Françoise Benzecri-Le Roy

Classification des sections méromorphes des espaces fibrés projectifs

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 4 (1962-1963), exp. n° 3, p. 1-82

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1962-1963__4__A3_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Séminaire dirigé par Charles EHRESMANN

décembre 1962

CLASSIFICATION DES SECTIONS MEROMORPHES DES ESPACES FIBRES PROJECTIFS

par Françoise BENZECRI-LE ROY

INTRODUCTION

Le principe du travail est le suivant : ramener l'étude des sections méromorphes des espaces fibrés projectifs à celle des sections holomorphes d'un espace fibré vectoriel. Certains des résultats ainsi obtenus ont des corollaires simples relatifs aux sections méromorphes des espaces fibrés en variété de Grassmann.

Nous avons rassemblé au chapitre I les notions et résultats -pour la plupart classiques- utiles dans la suite du travail. Les notions données au § 1 sur les applications holomorphes et méromorphes d'une variété analytique complexe dans une autre et, plus particulièrement, sur les sections holomorphes et méromorphes d'un espace fibré analytique complexe, ainsi que sur les diviseurs sur une variété analytique complexe seront utilisées dès le chapitre II. La construction -donnée au § 2- d'un espace fibré principal dont le faisceau des sections holomorphes soit isomorphe à un faisceau principal donné sera utilisée aux chapitres III et IV. La notion de puissance extérieure $p^{\text{ème}}$ d'un espace fibré projectif donnée au § 3 est utilisée au chapitre IV § 3: elle vise à identifier un espace fibré en variété de Grassmann à un sous-espace fibré d'un espace fibré projectif (de même que l'espace fibré des sous-espaces vectoriels de dimension p associé à un espace fibré vectoriel E s'identifie à un sous-espace fibré de $P({}^{p}\Lambda E)$ -espace fibré projectif associé à ${}^{p}\Lambda E$).

Au chapitre II, on étudie localement les sections méromorphes d'un espace fibré projectif $P(E)$ -identifié à $U \times P(C^n)$- associé à un espace fibré vectoriel E -identifié à $U \times C^n$. On démontre que toute section méromorphe de $U \times P(C^n)$ -pour U assez petit- peut être définie par une section holomorphe de $U \times C^n$, celle-ci étant unique à un multiplicateur holomorphe inversible près. Ce résultat s'applique aux sections méromorphes de $P({}^{p}\Lambda E)$. Nous démontrons ensuite pour tout "p-champ de E" (§ 1 déf. 3) l'existence locale d'un nombre fini de sections holomorphes de E définissant le p-champ. En un point régulier ce nombre est p; en un point singulier, il arrive que l'on ne puisse pas définir le p-champ par p sections holomorphes de E mais seulement par un nombre plus grand. Revenant au cas des sections méromorphes de $P(E)$, on achève cette étude locale par la définition, en tout point de la base, d'un indice à valeurs entières positives (aux points singuliers) ou nulles (aux points réguliers). Etant donné un point x de B et un nombre entier q, il existe localement une section méromorphe de $P(E)$ pour laquelle x soit un point singulier d'indice q.

Au chapitre III, on aborde l'étude globale des sections méromorphes d'un espace fibré projectif analytique complexe $\mathbf{P}$. Au § 1, on considère - lorsqu'ils existent- les espaces fibrés vectoriels dont l'espace fibré projectif associé est isomorphe à $\mathbf{P}$. Plus précisément, on définit les "couples associés à $\mathbf{P}$" : ce sont des espaces fibrés vectoriels munis d'une "projection admissible" sur $\mathbf{P}$ (§ 1 déf. 1). On fait une classification de ces couples grâce à la notion d'isomorphisme de couples" (§ 1 déf. 2). On démontre que $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ - ensemble des classes de couples- est un espace homogène de $H^1(B, C^*_\omega)$. Au § 2, est posé le problème de l'existence de tels couples. A toute section méromorphe Γ de $\mathbf{P}$, on associe de façon canonique un espace fibré vectoriel $E(\Gamma)$ muni d'une projection admissible $\rho(\Gamma)$ sur $\mathbf{P}$; $E(\Gamma)$ est muni d'une section holomorphe globale, $s(\Gamma)$, définissant Γ par $\rho(\Gamma)$. Ce théorème d'existence, joint à un résultat de Serre valable dans le cas où la base B de $\mathbf{P}$ est algébrique projective compacte permet d'énoncer : une condition nécessaire (resp. nécessaire et suffisante) pour que $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{P}$ de base B algébrique projective compacte) soit isomorphe à $P(E)$ pour E convenable est que $\mathbf{P}$ admette une section méromorphe globale.

