)_\frown$, les conditions $(f'_j)_{j \in J} \in \bigvee_{j \in J} H^i_j$ et $H_j(f'_j) \in R_g(\alpha(\Phi'))$ entraînent que $(f'_j)_{j \in J}$ est une $(\bigvee_{j \in J} \hat{H}_j, \overline{\Phi})$-injection.

COROLLAIRE. *Soit $\overline{H}_j = (C^\cdot, H_j, K^\cdot_j)$ un foncteur, pour tout $j \in J$. Soit $(\overline{H}_j, \overline{v}_j)_{j \in J} \in V(\mathfrak{F})$. Si f_j est une $(C\ , H_j)$-surjection (resp. injection) et si $H_j(f_j) = f \in R_d(C^\cdot)$ (resp. $\in R_g(C^\cdot)$) pour tout $j \in J$, alors $\overline{f} = (f_j)_{j \in J}$ est une (K_j, v_j)-surjection (resp. injection et $\overline{f}$ est une $(C\ , H_j\ v_j)$-surjection (resp. injection).*

REMARQUE. Avec les notations précédentes, une $(C, H_j\, v_j)$ surjection peut ne pas être de la forme $(f_j)_{j\in J}$, où f_j est une (C, H_j)-surjection pour tout $j \in J$.

THEOREME. *Soit $\overline{H}_j = (K^\bullet, H_j, K_j^\bullet)$ un foncteur et soit $C_j^\bullet$ une sous-catégorie pleine de $K_j^\bullet$ pour tout $j \in J$. Si f_j est un $(C_j, K_j^\bullet)$-projecteur et si $H_j(f_j) = f \in R_d(K^\bullet)$ pour tout $j \in J$, alors $\overline{f} = (f_j)_{j\in J}$ est un $(\bigvee_{j\in J} H'_j, \bigvee_{j\in J} \overline{H}_j)$-projecteur. Si f'_j est un $(K_j^\bullet, C_j)$-éjecteur et si $H_j(f_j) = f \in R_g(K^\bullet)$ pour tout $j \in J$, $(f'_j)_{j\in J}$ est un $(\bigvee_{j\in J} \overline{H}_j, \bigvee_{j\in J} H'_j)$-éjecteur. On désigne par H'_j la restriction de H_j à C_j.*

COROLLAIRE 1. *Soit $\overline{H}_j = (C^\bullet, H_j, C_j^\bullet) \in \mathfrak{F}$, pour tout $j \in J$. Si on a $((p_i^j)_{i\in I}, e^j) \in P(C_j^\bullet)$, si $H_j(p_i^j) = p_i$ et si $p_i . g = p_i . g'$ pour tout $i \in I$ entraîne $g = g'$, alors on a :*

$$(((p_i^j)_{j\in J})_{i\in I}, (e^j)_{j\in J}) \in P(\bigvee_{j\in J} \overline{H}_j).$$

COROLLAIRE 2. *Soit $\overline{H}_j = (C^\bullet, H_j, C_j^\bullet) \in \mathfrak{F}$, $\overline{C}^\bullet = \bigvee_{j\in J} \overline{H}_j$, $\overline{h}_i = (h_i^j)_{j\in J} \in \overline{C}$, $\overline{f}_i = (f_i^j)_{j\in J} \in \overline{C}$ et $\sigma_j = (h_i^j, f_i^j)_{i\in I} \in V(C_j^\bullet)$ pour tout $j \in J$. Si les conditions $H_j(f_i^j).g = H_j(f_i^j).g'$ pour tout $i \in I$ entraînent $g = g'$, alors on a: $w = (\overline{h}_i, \overline{f}_i)_{i\in I} \in V(\overline{C}^\bullet)$.*

COROLLAIRE 3. *Soient $\overline{H}_j = (C^\bullet, H_j, C_j^\bullet)$ des foncteurs π-compatibles, où π est une application $\mathfrak{I}$-produit (resp. $\mathfrak{I}$-produit fibré) naturalisé dans $C^\bullet$. Si on a $(\overline{H}_j, \overline{v}_j)_{j\in J} \in V(\mathfrak{F})$, le foncteur $\overline{H}_j . \overline{v}_j$ est π-compatible.*

THEOREME. *La catégorie $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ des applications covariantes entre espèces de structures $(C^\bullet, S_o, \kappa')$ telles que $C \in \mathfrak{M}_o$ et $S \in \mathfrak{M}_o$, est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits fibrés, si $\mathfrak{M}$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits.*

Soit $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ la catégorie des homomorphismes entre catégories d'homomorphismes, dont les éléments sont les quadruplets (Π_1, F_1, F, Π) tels que $\Pi = (\hat{C}^\bullet, H, C^\bullet, S)$ et $\Pi_1 = (\hat{C}_1^\bullet, H_1, C_1^\bullet, S_1)$ soient des catégories d'homomorphismes et que l'on ait :

$$((\hat{C}_1^\bullet, H_1, C_1^\bullet), F_1, F, (\hat{C}^\bullet, H, C^\bullet)) \in \square\mathfrak{F},$$

la loi de composition étant définie par :

$$(\Pi_3, F_3, F_2, \Pi_2).(\Pi_1, F_1, F, \Pi) = (\Pi_3, F_3 . F_1, F_2 . F, \Pi)$$
$$\text{si, et seulement si, } \Pi_2 = \Pi_1.$$

$\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ ayant pour objets les Π tels que $C = S$.

THEOREME. *Si $\mathfrak{M}$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits, $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits fibrés, de même que la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ ayant pour objets les catégories d'homomorphismes saturées.*

4. Extensions de foncteurs et élargissements.

DEFINITION. *Soit* $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot})$ *un foncteur. On dira qu'une sous-classe* F *de* K *est* $\overline{p}$-admissible *si elle vérifie les conditions suivantes :*

1) $\alpha(F) = p(H_o^{\cdot}) \subset F$ *et* $F.p(H_\gamma^{\cdot}) \subset F$.

2) Si $f \in F$, *la condition* $f.g_1 = f.g_2$, *où* $g_i \in p(H)$, *entraîne* $g_1 = g_2$.

La condition 1 entraîne $p(H_\gamma^{\cdot}) \subset F$.

Soit $\overline{\mathcal{S}}_o$ (resp. $\mathcal{S}_o$) la classe des couples $(F, \overline{p})$, où $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot}) \in \mathcal{F}$, tels que F soit $\overline{p}$-admissible et que $(K^{\cdot}, p_\gamma, H_\gamma^{\cdot})$ soit un foncteur fidèle (resp. bien fidèle, c'est-à-dire tel que deux éléments de $H_\gamma^{\cdot}$ ayant même source et même image par p_γ sont égaux), p_γ étant la restriction de p à $H_\gamma^{\cdot}$. Soit $\mathcal{S}'_o$ la classe des triplets $(F, C, \overline{q})$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\overline{q} = (K^{\cdot}, q, H^{\cdot}) \in \mathcal{F}$ et $(K^{\cdot}, q_\gamma, H_\gamma^{\cdot})$ est un foncteur bien fidèle.

