Charles Ehresmann

Catégories structurées quotient

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 5 (1963), exp. nº 3, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1963__5__A4_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

Juin 1963

CATEGORIES STRUCTUREES QUOTIENT

par Charles EHRESMANN

Cette Note réunit les principaux résultats concernant le problème du passage au quotient dans les catégories structurées; leur démonstration, assez longue, est exposée dans le mémoire «Structures quotient», partie II, actuellement à l'impression dans Comm. Mat. Helv. (multigraphié à Paris, Juin 1963). Les notations sont celles de [1]; en particulier le groupoïde des éléments inversibles d'une catégorie $\mathcal{K}$ est désigné par $\mathcal{K}_\gamma$.

Soit $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite à produits finis [1] et saturée au-dessus de $\mathfrak{M}$ (c'est-à-dire $p(\mathcal{H}_\gamma)$ est une sous-catégorie saturée de $\mathfrak{M}$). Soient $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ deux sous-catégories de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_\gamma$; les restrictions de p à $\mathcal{H}'$ et à $\mathcal{H}''$ sont désignées par p' et p'' respectivement.

Soit $\mathfrak{N}'_o$ la classe des graphes multiplicatifs [1] $G^\bullet$ tels que $G \in \mathfrak{M}_o$. Si $G^\bullet \in \mathfrak{N}'_o$, nous désignons par :

$G^\bullet * G^\bullet$ la classe des couples composables $(g', g) \in G \times G$,

$G^\bullet_\alpha$ la classe des couples $(g, \alpha(g))$, où $g \in G$,

γ_α la bijection : $g \to (g, \alpha(g))$ de G sur $G^\bullet_\alpha$.

Soit $\mathfrak{N}'$ la catégorie des homomorphismes entre graphes multiplicatifs (appelée $\mathcal{G}$ dans [1]) dont les éléments sont les triplets $(\overline{G}^\bullet, f, G^\bullet)$ tels que : $G^\bullet \in \mathfrak{N}'_o$, $\overline{G}^\bullet \in \mathfrak{N}'_o$, $(\overline{G}, f, G) \in \mathfrak{M}$, $f(G^\bullet_o) \subset \overline{G}^\bullet_o$, $f(G^\bullet * G^\bullet) \subset \overline{G}^\bullet * \overline{G}^\bullet$ et

$$f(g'.g) = f(g').f(g) \text{ si } (g', g) \in G^\bullet * G^\bullet.$$

Soit $p_{\mathfrak{N}'}$ le foncteur de $\mathfrak{N}'$ vers $\mathfrak{M}$ défini par :

$$(\overline{G}^\bullet, f, G^\bullet) \to (\overline{G}, f, G).$$

DEFINITION. *On appellera* graphe multiplicatif $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structuré *(resp.* fortement $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structuré) *un triplet* $(G^\bullet, s, s')$ *vérifiant les conditions suivantes :* *

1) $G^{\bullet} \in \mathcal{N}'_o$, $s \in \mathcal{H}_o$, $s' \in \mathcal{H}_o$, $p(s') = G^{\bullet} * G^{\bullet}$ *(resp.* $p(s') = G^{\bullet} * G^{\bullet}$ *et* $s' \underset{p}{\propto} s \times s$*) et* $p(s) = G$.

2) Il existe $s_\alpha \underset{p}{\propto} s'$ *tel que* $p(s_\alpha) = G^{\bullet}_\alpha$ *et* $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in \mathcal{H}_\gamma$.

3) On a : $(s, \kappa(G^{\bullet}), s') \in \mathcal{H}''$, *où* $\kappa(G^{\bullet})$ *désigne l'application :*

$$(g, f) \to g.f,\ (g, f) \in G^{\bullet} * G^{\bullet}.$$

4) Il existe $s_o \in \mathcal{H}_o$ *tel que* $(s, \iota, s_o) \in \mathcal{H}$, $p(s_o) = G^{\bullet}_o$ *et*

$$(s_o \times s_o, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}',\ \text{où } [\beta, \alpha](f) = (\beta(f), \alpha(f)), f \in G.$$

La donnée du couple $(G^{\bullet}, s')$ (resp. ou $(G^{\bullet}, s)$) définit entièrement le graphe multiplicatif $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structuré (resp. fortement $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structuré) $(G^{\bullet}, s, s')$. La condition 4 entraîne $s_o \underset{p}{\propto} s$.