Au chapitre IV, la base B est supposée compacte. On utilise la classification des couples pour classer les sections méromorphes de $\mathbf{P}$. On étudie la structure d'une classe de sections méromorphes de $\mathbf{P}$, puis, utilisant la structure ordonnée de $H^1(B, C^*_\omega)$ on étudie la structure ordonnée des classes de sections. L'ensemble $i^{-1}(k)$ des sections d'une même classe constitue un ouvert de Zariski, $\eta(i^{-1}(k))$, d'un espace projectif, $P(k)$, de dimension finie. On définit une application γ de $P(k)$ dans l'ensemble $M(\mathbf{P})$ de toutes les sections méromorphes de $\mathbf{P}$, mettant en correspondance les éléments de $P(k)$ et les sections de $\mathbf{P}$ de classe inférieure ou égale à k (pour cela, on fait usage de l'espace fibré en droite "réciproque" $F(\Gamma, \rho)$ d'une section méromorphe Γ de $\mathbf{P}$ par une projection admissible ρ construit au § 1 du chapitre IV ainsi que de la première formule donnée au n° 2 § 1). Enfin, un dernier paragraphe traite de l'étude globale des singularités d'une section méromorphe de $\mathbf{P}$. L'existence, démontrée au chapitre III, de $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$ permet d'identifier le cycle des singularités de Γ au cycle des zéros de $s(\Gamma)$. En général, on peut seulement dire que ce cycle est de codimension analytique supérieure ou égale à 2. Si la base B de $\mathbf{P}$ est de dimension n, $\mathbf{P}$ étant de fibre $P(C^n)$, une section Γ de $\mathbf{P}$ est à singularités simples isolées si et seulement si $s(\Gamma)$ est transverse à la section nulle (cf. chap. II §4). Dans le cas où $\mathbf{P}$ est de fibre $P(C^n)$, où B est algébrique projective compacte, et où $s(\Gamma)$ est transverse à la section nulle, la classe - pour l'équivalence rationnelle - du cycle des zéros de $s(\Gamma)$ est la classe de Chern $C_n(E(\Gamma))$ (Grothendieck). Si l'on connait les classes de Chern $C_i(E)$ - (E, ρ) étant un couple quelconque associé à $\mathbf{P}$ - et $C_1(F(\Gamma, \rho))$, on peut calculer $C_n(E(\Gamma))$; en particulier, lorsque $\mathbf{P}$ est l'espace fibré des éléments de contact de B, E l'espace fibré des vecteurs tangents à B, on sait calculer $C_i(E)$ et $C_1(F(\Gamma, \rho))$ et, par suite, $C_n(E(\Gamma))$. Lorsque B est algébrique projective compacte de dimension n - $\mathbf{P}$ étant toujours de fibre $P(C^n)$ - et Γ à singularités simples isolées, $C_n(E(\Gamma))$ donne le nombre de singularités de Γ.

Monsieur C. Ehresmann m'a indiqué le sujet de cette thèse et en a patiemment dirigé l'étude. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude. J.P. Benzecri a surveillé la rédaction avec une rigueur bienveillante. Monsieur Favard me fait l'honneur de présider le jury et Monsieur Deheuvels a bien voulu examiner mon travail. Je leur en dois une particulière reconnaissance.

CHAPITRE UN

PRELIMINAIRES

1. Variétés analytiques complexes.

Nous ne rappellerons pas la définition de ces variétés, ni celle des espaces fibrés analytiques complexes ayant pour groupe structural un groupe de Lie analytique complexe.

1. *CORRESPONDANCES ANALYTIQUES.*

Dans ce numéro, nous précisons la définition des applications méromorphes d'une variété analytique complexe dans une autre : si la variété but est supposée compacte, les notions de singularités ordinaires ou essentielles se définissent simplement. D'autre part, en vue du chapitre IV, nous énonçons un résultat (cf prop. 6) dont la démonstration reprend divers points d'un travail de Remmert.

DEFINITION 1. *Correspondance ensembliste.*

Soient X, Y deux ensembles. Nous noterons p^X (resp. p^Y) la projection du produit $X \times Y$ sur X (resp. Y).