2) $C^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$, et $H^{\cdot}$ est une catégorie à C-éjections; on a $q(E(H^{\cdot}, C)) \subset F$, en désignant par $E(H^{\cdot}, C)$ la classe des $(H^{\cdot}, C)$-éjecteurs.

3) F est une classe $(K^{\cdot}, q\iota, C^{\cdot})$-admissible.

THEOREME. *Soit* $(F, \overline{p}) \in \overline{\mathcal{S}}_o$ *et* $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot})$. *Il existe* $X(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}'_o$ *et* $\overline{\sigma} \in \mathcal{F}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $X(F, \overline{p}) = (F, \overline{H}, (K^{\cdot}, \tilde{p}, \tilde{H}^{\cdot}))$ *et* $\overline{\sigma} = (\overline{H}^{\cdot}, \sigma, H^{\cdot})$ *est une* $p\mathcal{F}$-*surjection.*

2) Soit $\overline{F} = E(\tilde{H}^{\cdot}, \overline{H})$ *et* $s \in \tilde{H}_o^{\cdot}$; *la restriction de* $\tilde{p}$ *à* $\overline{F}.s$ *est une bijection sur* $F.\tilde{p}(s)$.

3) Si $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$, $\overline{\sigma}$ *est une équivalence.*

Soit $\boxminus(F, \overline{p})$ la catégorie des quadruplets (k, f', f, h) tels que :

$$(k, f', f, p(h)) \in \square K^{\cdot}, \qquad f' \in F,\ f \in F,\ h \in H,$$

la loi de composition étant définie par :

$$(k_1, f'_1, f_1, h_1) \boxminus (k, f', f, h) = (k_1.k, f'_1, f, h_1.h)$$
$$\text{si, et seulement si, } f_1 = f' \text{ et } \alpha(h_1) = \beta(h).$$

La catégorie $\square\square(H^{\cdot}; H_\gamma^{\cdot}, H)$ opère à droite sur $\square(F, \overline{p})$ relativement à la loi de composition :

$$(k, f', f, h)(h, g', g, h_1) = (k, f'.p(g'), f.p(g), h_1).$$

$\tilde{H}^{\cdot}$ est la catégorie quotient de $\boxminus(F, \overline{p})$ par la relation d'équivalence ρ dont les classes d'équivalence sont les classes d'intransitivité de l'espèce de structures correspondante; $\tilde{p}$ est l'application :

$$(k, f', f, h) \bmod \rho \to k$$

et $\bar{\sigma}$ est le foncteur défini par :

$$h \to (h, \beta(h), \alpha(h), h) \bmod \rho .$$

DEFINITION. *Soit* $(F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_o$; $X(F, \bar{p})$ *sera appelé* l'extension canonique de $(F, \bar{p})$; *le foncteur* $\bar{\sigma}^{-1}$ *sera appelé* l'équivalence canonique associée *de* $\bar{H}^\cdot$ *sur* $H^\cdot$.

Soit $\mathcal{S}$ la catégorie dont les éléments sont de la forme $(\dot{p}_2, \dot{p}_1, U)$ où :

$$\dot{p}_i = (F_i, \bar{p}_i) \in \mathcal{S}_o,\ i = 1, 2,\quad U = (\bar{p}_2, \Phi', \Phi, \bar{p}_1) \in \square\mathfrak{F},\ \Phi'(F_1) \subset F_2 ,$$

la loi de composition étant définie par :

$$(\dot{p}'_2, \dot{p}'_1, U').(\dot{p}_2, \dot{p}_1, U) = (\dot{p}'_2, \dot{p}_1, U' \boxminus U)$$

$$\text{si, et seulement si, } \dot{p}'_1 = \dot{p}_2 .$$

La classe des unités de $\mathcal{S}$ est identifiée à la classe $\mathcal{S}_o$.

Soit $\mathcal{S}'$ la catégorie dont les éléments sont de la forme $(\check{q}_2, \check{q}_1, U)$ où :

$$\check{q}_i = (F_i, C_i, \bar{q}_i) \in \mathcal{S}'_o,\quad U = (\bar{q}_2, \Phi', \Phi, \bar{q}_1) \in \square\mathfrak{F}, \Phi'(F_1) \subset F_2$$

et Φ est un foncteur (C_2, C_1)- compatible avec les éjections,

la loi de composition étant définie par :

$$(\check{q}'_2, \check{q}'_1, U').(\check{q}_2, \check{q}_1, U) = (\check{q}'_2, \check{q}_1, U' \boxminus U)$$

$$\text{si, et seulement si, } \check{q}'_1 = \check{q}_2 .$$

La classe des unités de $\mathcal{S}'$ est identifiée à $\mathcal{S}'_o$ et l'élément $(\check{q}_2, \check{q}_1, U)$ sera aussi désigné par le symbole $(\check{q}_2, \Phi', \Phi, \check{q}_1)$.

Soit $\mathcal{S}''$ la classe dont les éléments sont de la forme $(\dot{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)$, où :

$$\dot{p} = (F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_o,\quad \check{q}_1 = (F_1, C_1, \bar{q}_1) \in \mathcal{S}'_o,\quad \Psi'(F_1) \subset F$$

et $(\bar{p}, \Psi', \Psi, \bar{q}'_1) \in \square\mathfrak{F}$, $\bar{q}'_1$ désignant la restriction de $\bar{q}_1$ à $C^{\cdot}_1$.

$\mathcal{S}$ opère sur $\mathcal{S}''$ relativement à la loi de composition κ' :

$$((\dot{p}', \dot{p}, (\bar{p}', \Phi', \Phi, \bar{p})), (\dot{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)) \to ((\dot{p}', \Phi'.\Psi', \Phi.\Psi, \check{q}_1)$$