DEFINITION. *On dit que* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *est une* catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structurée *si* $\mathcal{C}^{\bullet}$ *est une catégorie et si* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *est un graphe multiplicatif fortement* $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$*- structuré (voir [1]).*

Soit $\mathcal{N}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')_o$ (resp. $\bar{\mathcal{N}}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')_o$) la classe des graphes multiplicatifs $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structurés (resp. fortement $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structurés).

DEFINITION. *On appellera* homomorphisme $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structuré *(resp.* fortement $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structuré*) un triplet*

$$\bar{\Phi} = ((\bar{G}^{\bullet}, \bar{s}, \bar{s}'), \Phi, (G^{\bullet}, s, s'))$$

vérifiant les conditions suivantes :

1) $(G^{\bullet}, s, s') \in \mathcal{N}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')_o$ *(resp.* $\in \bar{\mathcal{N}}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')_o$*) et* $(\bar{G}^{\bullet}, \bar{s}, \bar{s}') \in \mathcal{N}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')_o$ *(resp.* $\in \bar{\mathcal{N}}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')_o$*).*

2) $\hat{p}_{\mathcal{M}}(\bar{\Phi}) = (\bar{G}, \Phi, G) \in \mathcal{M}$; $\hat{p}_{\mathcal{N}'}(\bar{\Phi}) = (\bar{G}^{\bullet}, \Phi, G^{\bullet}) \in \mathcal{N}'$ *et* $(\bar{s}', \Phi * \Phi, s') \in \mathcal{H}$, *où* $\Phi * \Phi$ *est la restriction de* $\Phi \times \Phi$ *à* $G^{\bullet} * G^{\bullet}$.

Ces conditions entraînent : $\hat{p}_{\mathcal{H}}(\Phi) = (\bar{s}, \Phi, s) \in \mathcal{H}$.

THEOREME. *Soit* $\mathcal{N}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ *(resp.* $\bar{\mathcal{N}}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$*) la classe des foncteurs* $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$*- structurés (resp. fortement* $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$*- structurés). Alors* $(\mathcal{M}, \hat{p}_{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{N}}', \tilde{\mathcal{N}}'_\gamma)$, $(\mathcal{N}', \hat{p}_{\mathcal{N}'}, \tilde{\mathcal{N}}', \tilde{\mathcal{N}}'_\gamma)$ *et* $(\mathcal{H}, \hat{p}_{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{N}}', \tilde{\mathcal{N}}'_\gamma)$ *sont des catégories d'homomorphismes, où* $\tilde{\mathcal{N}}'$ *peut être lu* $\mathcal{N}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ *ou* $\bar{\mathcal{N}}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$. *Si* $\mathcal{H}'$ *et* $\mathcal{H}''$ *sont des sous-catégories de* $\mathcal{H}$ *stables par produits [1],* $(\mathcal{M}, \hat{p}_{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{N}}', \tilde{\mathcal{N}}'_\gamma)$ *est à produits finis.*

Supposons que la sous-catégorie $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ vérifie la condition (σ) (voir proposition 10, I, [2]) : $S' \underset{p}{\propto} S$ entraîne $S' \underset{p'}{\propto} S$.

THEOREME. *Supposons que* $\mathcal{H}''$ *vérifie aussi la condition* (σ). *Soit* $(G^{\bullet}, s, s') \in \tilde{\mathcal{N}}'_o$. *Les conditions :*

$$\overline{G}^{\cdot} \underset{p_{\mathfrak{N}'}}{\propto} G^{\cdot}, \ \overline{s}' \underset{p}{\propto} s' \ \text{ et } \ p(\overline{s}') = \overline{G}^{\cdot} * \overline{G}^{\cdot}$$

assurent l'existence d'une sous-structure $(\overline{G}^{\cdot}, \overline{s}, \overline{s}')$ *de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *dans* $(\mathfrak{M}, \hat{p}_{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{N}}', \tilde{\mathfrak{N}}'_{\gamma})$. *De plus* $(\mathfrak{M}, \hat{p}_{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{N}}', \tilde{\mathfrak{N}}'_{\gamma})$ *est résolvante à droite.*

COROLLAIRE. *Supposons de plus* $\mathcal{H}'$ *et* $\mathcal{H}''$ *stables par produits. Si on a :*

$$((G^{\cdot}, s); \kappa_i, (G_i, s_i)) \in \overline{\mathfrak{N}}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}''),$$

où $i = 1, 2$, *alors il existe* $\sigma \propto s_1 \times s_2$ *tel que* $(\kappa_2^*(G_1^{\cdot}, \kappa_1), \sigma) \in \overline{\mathfrak{N}}'(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')_o$.