Une correspondance ensembliste entre X et Y est définie par la donnée d'une partie Γ de $X \times Y$: Γ est le graphe de la correspondance ; à $x \in X$ correspond la partie de Y :

$$\Gamma(x) = p^Y((x \times Y) \cap \Gamma) \subset Y$$

Soit $X' \subset X$; la restriction à X' de la correspondance Γ est la correspondance qui a pour graphe :

$$\Gamma' = \Gamma \cap (X' \times Y)$$

Une correspondance Γ définit une application de X dans Y si à tout élément de X correspond un élément unique de Y.

DEFINITION 2. *Sous-ensembles analytiques.*

Une partie Γ d'une variété analytique X est un sous-ensemble analytique de X en $x \in X$ si il existe un voisinage $U(x)$ de x dans X et un système fini $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ de fonctions holomorphes (à valeurs dans C) définies sur $U(x)$ et telles que :

$$\Gamma \cap U(x) = \{ y \mid y \in U(x) ; \forall i \in I, \ \varphi_i(y) = 0 \}$$

Γ *est un* sous ensemble-analytique de X *s'il est un sous-ensemble analytique de* X *en tout point* $x \in \Gamma$. *On notera que (sauf si* Γ *est fermé) cette condition n'implique pas que* Γ *soit un sous-ensemble analytique de* X *en tout* $x \in X$.

DEFINITION 3. *Irréductibilité.*

Un sous-ensemble analytique de X, Γ, *(resp. une variété analytique,* X, *) est* irréductible *s'il n'existe pas de système fini* $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ *de sous-ensembles analytiques de* X *tels que :*

$$\cup \Gamma_i = \Gamma \quad (\text{ resp. } \cup \Gamma_i = X)$$

$$\forall i \in I, \overline{\Gamma}_i \cap \Gamma = \Gamma_i \quad (\text{ resp. } \forall i \in I, \overline{\Gamma}_i = \Gamma_i)$$

DEFINITION 4. *Correspondance analytique.*

On suppose maintenant que X *et* Y *(cf déf. 1) sont munis d'une structure de variété complexe.*

Une correspondance Γ *est* analytique *(resp.* analytique irréductible *) si le graphe* Γ *est un sous-ensemble analytique (resp. analytique irréductible) de la variété produit* $X \times Y$.

Une application holomorphe - *ou* analytique régulière - *de* X *dans* Y *est une application continue définie par une correspondance analytique. Soient* Γ *une application holomorphe ;* $x \in X$; $y = \Gamma(x)$; $(x_1, \dots, x_n)$ *(resp.* $y_1, \dots, y_m$*) des coordonnées locales sur* X *(resp.* Y *) sur un voisinage* $U(x)$ *de* x *(resp.* $V(y)$ *de* y*). Pour tout* $x' \in U(x)$, *les coordonnées* y'_i *de* $\Gamma(x')$ *s'expriment par des fonctions holomorphes de plusieurs variables (au sens ordinaire) en les coordonnées* x'_i *de* x'.

DEFINITION 5. *Applications analytiques avec singularités.*

Nous supposerons désormais X *irréductible et* Y *compact.*

Une correspondance analytique irréductible Γ *définit une* application analytique avec singularités *de* X *dans* Y *s'il existe un ouvert partout dense* X' *de* X *tel que la restriction de* Γ *à* X' *soit une application holomorphe de* X' *dans* Y.

Un point x *de* X *est* régulier *pour* Γ *s'il existe un voisinage* X'' *de* x *dans* X *tel que la restriction de* Γ *à* X'' *soit une application holomorphe.*

Un point de X *non régulier est dit* singulier *; un point* x *de* X *est singulier* ordinaire *si est vérifiée la condition suivante :*

Γ *est un sous-ensemble analytique de* $X \times Y$ *en tout point de* $x \times Y$.

On notera que cette condition ne résulte pas nécessairement de ce que Γ *est analytique en tout point de* Γ *(cf def. 2).*

Un point singulier $x \in X$ est dit lacunaire *s'il existe une correspondance analytique Γ' satisfaisant à :*

$$\Gamma' \supset \Gamma \quad et \quad \Gamma'(x) \neq \Gamma(x)$$

et définissant une application analytique de X dans Y pour laquelle x est régulier ou singulier ordinaire.

Un point singulier $x \in X$ qui n'est ni ordinaire ni lacunaire est dit singulier essentiel.