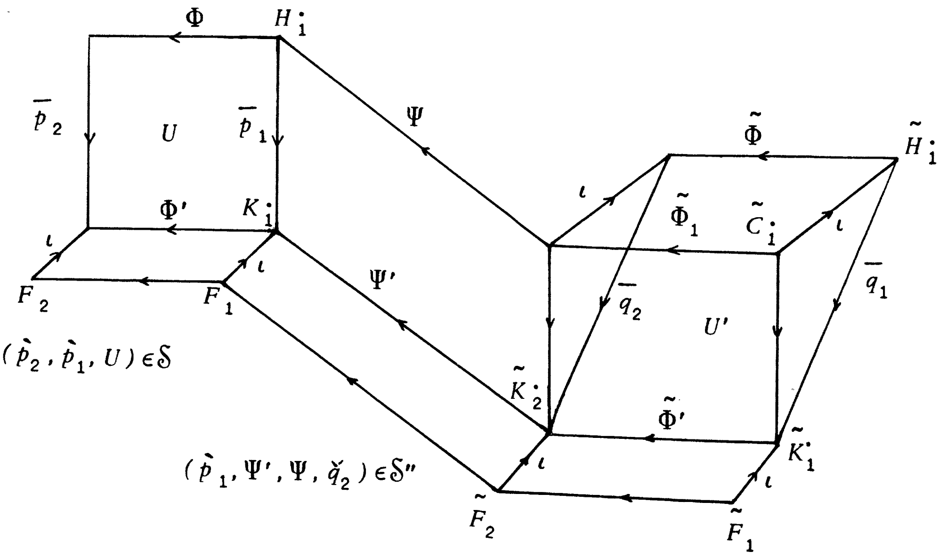
et la catégorie duale $\mathcal{S}'^*$ de $\mathcal{S}'$ opère sur $\mathcal{S}''$ relativement à la loi de composition $\bar{\kappa}'$:

$$((\check{q}_2, \Phi', \Phi, \check{q}_1), (\dot{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_2)) \to (\dot{p}, \Psi'.\Phi', \Psi.\Phi_1, \check{q}_1)$$

où Φ_1 est la restriction de Φ à $C^{\cdot}_1$ et $\check{q}_1 = (F_1, C_1, \bar{q}_1)$.

$(\mathcal{S}, \mathcal{S}'^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\mathcal{S}''$ relativement à $(\kappa', \bar{\kappa}')$. Nous désignerons par $\tilde{\mathcal{S}}$ la catégorie correspondante (voir § 1) dont $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des sous-catégories pleines; l'élément $(\dot{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)$ de $\mathcal{S}''$ est un morphisme de $\tilde{\mathcal{S}}$, de source $\check{q}_1$, de but $\grave{p}$.

THEOREME. $\tilde{\mathcal{S}}$ *est une catégorie à* $\mathcal{S}'$*-éjections et il existe un foncteur* $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$*-éjection naturalisé* (X, ξ) *tel que, pour tout* $\grave{p} \in \mathcal{S}_o$*, on ait* $\xi(\grave{p}) = (\grave{p}, K^{\bullet}, \overline{\gamma}, X(\grave{p}))$*, où* $X(\grave{p})$ *est l'extension canonique de* $\grave{p}$ *et* $\overline{\gamma}$ *l'équivalence canonique associée.*



$(\check{q}_2, \check{q}_1, U') \in \mathcal{S}'$

DEFINITION. *Un* $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$*-éjecteur sera appelé* extenseur. *Une* $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$*-éjection de* $m \in \mathcal{S}$ *sera appelée* extension de m, *ou* extension de U à (F_2, F_1), *si* $m = (\grave{p}_2, \grave{p}_1, U)$ *et* $\grave{p}_i = (F_i, \overline{p}_i)$.

Si $m = (\grave{p}_2, \grave{p}_1, U) \in \mathcal{S}$ et $U = (\overline{p}_2, \Phi', \Phi, \overline{p}_1)$, l'extension canonique $X(m)$ de m est l'élément $(X(\grave{p}_2), \Phi', \tilde{\Phi}, X(\grave{p}_1))$, où $\tilde{\Phi}$ est le foncteur défini par l'application :

$$(k, f', f, h) \bmod \rho_1 \to (\Phi'(k), \Phi'(f'), \Phi'(f), \Phi(h)) \bmod \rho_2 .$$

PROPOSITION. *Pour que* $\check{q} = (F, H, (K^{\bullet}, q, K_1^{\bullet})) \in \mathcal{S}'$ *soit une extension de* $\grave{p} = (F, (K^{\bullet}, q\iota, H^{\bullet}))$*, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1) Pour tout $s \in H_o^{\bullet}$*, la restriction de* q *à* $F_1 . s$*, où* $F_1 = E(K_1^{\bullet}, H)$*, est une bijection sur* $F . q(s)$*.*

2) Si $T = (f_1', f_1, h) \in \sqsupset(F_1, K_1^{\bullet})$ *et si* $Q = (k, \sqsupset q(T)) \in \square(K^{\bullet}; F, K)$*, il existe un et un seul* $k_1 \in K_1$ *tel que* $q(k_1) = k$ *et* $(k_1, T) \in \square K_1^{\bullet}$*.*

COROLLAIRE 1 *(transitivité verticale). Soit* $\dot{p} = (F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$, $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot})$, $(\dot{p}, K^{\cdot}, \overline{\gamma}, (F, C, \overline{q}))$ *un extenseur et* $\overline{F} = E(\alpha(\overline{q}), C)$. *Soit* $\overline{p'} = (H^{\cdot}, p', L^{\cdot}) \in \mathcal{F}$ *tel que* $H^{\cdot}_o = p'(L^{\cdot}_o)$ *et que* $\overline{p'}_\gamma$ *soit bien fidèle. Si* $(\overline{F}, \overline{L}, \overline{q'})$ *est une extension de* $(\overline{F}, \overline{\mu}.\overline{p'})$, *alors* $(\overline{F}, \overline{L}, \overline{q}.\overline{q'})$ *est une extension de* $(F, \overline{p}.\overline{p'})$ *où* $\overline{\mu} = (\alpha(\overline{q}), \iota, C^{\cdot}).\overline{\gamma}^{-1}$.

COROLLAIRE 2. *Soient* $m = ((F, \overline{p}), K^{\cdot}, \overline{\gamma}, (F, C, \overline{q}))$ *et* $m_1 = ((F_1, \overline{q}), K^{\cdot}, \overline{\gamma}_1, (F_1, C_1, \overline{q}_1))$ *deux extenseurs. Pour que* $(F'', \overline{\gamma}_1^{-1}(C), \overline{q}_1)$ *soit une extension de* $(F'', \overline{p})$, *il faut que* $F \cap F_1 \subset K^{\cdot}_\gamma$ *et* $F'' = F_1 . F$.

PROPOSITION. *Soit* $(F, L, \overline{q})$ *une extension de* $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$. *Si* $\overline{p}$ *est un foncteur fidèle,* $\overline{q}$ *est fidèle. Lorsque* $\overline{p}$ *est bien fidèle,* $\overline{q}$ *est bien fidèle si, et seulement si, les conditions* $f_i \in F$, $h_i \in H$, $\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$ *et* $f_1.\overline{p}(h_1) = f_2.\overline{p}(h_2)$ *assurent l'existence d'un* $g \in H^{\cdot}_\gamma$ *tel que* $\alpha(g) = \beta(h_2)$ *et* $f_1 = f_2.\overline{p}(g)$.