Si ρ est une relation d'équivalence sur une classe G, nous désignons par $\tilde{\rho}$ l'application : $x \to x$ *modulo* ρ de G sur G/ρ.

THEOREME. *Soient* $(G^{\cdot}, s, s') \in \mathfrak{N}'(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$ *et* ρ *une relation d'équivalence bicompatible sur* $G^{\cdot}$ *(voir* [1]*). Si on a* $(\overline{s}', \tilde{\rho} * \tilde{\rho}, s') \in \mathcal{H}^s(\mathfrak{M}^s, p)$, *où* $\mathcal{H}^s(\mathfrak{M}^s, p)$ *est la classe des* $(\mathfrak{M}^s, p)$*-surjections, il existe* $s/\rho \overset{p}{\prec} s$ *et* $(G^{\cdot}/\rho, s/\rho, \overline{s}')$ *est un graphe multiplicatif* $(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$*-structuré quotient de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *par* ρ.

Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ telle qu'il existe une catégorie quotient strict $\mathcal{C}^{\cdot}/\rho$. Soit $\rho * \rho$ (resp. ρ_o) la relation d'équivalence induite par la relation d'équivalence produit $\rho \times \rho$ sur $\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ (resp. par ρ sur $\mathcal{C}_o^{\cdot}$).

THEOREME. *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *une catégorie* $\mathcal{H}$*-structurée et* $(\overline{s}', \tilde{\rho} * \tilde{\rho}, s') \in \mathcal{H}^s(\mathfrak{M}^s, p)$. *Si les relations* $(\tilde{s}', \iota, \overline{s}') \in \mathcal{H}$ *et* $p(\tilde{s}') = (\mathcal{C}^{\cdot}/\rho) * (\mathcal{C}^{\cdot}/\rho)$ *entraînent* $\overline{s}' = \tilde{s}'$, *alors il existe* $s/\rho \overset{p}{\prec} s$ *et* $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, s/\rho)$ *est une catégorie* $\mathcal{H}$*-structurée quotient de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *par* ρ.

COROLLAIRE 1. *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *une catégorie double* [1]. *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ *admet une catégorie quotient (resp. quotient strict) par* $\rho * \rho$, *alors il existe une catégorie double* $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, (\mathcal{C}/\rho)^{\perp})$ *(resp.* $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, \mathcal{C}^{\perp}/\rho)$*) quotient de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *par* ρ.

COROLLAIRE 2. *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *une catégorie topologique* [1]*; supposons* $\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ *saturé pour* $\rho \times \rho$ *(resp. supposons* ρ *fermée) et* s *séparée. Si* $s \times s/\rho \times \rho$ *est homéomorphe à* $s/\rho \times s/\rho$ *(par exemple si* ρ *est ouverte), alors* $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, s/\rho)$ *est une catégorie topologique quotient de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$.

Soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des homomorphismes $((M', <), f, (M, <))$ entre classes ordonnées, tels que $(M', f, M) \in \mathfrak{M}$. Nous utiliserons les sous-catégories de $\tilde{\Omega}$ dont les éléments sont les $((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$ vérifiant les conditions suivantes, où $x \in M$, $x' \in M$, $x'' \in M$, $y \in M'$:

$\tilde{\Omega}'$: si $x' < x$ et $f(x') = f(x)$, alors $x' = x$.

$\tilde{\Omega}''$: si $y < f(x)$, il existe $x' < x$ tel que $f(x') = y$.

$\mathfrak{J}^{ps}$: $(M, <)$ et $(M', <)$ sont des classes sous-préinductives [2] ; on a

$$f(x' \cap x'') = f(x') \cap f(x''), \ \text{ si } \ x' < x \ \text{ et } \ x'' < x.$$

$\mathcal{J}^s$: $(M,<)$ et $(M',<)$ sont des classes sous-inductives [2] ; on a $((M',<), f, (M,<)) \in \mathcal{J}^{ps}$ et, si C est une sous-classe de M admettant un x-agrégat, $(f \overset{x}{\cup} C) = \overset{y}{\cup} f(C)$, où $y = f(x)$.