DEFINITION 6. *Applications méromorphes.*

Une application analytique avec singularités est dite méromorphe *(resp. méromorphe avec lacunes) si elle n'a que des singularités ordinaires (resp. des singularités ordinaires ou lacunaires). Le graphe Γ (resp. la fermeture du graphe : $\overline{\Gamma}$) d'une application méromorphe (resp. méromorphe avec lacunes) est un sous-ensemble analytique irréductible fermé de $X \times Y$; l'image d'un point x de X par une application méromorphe est un sous-ensemble analytique compact de Y (Y est compact). La correspondance définie par la fermeture du graphe d'une application méromorphe avec lacunes est une application méromorphe.*

PROPOSITION 1. *Soient X, Y deux variétés analytiques complexes; X est supposée irréductible, Y compacte. Soient Γ le graphe, supposé irréductible, d'une application analytique de X dans Y; S (resp. S') l'ensemble des points singuliers (resp. singuliers essentiels).*

Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

I. S est de codimension analytique supérieure ou égale à 2;

II. $\overline{\Gamma}$ définit une application méromorphe de X dans Y;

III. S' est de codimension analytique supérieure ou égale à 2;

IV. $S' = \phi$.

Rappelons qu'une partie P de Z analytique est dite de codimension analytique supérieure ou égale à 2 si quel que soit $x \in Z$, il existe $U(x)$- voisinage ouvert de x dans Z- et $\Sigma(x)$ - sous-ensemble analytique de Z qui peut être défini comme ensemble des zéros communs à deux fonctions holomorphes, mais non comme lieu des zéros d'une seule fonction holomorphe- tels que :

$$U(x) \cap P \subset \Sigma(x).$$

L'équivalence des propriétés II et IV résulte de la définition 6; celle des propriétés III et IV du théorème deLévi; pour l'ensemble des démonstrations, voir Stoll [7].

COROLLAIRE. *Soit X de dimension ≥ 2, Y compact. Une application analytique $X \to Y$ ne peut avoir de singularité essentielle isolée.*

L'objet de la proposition 2 ci-dessous est de montrer le rapport entre la notion, nouvelle, d'application méromorphe et celle, classique, de fonction méromorphe ; une telle fonction est définie sur un ouvert partout dense dans X et coïncide au voisinage de tout point de X avec le quotient de deux fonctions holomorphes (elle est donc définie, infinie, ou indéterminée aux mêmes points que ce quotient).

PROPOSITION 2. *Nous supposons que Y est l'espace projectif rapporté aux coordonnées homogènes $\eta_1, \dots, \eta_n$.*

Soit Γ une correspondance analytique entre X et Y telle que $\Gamma(x)$ ne soit pas, pour tout $x \in X$, identiquement contenu dans l'hyperplan d'équation $\eta_\nu = 0$.

Γ est une application méromorphe si et seulement si, quel que soit i distinct de ν, le quotient $\dfrac{\eta_i}{\eta_\nu}$ calculé au point $\Gamma(x)$ est une fonction méromorphe de x.

Les définitions et propositions ci-dessus se trouvent rappelées ou démontrées notemment dans Stoll [7]. Pour les résultats qui suivent, nous faisons référence à Remmert [9].

Soit Γ une correspondance analytique entre deux variétés analytiques complexes X, Y sur lesquelles on ne fait pas d'hypothèses complémentaires avant les propositions 5 et 6.

Nous noterons :

$p = p^y$;

$z \in \Gamma$ un point du graphe Γ ;

$s(z)$ la dimension de Γ en z ;

$d(z)$ la dimension en z de la fibre $p^{-1}(p(z)) \cap \Gamma$;

$r(z)$ le rang : $s(z) - d(z)$.

PROPOSITION 3. *La fonction $d(z)$ est semi-continue supérieurement sur Γ.*

DEMONSTRATION.

cf Remmert [9] page 436 Satz 16 : en vue d'établir que si Γ est « rein-dimensionale » en z, $r(z)$ est semi-continue inférieurement, Remmert démontre (sans hypothèses sur Γ) que $d(z)$ est semi-continue supérieurement.

PROPOSITION 4. *Soit m entier positif ou nul ; notons :*

$B(m) = \{ z \mid z \in \Gamma ; d(z) \geq m \}$.

$B(m)$ est un sous-ensemble analytique de $X \times Y$.

DEMONSTRATION.

cf Remmert [9] page 437 Satz 17 : Γ est supposé « rein-dimensionale » et l'on démontre qu'est un sous-ensemble analytique la partie $\Gamma(m')$ de Γ (m' entier quelconque) :

$$\Gamma(m') = \{ z \mid z \in \Gamma ; r(z) \leq m' \}$$

Pour démontrer cette proposition, on peut, soit reprendre le raisonnement de Remmert, soit remarquer qu'en tout point $z_o \in \Gamma$, Γ se décompose, localement, en un nombre fini de composantes "rein-dimensionale" auxquelles on applique l'énoncé même du Satz 17.