PROPOSITION. *Soit* $(F, C, \overline{q})$ *une extension de* $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$, *où* $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot})$, *et supposons que les conditions* $f_i \in F$ *et* $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ *entraînent qu'il existe* $g \in F$ *tel que* $F.g \subset F$ *et* $f_2 = f_1.g$ *(resp.* $\overline{g} \in H^{\cdot}_\gamma$ *tel que* $f_2 = f_1.p(\overline{g})$*). Alors* $\overline{q}_\gamma$ *est une catégorie d'hypermorphismes (resp.* $\overline{q}$ *est une catégorie d'hypermorphismes si* $\overline{p}$ *en est une).*

THEOREME. *Soit* $\mathfrak{M}$ *une catégorie d'applications à* $\mathfrak{I}$*-produits;* $\tilde{\mathcal{S}}$ *est une catégorie à* $\mathfrak{I}$*-produits et* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'$ *sont des catégories à* $\mathfrak{I}$*-produits fibrés. Soit* $\tilde{m}_i$ *une extension de* $m_i \in \mathcal{S}$ *pour tout* $i \in I$; *alors* $\prod_{i \in I} \tilde{m}_i$ *est une extension de* $\prod_{i \in I} m_i$ *et, si* $\beta(m_i) = \beta(m_j)$ *pour tout* $i, j \in I$, $\bigvee_{i \in I} \tilde{m}_i$ *est une extension de* $\bigvee_{i \in I} m_i$, *où* $I \in \mathfrak{I}$.

DEFINITION. *Soit* $C^{\cdot}$ *une sous-catégorie d'une catégorie* $K^{\cdot}$. *On dira que* $K^{\cdot}$ *est* un élargissement de $C^{\cdot}$ *si* $C^{\cdot}$ *est pleine dans* $K^{\cdot}$ *et si* $K^{\cdot}_\gamma$ *est une catégorie à* $C^{\cdot}_\gamma$*-éjections.*

Cette définition est équivalente à celle donnée dans [5].

PROPOSITION. *Pour que* $K^{\cdot}$ *soit un élargissement de* $C^{\cdot}$, *il faut et il suffit que* $K^{\cdot}$ *soit une catégorie à* C*-éjections et que tout* $(K^{\cdot}, C)$*-éjecteur soit inversible dans* $K^{\cdot}$.

Soit $\hat{\mathcal{S}}$ la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{S}}$ ayant pour objets les $\hat{p} = (F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$ tels que $F \subset \beta(\overline{p})_\gamma$ et les éléments $(F, C, \overline{q}) \in \mathcal{S}'_o$, où $\overline{q} = (K^{\cdot}, q, H^{\cdot})$, tels que $F \subset K^{\cdot}_\gamma$ et que $H^{\cdot}$ soit un élargissement de $C^{\cdot}$. Soit $\hat{\mathcal{S}}' = \mathcal{S}' \cap \hat{\mathcal{S}}$.

THEOREME. $\hat{\mathcal{S}}$ *est une catégorie à* $\hat{\mathcal{S}}'$*-éjections, admettant* $(\hat{X}, \hat{\xi})$ *pour foncteur* $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$*-éjection naturalisé, où* $\hat{X}$ *et* $\hat{\xi}$ *sont des restrictions de* X *et* ξ.

COROLLAIRE. *Soit* $(F, C, \overline{q})$ *une extension de* $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$ *et* $((F_1, \overline{q}), K^{\cdot}, \overline{\gamma}_1, (F_1, C_1, \overline{q}_1))$

un extenseur tel que $F \subset F_1$. *Pour que* $(F'', \overline{\gamma}^{-1}(C), \overline{q}_1)$ *soit une extension de* $(F'', \overline{p})$, *il faut et il suffit que* $F \subset K^{\bullet}_{\gamma}$; *on a alors* $F'' = F_1 . F$.

DEFINITION. *Soit* $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \hat{\mathcal{S}}$, *où* $\hat{p}_i = (F_i, \overline{p}_i)$. *On dira que* $U' = (\overline{q}_2, \Phi', \Phi, \overline{q}_1)$ *est un* élargissement de m *si* $\overline{p}_i$ *est une restriction de* $\overline{q}_i$, $i = 1, 2$ *et si* $(\check{q}_2, \check{q}_1, U')$ *est une* $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$*-éjection de* m.

$\overline{q} \in \mathfrak{F}$ est un élargissement de $\hat{p} = (F, \overline{p}) \in \hat{\mathcal{S}}_o$ si, et seulement si, $(\hat{p}, K^{\bullet}, H^{\bullet}, (F, H, \overline{q}))$ est un extenseur. $(\overline{q}_2, \Phi', \Phi, \overline{q}_1) \in \square\mathfrak{F}$ est un élargissement de $(\hat{p}_2, \hat{p}_1, U)$ si, et seulement si, $\overline{q}_i$ est un élargissement de $\hat{p}_i$ et si $U = (\overline{p}_2, \Phi', \Phi_1, \overline{p}_1)$, où Φ_1 est une restriction de Φ.

PROPOSITION. *Il existe un foncteur* $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$*-éjection naturalisé* (X', ξ') *tel que, pour tout* $m \in \hat{\mathcal{S}}_o$, *on ait* $X'(m) = (\check{q}_2, \check{q}_1, U)$, *où* U *est un élargissement de* m.

PROPOSITION. *Soit* $(F, H, \overline{q}) \in \hat{\mathcal{S}}'_o$, $\overline{q} = (K^{\bullet}, q, K^{\bullet}_1)$ *et* $F_1 = E(K^{\bullet}_1, H)$. *Pour que* $\overline{q}$ *soit un élargissement de* $(F, (K^{\bullet}, q\iota, H^{\bullet}))$, *il faut et il suffit que* $\overline{q}$ *définisse une bijection de* $F_1 . s$ *sur* $F . q(s)$, *pour tout* $s \in (K^{\bullet}_1)_o$.

Soit $\mathfrak{F}'$ (resp. $\mathfrak{F}''$) la sous-classe de $\mathfrak{F}$ formée des foncteurs $\overline{p}$ tels que $\overline{p}_{\gamma}$ soit bien fidèle (resp. définisse une catégorie d'hypermorphismes). $\mathfrak{F}'$ est identifié à la classe des unités de $\square\!\square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$.

THEOREME. *Dans* $\mathfrak{F}'$ *(resp.* $\mathfrak{F}''$*) la relation :*

$\overline{p} \prec \overline{q}$ *si, et seulement si, il existe une classe* $\overline{p}$*-admissible* F *telle que* $\overline{q}$ *soit un élargissement de* $(F, \overline{p})$,

est une relation transitive (resp. de préordre). La classe des $\overline{q} \in \mathfrak{F}''$ *tels que* $\overline{p} \prec \overline{q}$, *où* $\overline{p} \prec \mathfrak{F}'$, *admet un élément minimal et un élément maximal dans* $(\mathfrak{F}'', \prec)$.