$\mathcal{J}$: $(M',<)$ et $(M,<)$ sont des classes inductives [2] et $((M',<), f(M,<)) \in \mathcal{J}^s$.

On pose : $\mathcal{J}''^{ps} = \mathcal{J}^{ps} \cap \tilde{\Omega}''$; $\mathcal{J}''^s = \mathcal{J}^s \cap \tilde{\Omega}''$ et $\mathcal{J}'' = \mathcal{J} \cap \tilde{\Omega}''$.

Une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structurée est dite *ordonnée* [1] ; une catégorie ordonnée qui est aussi $\mathcal{J}^{ps}$- (resp. $\mathcal{J}^s$-, resp. $\mathcal{J}$-) structurée est dite [1] *sous-préinductive* (resp. *sous-inductive*, resp. *inductive*).

THEOREME. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie ordonnée. Si on a $(\bar{s}', \tilde{\rho} * \tilde{\rho}, s') \in \tilde{\Omega}''$ et si la condition suivante est vérifiée :*

(a) Les conditions $E \in \mathcal{C}^{\cdot}_o, e \in \mathcal{C}^{\cdot}_o, e' \in \mathcal{C}^{\cdot}_o, e < E, e' < E$ et $\tilde{\rho}_o(e) = \tilde{\rho}_o(e')$ entraînent $e = e'$.

alors il existe une catégorie ordonnée $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, s/\rho)$ quotient de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$.

THEOREME. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive); si $(\bar{s}', \tilde{\rho} * \tilde{\rho}, s') \in \mathcal{J}''^{ps}$ (resp. $\in \mathcal{J}''^s$, resp. $\in \mathcal{J}''$) et si (a) est vérifiée, alors il existe $s/\rho \prec s$ et $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, s/\rho)$ est une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$. On peut remplacer dans ce théorème le mot catégorie par le mot groupoïde* (voir [2] pour la définition d'un groupoïde sous-préinductif,..).

Soit $(M,<) \in \tilde{\Omega}_o$. On dit qu'une relation d'équivalence ρ sur M est *compatible* sur $(M,<)$ si la relation définie par :

$$\tilde{\rho}(x) < \tilde{\rho}(y) \text{ si, et seulement si, il existe } x' \sim x \text{ et } y' \sim y$$

est une relation d'ordre sur M/ρ. On dit que $((M',<), f, (M,<)) \in \mathcal{J}^{ps}$ (resp. $\in \mathcal{J}^s$) *vérifie la condition* (q^{ps}) (resp. (q^s)) si les conditions $y \in M'$ et $y_i < y$ pour tout $i \in I$, où I est un ensemble fini (resp. quelconque) entraînent qu'il existe $x \in M$ et $x_i < x$ tels que :

$$f(x) = y \qquad \text{et} \qquad f(x_i) = y_i \qquad \text{pour tout } i \in I.$$

THEOREME. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie ordonnée (resp. sous-préinductive, resp. sous-inductive, resp. inductive). Supposons $\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ saturée pour $\rho \times \rho$. Si ρ est compatible sur s (resp. si $(s/\rho, \tilde{\rho}, s)$ vérifie la condition (q^{ps}), resp. la condition (q^s), resp. la condition (q^s)), $\rho * \rho$ est compatible sur s' ; si de plus (a) est vérifiée, $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, s/\rho)$ est une catégorie ordonnée (resp. sous-préinductive, resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ par ρ.*

Références.

[1] C.R.A.S. 256, Paris, 1963, p. 1198, 1891, 2080, 2280 et 5031. Ces notes résument les articles : Catégories structurées, Ann. Ec. Norm. Sup. (sous presse), Sous-structures et catégories ordonnées, Fund. Mate. (sous presse), Structures quotient ,Comm. Mat. Helv. (sous presse); ces articles sont aussi multigraphiés à Paris (Avril-Juin 1963).

[2] Elargissements de catégories, Sém. Topo. et Géo. diff. (Ehresmann), III, 1961.

* Le symbole $\hookrightarrow$ (resp. $\twoheadrightarrow$) signifie : "est sous-structure de" (resp. " est structure quotient de")