PROPOSITION 5. *Soit Γ un sous-ensemble analytique fermé du produit $X \times Y$: X compact, Y projectif.*

La projection $p(\Gamma)$ de Γ dans Y est un sous-ensemble algébrique de Y.

C'est le Satz 20 de Remmert [9] page 441.

PROPOSITION 6. *Les hypothèses sont les mêmes qu'à la proposition 5. Nous notons $p^Y_m(\Gamma)$ l'ensemble :*

$$p^Y_m(\Gamma) = \{ y \mid y \in Y ; \dim.\ p^{-1}(y) \cap \Gamma) \geq m \}$$

$p^Y_m(\Gamma)$ est un sous-ensemble algébrique de Y, quel que soit l'entier m.

La proposition 6 est un corollaire des propositions 4 et 5 : en effet, $p^Y_m(\Gamma) = p^Y(B(m))$.

DEFINITION 7. *Sections holomorphes et méromorphes des espaces fibrés.*

En général, une section peut être ainsi définie : c'est une application de la base dans l'espace fibré qui, composée avec la projection sur la base, donne l'identité : les notions de sections holomorphes et méromorphes en résultent.

On peut aussi remarquer que si E est un espace fibré (localement trivial) de fibre F et de base B, tout point b de B admet un voisinage U tel que la restriction E_U de E à U soit isomorphe à $U \times F$: une section au dessus de U peut être ainsi définie comme une application de U dans F, et on définit par "recollement" les sections globales. Ce procédé sera utilisé pour définir les sections holomorphes (notamment quand $F = C^n$) et méromorphes (notemment quand $F = P(n, C)$ ou quand F est une grassmannienne).

2. DIVISEURS.

Nous faisons référence à A. Weil [8] pour les propriétés arithmétiques des diviseurs et à Chern [1] pour les relations entre classes d'espaces fibrés en droite et classes de diviseurs pour l'équivalence linéaire.

Rappelons brièvement la définition d'un diviseur :

Deux fonctions méromorphes, à valeurs dans C, définies sur un ouvert U d'une variété analytique complexe X, ont même diviseur si leur quotient est une fonction holomorphe inversible. On se donne un diviseur sur X tout entier par un système de fonctions méromorphes φ_i définies sur les ouverts U_i d'un recouvrement avec la condition de compatibilité suivante :

$\forall i, j$, les restrictions à $U_i \cap U_j$ de φ_i et φ_j ont même diviseur.

Un diviseur est dit *positif* s'il peut être défini par un système de fonctions holomorphes φ_i.

On définit l'ensemble des germes de diviseurs (resp. de diviseurs positifs) en $x \in X$ comme quotient de l'ensemble des germes en x de fonctions méromorphes (resp. holomorphes) par la relation : deux germes en x de fonctions méromorphes ont même germe en x de diviseur si leur quotient est un germe de fonction holomorphe inversible.

On définit sur l'ensemble des diviseurs (resp. des germes de diviseurs en x) une structure de groupe pour la loi suivante : soit D (resp. D') défini sur un ouvert U par la fonction méromorphe φ (resp. φ'); $D + D'$ est défini, sur U, par $\varphi \times \varphi'$.

Par la définition de ses éléments positifs, ce groupe est muni d'une structure de groupe abélien ordonné : on a (cf. [8] page 151) la :

PROPOSITION 7. *Le groupe ordonné des diviseurs sur une variété analytique complexe est réticulé.*

On pourra donc appliquer aux diviseurs sur une variété analytique complexe les notations et la terminologie usuelles pour les groupes réticulés :

Si D est un diviseur, on écrira, en notant 0 le diviseur de la fonction constante 1 :

$$D^+ = sup.(D, 0); \; D^- = sup.(-D, 0); \; D = D^+ - D^-$$

et on sait que D^+ et D^- sont étrangers l'un à l'autre (ou "premiers entre eux").

Si les D_i sont des diviseurs positifs, on écrira parfois :

$$P.G.C.D. \ \{D_i\} \text{ au lieu de } inf. \{D_i\};$$
$$P.P.C.M. \ \{D_i\} \text{ au lieu de } sup. \{D_i\};$$

On dira que les D_i sont premiers entre eux dans leur ensemble si : $P.G.C.D.\{D_i\} = 0$.