COROLLAIRE. *Dans* $\square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ *(resp.* $\square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'')$*) la relation :*

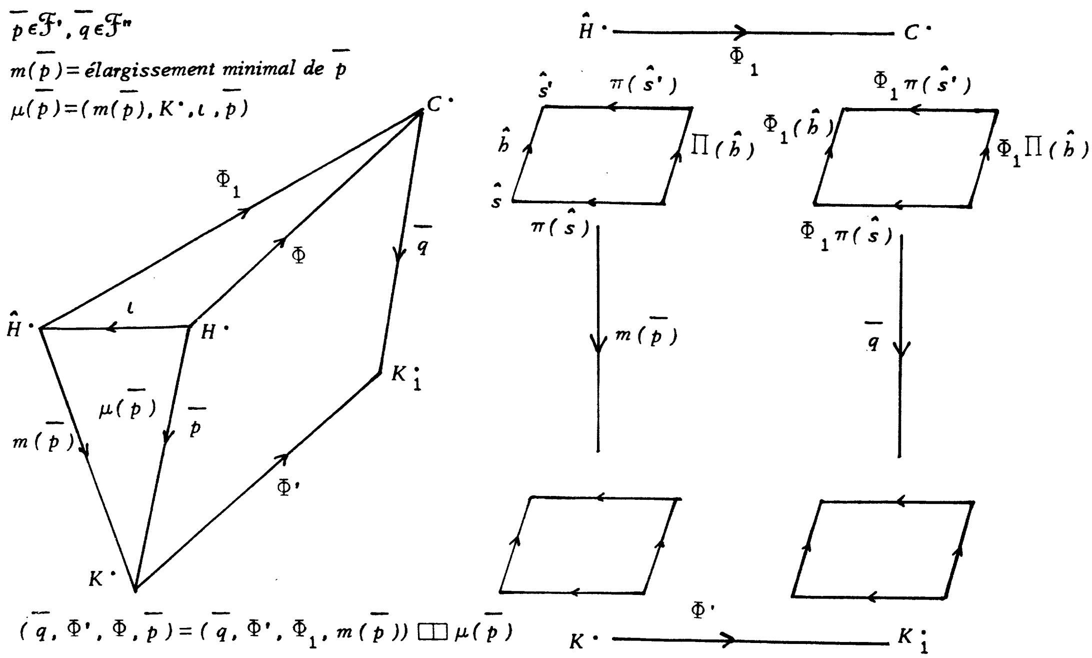
$U \prec \hat{U}$ *si, et seulement si, il existe* $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \hat{\mathcal{S}}$ *tel que* $\hat{U}$ *soit un élargissement de* m,

est une relation transitive (resp. de préordre). Pour tout $U \in \square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ *la classe des* $\hat{U} \in \square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'')$ *tels que* $U \prec \hat{U}$ *admet un élément minimal et un élément maximal dans* $(\square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}''), \prec)$.

DEFINITION. *Soit* $U \in \square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$; *si* $U \prec \hat{U}$, *on appelle* $\hat{U}$ *un élargissement de* U; *si* $\hat{U}'$ *est un élément minimal (resp. maximal) pour la relation* $\prec$ *dans la classe des* $\hat{U}$ *tels que* $U \prec \hat{U}$, *on appelle* $\hat{U}'$ un élargissement minimal *(resp.* maximal) de U.

Soit $\mathfrak{F}''_s$ la sous-classe de $\mathfrak{F}''$ formée des $\overline{p} \in \mathfrak{F}''$ tels que $\overline{p}_{\gamma}$ soit une catégorie d'hypermorphismes saturée.

THEOREME. *$\boxminus(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}')$ est une catégorie à $\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}'')$-projections et à $\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}''_s)$-projections, un élargissement minimal de U étant une $(\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}''),\boxminus(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}'))$-projection de U et un élargissement maximal de U étant une $(\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}''_s),\boxminus(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}'))$-projection de U.*



DEFINITION. *Soit $\Pi = (K^\bullet, p, H^\bullet, C)$ une catégorie d'homomorphismes. On dira qu'une catégorie d'homomorphismes $\hat\Pi = (K^\bullet, \hat p, \hat H^\bullet, \hat C)$ est* un élargissement *(resp.* élargissement maximal) de Π *si $(K^\bullet, \hat p, \hat H^\bullet)$ et $(K^\bullet, \hat p\iota, \hat C^\bullet)$ sont des élargissements (resp. maximaux) de $(K^\bullet, p, H^\bullet)$ et $(K^\bullet, p\iota, C^\bullet)$.*

PROPOSITION. *Soient $\Pi = (K^\bullet, p, H^\bullet, C)$ et $\hat\Pi = (K^\bullet, \hat p, \hat H^\bullet, \hat C)$ deux catégories d'homomorphismes, et $H^\bullet_\gamma \subset C$. Alors $\hat\Pi$ est un élargissement (resp. élargissement maximal) de Π si, et seulement si, $\hat H^\bullet$ est un élargissement de $H^\bullet$ et $\hat C^\bullet$ un élargissement de $C^\bullet$ (resp. tel que $\hat\Pi$ soit de plus saturée).*

Cette proposition montre que $\hat\Pi$ est un élargissement de Π si, et seulement si, $\hat\Pi$ est un élargissement de $H^\bullet$ au-dessus de $K^\bullet$, au sens de [5].

PROPOSITION. *Soit $\Pi = (K^\bullet, p, H^\bullet, C)$ une catégorie d'homomorphismes. Si $C = H^\bullet_\gamma$ (resp. si $p(C^\bullet_\gamma)$ est un sous-groupoïde plein de $K^\bullet_\gamma$), alors Π admet un élargissement maximal.*

REMARQUE. La condition plus faible indiquée dans le corollaire 2, p. 37 [5] n'est pas suffisante pour que Π admette un élargissement $\hat\Pi$.

5. Espaces de structures.

Nous aurons à utiliser la notion suivante :

DEFINITION. *On dira que* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *est* une catégorie d'homomorphismes avec atomes *si* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes saturée, à produits finis, si* $C^{\cdot}$ *admet un* $\emptyset$*-produit* $\overline{a}$ *tel que* $p(\overline{a})$ *soit l'ensemble ayant un seul élément* a *et si, pour tout* $s \in C^{\cdot}_{o}$ *tel que* $a \in p(s)$, *il existe* $h \in C$ *vérifiant* $\alpha(h) = \overline{a}$ *et* $\beta(h) = s$; *on appelle* $\overline{a}$ un atome de $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$.

Cette définition entraîne que h est une $(\mathfrak{M}, p)$-injection.

PROPOSITION. *Soit* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *une catégorie d'homomorphismes à produits finis. Si* $s_i \in C^{\cdot}_{o}$, *où* $i = 1,2$ *et si* $C^{\cdot}$ *admet un* $\emptyset$*-produit* $\overline{a}$ *tel que* $p(\overline{a}) = \{a\}$, *où* $a \in p(s_1)$, *il existe* $h \in C^{\cdot}_{\gamma}$ *tel que* $\alpha(h) = s_2$ *et* $\beta(h) = \overline{a} \times s_2$.

COROLLAIRE. *Si* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes avec atomes et si* $s_i \in C^{\cdot}_{o}$, *où* $i = 1, 2$, *il existe* $h \in C^{\cdot}_{\gamma}$ *tel que :*

$$\alpha(h) = s_2, \quad \beta(h) \,\overline{\overline{p}}\, s_1 \times s_2 \quad et \quad p(\beta(h)) = \{x_1\} \times p(s_2\},$$

pour tout $x_1 \in p(s_1)$.

Soit $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes. Soit $\eta = (C^{\cdot}, S, \kappa')$ une espèce de structures et soit π' l'application $z \to e$ de S dans $C^{\cdot}_{o}$ telle que $(e, z) \in C^{\cdot} * S$. Si $((C^{\cdot}, s), \pi', (S, \sigma))$ est une $\mathcal{H}$-espèce de structures [4c] nous désignerons aussi cette $\mathcal{H}$-espèce de structures par le symbole $((C^{\cdot}, s), (S, \sigma), \kappa')$.

DEFINITION. *On appelle* $\mathcal{H}$-espace de structures *une* $\mathcal{H}$*-espèce de structures* $\overline{\eta} = ((C^{\cdot}, s), (S, \sigma), \kappa')$ *vérifiant la condition suivante : il existe une espèce de structures* (η, H) *dominée dans* $(q, \mathcal{H})$ *telle que, pour tout* $e \in C^{\cdot}_{o}$, *on ait* $H(e) \,\overline{\overline{q}}\, \sigma$. *On appelle alors* (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\overline{\eta}$.

THEOREME. *Si* $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes avec atomes toute* $\mathcal{H}$*-espèce de structures est un* $\mathcal{H}$*-espace de structures.*

Si $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ n'est pas une catégorie d'homomorphismes avec atomes, une $\mathcal{H}$-espèce de structures peut ne pas être un $\mathcal{H}$-espace de structures. Ainsi pour qu'une $\mathcal{F}$-espèce de structures $((C^{\cdot}, C^{\perp}), S^{\perp}, \kappa')$ soit un $\mathcal{F}$-espace de structures, où $C^{\cdot}_{o} = \pi'(S)$, il faut et il suffit que l'on ait $C^{\cdot}_{o} \subset C^{\perp}_{o}$ et que, si $f' \perp f$ est défini dans $C^{\perp}$, on ait $fz = f'z$ pour tout $z \in \overset{-1}{\pi'}(\alpha(f))$. En particulier ces conditions sont vérifiées si $((C^{\cdot}, C^{\perp}), S^{\perp}, \kappa')$ est la $\mathcal{F}$-espèce de structures associée à une espèce de morphismes (c'est-à-dire si $\perp$ est la loi de composition triviale sur C [4c]).

Si $(\overline{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \overline{\eta}_1)$ est une application $\mathcal{H}$-covariante [4c] et si $\overline{\eta}_2$ et $\overline{\eta}_1$

sont des $\mathcal{H}$-espaces de structures, alors (Φ, φ_o) définit aussi une application covariante entre les espèces de structures dominées sous $\overline{\eta}_1$ et sous $\overline{\eta}_2$ respectivement.

Soit $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{H})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ formée des applications $\mathcal{H}$-covariantes entre $\mathcal{H}$-espaces de structures. Nous désignerons par $p_1^{\mathcal{H}}$ et $p_2^{\mathcal{H}}$ les projections :

$$(\overline{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \overline{\eta}_1) \to ((C_2^{\bullet}, s_2), \Phi, (C_1^{\bullet}, s_1))$$

et $$(\overline{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \overline{\eta}_1) \to (\sigma_2, \varphi_o, \sigma_1)$$

de $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{H})$ vers la catégorie $\overline{\mathcal{H}}$ des foncteurs $\mathcal{H}$-structurés et vers la catégorie $\mathcal{H}$ respectivement. Soit $(\mathcal{H}, \overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$ le foncteur canonique de $\overline{\mathcal{H}}$ vers $\mathcal{H}$.

DEFINITION. *On appelle* $\mathcal{H}$-espace de morphismes *un couple* $(\overline{\eta}, G)$, *où* $\overline{\eta}$ *est un* $\mathcal{H}$-*espace de structures* $((C^{\bullet}, s), (S, \sigma), \kappa')$ *et où* $((C^{\bullet}, S, \kappa'), G)$ *est une espèce de morphismes, vérifiant la condition suivante : soit* (η, H) *l'espèce de structures dominée sous* $\overline{\eta}$*; alors* $(G(e), H(e))$ *est une catégorie* $\mathcal{H}$-*structurée, pour tout* $e \in \pi'(S)$.

Soit $(\overline{\eta}, G)$ un $\mathcal{H}$-espace de morphismes. Soit $\overline{G}$ l'application définie de la façon suivante :

$$\overline{G}(e) = (G(e), H(e)) \qquad \text{si } e \in \pi'(S)$$

et $$\overline{G}(f) = (\overline{G}(e'), \tilde{f}, \overline{G}(e)) \qquad \text{si } f \in C_1^{\bullet},\ \alpha(f) = e \text{ et } \beta(f') = e',$$

où C_1 est la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ opérant sur $S^{\bullet}$. Le couple $(C^{\bullet}, \overline{G})$ est un couple dominant dans $(q\overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$ une espèce de structures. Supposons $C_1 = C$ et désignons par $\tilde{\Sigma}^{\bullet}$ la catégorie produit croisé $S^{\bullet} \times_{\kappa'} C^{\bullet}$ (voir [4d]).

THEOREME. *Si* $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes à produits finis et résolvante à droite, il existe* $\tilde{\sigma} \in \mathcal{H}_o$ *tel que* $\tilde{\sigma} \underset{q}{=} \sigma \times s \times \sigma$ *et que* $(\tilde{\Sigma}^{\bullet}, \tilde{\sigma})$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}$-*structurée.*

Soit $\eta = (C^{\bullet}, S_o, \kappa')$ une espèce de structures; soit π la projection canonique de $C^{\bullet} * S_o$ vers C et $C_1 = \pi(C^{\bullet} * S_o)$. Soit

$$\overline{\eta} = ((C^{\bullet}, s), (S_o, \sigma), \kappa')$$

un $\mathcal{H}$-espace de structures et (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\overline{\eta}$. Soit (η, F) une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ (nous reprenons les notations des conditions 1, 2, 3, § 1) et supposons que $(C^{\bullet}, G)$ soit un couple dominant dans $(p\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ une espèce de structures $\mu = (C^{\bullet}, \overline{S}, \overline{\kappa}')$. Soit $\overline{\alpha}$ l'application source dans la catégorie $\overline{S}^{\bullet}$, somme des catégories $G(e)$, et soit $\overline{\pi}'$ l'application canonique de S_o dans $\overline{S}_o^{\bullet}$.

Soit $(\overline{\mu}, G)$ un $\mathcal{H}$-espace de morphismes, où $\overline{\mu} = ((C^{\cdot}, s), (\overline{S}, \overline{\sigma}), \overline{\kappa}')$ et soit $(\mu, \overline{H})$ l'espèce de structures dominée sous $\overline{\mu}$. Nous supposons de plus que $\overline{\eta}'(e) = ((G(e), \overline{H}(e)), (\overset{-1}{\pi}'(e), H(e)), \overline{\kappa}'(e))$ soit un $\mathcal{H}$-espace de structures, pour tout $e \in (C_1)^{\cdot}_0$. Soit $(C^{\cdot}, \hat{F})$ le couple dominant dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ l'espèce de structures $\eta'' = (C^{\cdot}, \Sigma, \hat{\kappa}')$ construite au § 1, telle que :

$$\hat{F}(e) = (G(e) * \overset{-1}{\pi}'(e))^{\cdot} \qquad \text{pour tout } e \in (C_1)^{\cdot}_0 .$$

THEOREME. *Si $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits fibrés finis, $(\overline{\eta}'', \hat{F})$ est un $\mathcal{H}$-espace de morphismes, où*

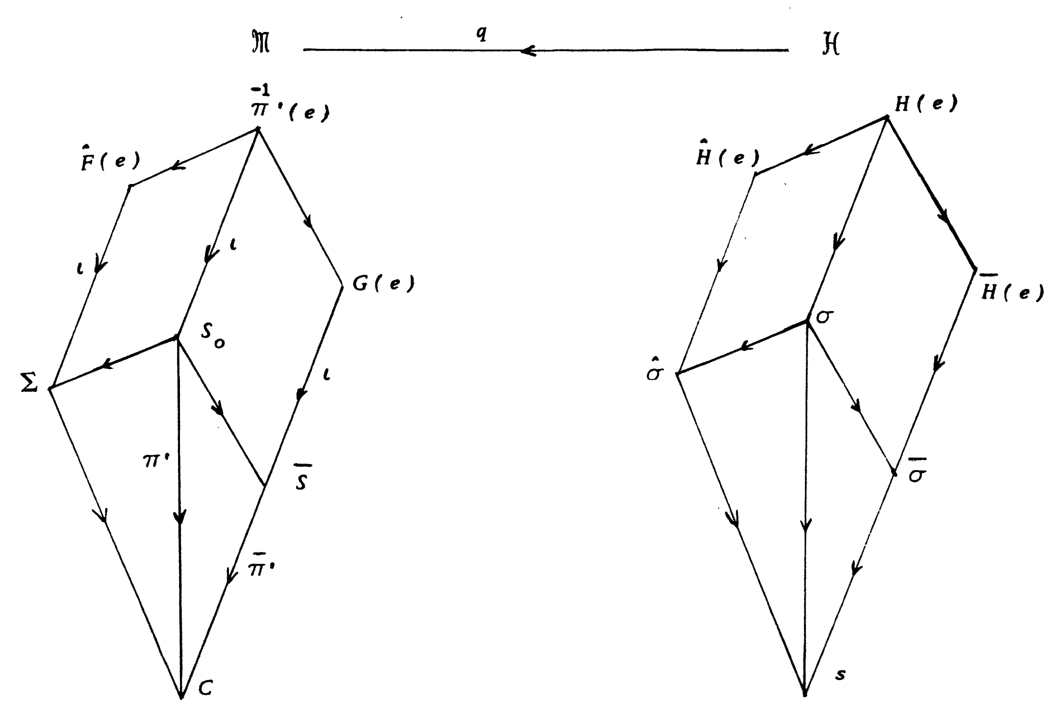
$$\overline{\eta}'' = ((C^{\cdot}, s), (\Sigma, \hat{\sigma}), \hat{\kappa}')$$

et où $\hat{\sigma}$ est le produit fibré dans $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H})$ défini par :

$$\hat{\sigma} = (\overline{\sigma}, \overline{\alpha}, \overline{\sigma}) \vee (\overline{\sigma}, \overline{\pi}', \sigma) .$$

Soit $(\eta'', \hat{H})$ l'espèce de structures dominée sous $\overline{\eta}''$; alors $\hat{H}(e)$ est la catégorie $\mathcal{H}$-structurée des hypermorphismes [4c] *associée à $\overline{\eta}'(e)$, pour tout $e \in C'_0$.*

DEFINITION. *Si les hypothèses précédentes sont vérifiées, on dira que $(\overline{\eta}, \overline{\mu}, F)$ est* un $\mathcal{H}$-espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$-espace de morphismes.



Ψ - ESPACES DE STRUCTURES.

Soit $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes et soit $\Psi = (\mathcal{H}, \psi, \mathcal{H}')$ un foncteur fidèle.

DEFINITION. *On dira que* $(\overline{\eta}, H')$ *est un* Ψ - espace de structures *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $\overline{\eta} = ((C^{\cdot}, s), (S, \sigma), \kappa')$ *est un* $\mathcal{H}$*-espace de structures; soit* (η, H) *l'espèce de structures dominée sous* $\overline{\eta}$.

2) $(C^{\cdot}, H')$ *est un couple dominant dans* $(q\psi, \mathcal{H}')$ *une espèce de structures et on a* $H = \psi H'$.

La notion de Ψ - espace de structures généralise la notion d'espace fibré dont les fibres sont munies de superstructures; le couple $(\overset{-1}{\pi}{}'(e), H(e))$, où $e \in \pi'(S)$, peut être considéré comme la fibre sur e, $H'(e)$ étant la superstructure correspondante.

PROPOSITION. *Pour que* $(\overline{\eta}, H)$ *soit le* $\mathcal{H}$*-espace de structures sous un* $\mathcal{H}$*-espace de morphismes* $(\overline{\eta}, G)$, *il faut et il suffit que* $(\overline{\eta}, \overline{H})$ *soit un* $(\mathcal{H}, \overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$*-espace de structures, où* $\overline{\mathcal{H}}$ *est la catégorie des foncteurs* $\mathcal{H}$*-structurés et* $\overline{H}(e) = (G(e), H(e))$ *pour tout* $e \in \pi'(S)$.

CAS PARTICULIER. 1) Supposons que $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H}, .)$ soit une catégorie d'homomorphismes à produits finis, que Ψ soit un foncteur compatible avec les produits et que $(\mathcal{M}, q\psi, \mathcal{H}', .)$ soit une catégorie d'homomorphismes avec atomes. Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée. Soit $\sigma' \in \mathcal{H}'_o$. Pour tout $e \in C^{\cdot}_o$, soit $H'(e) = \sigma' \times \overline{e}$, où $\overline{e}$ est l'atome tel que $q\psi(\overline{e}) = \{e\}$; soit H' l'application de C dans $\mathcal{H}' : f \to \sigma' \times (\overline{e'}, \xi, \overline{e})$, où $\xi(e) = e'$, $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Soit $\eta = (C^{\cdot}, S, \kappa')$ l'espèce de structures dominée par $(C^{\cdot}, H')$ (qui est l'espèce de structures associée au foncteur constant $f \to q\psi(\sigma')$). Alors

$$\overline{\eta} = ((C^{\cdot}, s), (S, \sigma' \times s_o), \kappa'), \qquad \text{où } s_o \overset{\frown}{q} s,$$

est un $\mathcal{H}$- espace de structures et $(\overline{\eta}, H')$ est un Ψ - espace de structures, appelé le Ψ *- espace de structures trivial défini par* $(C^{\cdot}, s, \sigma')$.

2) Soit $\mathcal{O}$ la catégorie des triplets $(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1)$, où $\tilde{E}_i = (E^+_i, (K_i, +, .))$ est un espace vectoriel topologique sur le corps topologique $(K_i, +, .)$, où φ est un isomorphisme topologique du corps $(K_1, +, .)$ sur $(K_2, +, .)$ et où φ' est un homomorphisme continu du groupe topologique E^+_1 dans E^+_2 tel que :

$$\varphi'(kx) = \varphi(k)\varphi'(x) \qquad \text{si } x \in E_1 \text{ et } k \in K_1.$$

La loi de composition sur $\mathcal{O}$ est définie par :

$$(\tilde{E}_3, (\varphi'_1, \varphi_1), \tilde{E}_2).(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (\tilde{E}_3, (\varphi'_1\varphi', \varphi_1\varphi), \tilde{E}_1).$$

Soit ν le foncteur de $\mathcal{V}$ vers la catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$ des applications continues entre espaces topologiques tel que :

$$\nu(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (E_2 \times K_2, \varphi' \times \varphi, E_1 \times K_1).$$

Soit $\mathcal{G}_1$ (resp. $\mathcal{G}_2$) la catégorie des homomorphismes continus entre groupes abéliens (resp. corps) topologiques et soit $\overline{p}_i = (\mathcal{M}, p_i, \mathcal{G}_i)$ le foncteur fidèle canonique, où $i = 1, 2$. Soient $\overline{p'_i}$ les foncteurs de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}_i$:

$$\overline{p'_1}(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (E_2^+, \varphi', E_1^+)$$
$$\overline{p'_2}(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = ((K_2, +, .), \varphi, (K_1, +, .)).$$

Soit $(\overline{\eta}, H')$ un ν-espace de structures, où

$$\overline{\eta} = ((C^\bullet, s), (S, \sigma), \kappa') \quad \text{et} \quad H'(e) = (E_e^+, (K_e, +, .)) \quad \text{pour tout } e \in C_o^\bullet.$$

Soit $\overline{e}_1$ (resp. $\overline{e}_2$) le groupe (resp. anneau) atomique tel que $p_i(\overline{e}_i) = e$, $i = 1, 2$. Si $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, posons $G_i(f) = \overline{p'_i}\, H'(f) \times \xi_i$, où ξ_i est l'isomorphisme trivial de $\overline{e}_i$ sur $\overline{e'_i}$. $(C^\bullet, G_i)$ est un couple dominant dans $(p_i, \mathcal{G}_i)$ une espèce de structures $\eta_i = (C^\bullet, S_i, \kappa'_i)$. Soit σ_1 (resp. σ_2) la topologie sur S_1 (resp. S_2) homéomorphe à la topologie induite par σ sur la classe des couples $(z, 0_e)$, où 0_e est le 0 de $(K_e, +, .)$ (resp. $(0'_e, k)$, où $0'_e$ est l'unité de E_e^+). En posant

$$\overline{\eta}_i = ((C^\bullet, s), (S_i, \sigma_i), \kappa'_i),$$

$(\overline{\eta}_i, G_i)$ est un $\overline{p'_i}$-espace de structures. Un ν-espace de structures est appelé un espace fibré vectoriel généralisé; c'est un espace fibré vectoriel ordinaire si $C^\bullet$ est un groupoïde localement trivial et si $(\overline{\eta}_2, G_2)$ est le $\overline{p'_2}$-espace de structures trivial défini par $(C^\bullet, s, (K, +, .))$.

Soit $(\overline{\eta}, \overline{\mu}, F)$ un $\mathcal{H}$-espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$-espace de morphismes (nous reprenons les notations antérieures). Supposons que $(\overline{\eta}, H')$ et $(\overline{\mu}, \overline{H}')$ soient des Ψ-espaces de structures et que, pour tout $e \in \pi'(S_o)$, $F'(e) = ((G(e), \overline{H}'(e)), H'(e), \kappa'(e))$ soit un $\mathcal{H}'$-espace de structures. Ceci équivaut à se donner une espèce de structures (η, F') dominée dans $(p_2^{\mathcal{H}'}, \overline{\mathcal{Q}}(\mathcal{H}'))$ telle que :

$$\psi\, p_2^{\mathcal{H}'}\, F' = H \quad \text{et} \quad \psi \overline{\psi}\; p_1^{\mathcal{H}'}\, F' = \overline{H}.$$

PROPOSITION. *$(\eta, \hat{H}')$ est un Ψ-espace de structures, où $\hat{H}'(e)$ est, pour tout $e \in \pi'(S_o)$, la catégorie $\mathcal{H}'$-structurée des hypermorphismes [4c] associée à $F'(e)$.*

DEFINITION. *Avec les notations précédentes, on dira que $(\overline{\eta}, \overline{\mu}, F')$ est* un Ψ-espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$-espace de morphismes.

Bibliographie.

[1] C. EHRESMANN. Catégories structurées, Ann. Ec. Norm. Sup. 1963.

[2] C. EHRESMANN. Structures quotient, Comm. Math. Helv. 1964, p. 209.

[3] C. EHRESMANN. Quintettes et applications covariantes, Sém. Topo. et Géo. diff. (Ehresmann) 1963, V.

[4] C. EHRESMANN. C.R.A.S. 256, 1963 : a) p. 1198 ; b) p. 1891 ; c) p. 2080 et 2280 ; d) 258 , 1964 p. 2461 .

[5] C. EHRESMANN. Elargissements de catégories, Sém. Topo. et Géo. diff. III , 1961 .

[6] J. FRENKEL. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math. de France, t. 85 , 1957 , II , p. 135 .

[7] P.J. HILTON. Note on free and direct products in general categories, Bull. Soc. Math. Belgique, XIII, 1961 .

[8] S. MAC LANE. Homology, Springer-Verlag, Berlin. 1963.