La proposition 7 résulte de ce que le groupe des germes de diviseurs est réticulé et de ce que l'application :

$$x \to inf.(D_x, D'_x)$$

- où D_x (resp. D'_x) désigne le germe en $x \in X$ d'un diviseur D (resp. D')- définit un diviseur D'' sur X. On a :

$$D'' = inf.(D, D')$$

De même, $sup.(D, D')$ est défini par l'application :

$$x \to sup.(D_x, D'_x)$$

La notion d'inf. et de sup. est donc compatible avec la restriction des diviseurs à un ouvert de X.

Les résultats rappelés ci-dessus ne sont utilisés que dans la démonstration du théorème 1 chapitre II § 2 : mais ce théorème et ses corollaires sont constemment invoqués ensuite.

Un diviseur est dit *linéairement équivalent à zéro* s'il est le diviseur d'une fonction méromorphe définie sur X tout entier ; cette notion est surtout intéressante si X est compacte : dans ce cas, d'après le théorème de Liouville, un diviseur positif non trivial n'est jamais linéairement équivalent à zéro. Nous supposons donc X compact. Deux diviseurs sont linéairement équivalents si leur différence est linéairement équivalente à zéro. Le quotient du groupe des diviseurs par l'équivalence linéaire est un groupe ordonné, noté $\mathfrak{D}$.

La notion de diviseur s'applique également aux sections des espaces fibrés en droites complexes : les sections méromorphes globales - si elles existent - d'un espace fibré en droites de base X ont toutes des diviseurs linéairement équivalents. Rappelons quelques résultats connus (cf par exemple Chern [1] page 85).

Si X est une variété analytique complexe compacte, le groupe $H^1(X, C^*_\omega)$ contient un sous-groupe $\mathfrak{M}$ identifié au groupe ordonné $\mathfrak{D}$ des classes de diviseurs de X pour l'équivalence linéaire : $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des classes d'espaces fibrés en droites ayant des sections méromorphes globales; une classe d'espaces fibrés en droites correspond à la classe des diviseurs de ses sections. Un espace fibré en droites est « positif ou nul » (resp. « strictement positif ») si la classe de diviseurs, pour l'équivalence linéaire, de ses sections méromorphes est positives ou nulle (resp. strictement positive) c'est-à-dire s'il admet des sections holomorphes globales (resp. et est non trivial). Soit F_1 (resp. F_2) un espace fibré en droites de base X ; F_1 est supérieur ou égal à F_2 si $L(F_2, F_1)$ - espace fibré en droites des homomorphismes $F_{2x} \to F_{1x}$ $(x \in X)$ - est positif ou nul, c'est-à-dire s'il existe des applications linéaires holomorphes de F_2 dans F_1 (éventuellement nulles sur les fibres correspondant à des points de X formant le cycle du diviseur d'une section de $L(F_2, F_1)$).

2. Faisceaux et espaces fibrés.

1. NOTATIONS.

Ici et dans les chapitres suivants, les notations et la terminologie générale seront celles de Godement [5]. Pour les faisceaux analytiques cohérents, nous renvoyons au séminaire H. Cartan [2]. Les constructions, plus ou moins classiques, faites dans ce paragraphe seront utilisées aux chapitres III et IV avec les notations fixées ici.

Dans ce paragraphe, nous traiterons simultanément le cas topologique, le cas différentiable et le cas analytique complexe. Pour celà, nous ferons usage d'un indice K-K pouvant prendre les valeurs C, δ, ω, suivant le cas considéré. Ainsi, nous noterons G_K (resp. $\mathcal{S}_K$) un faisceau de K-applications (resp. de K-sections) ; nous parlerons de K-espace pour désigner un espace topologique, une variété différentiable ou une variété analytique complexe ; et de même pour les espaces fibrés et les groupes (topologiques ou de Lie).

Par espace homogène d'un groupe G, on entendra ici espace où G opère de façon simplement transitive.

2. *FAISCEAU PRINCIPAL SUR UN FAISCEAU DE GROUPES.*

Soit B un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles sur B. Nous noterons $\tilde{\mathcal{F}}$ l'espace étalé des germes de $\mathcal{F}$. Nous dirons que $\mathcal{F}$ est *surjectif* si la projection de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur B est une surjection ou, ce qui est équivalent, si la condition suivante est réalisée :

$\forall x$, $\exists\, U(x)$- voisinage ouvert de x dans B- avec :

$$\mathcal{F}(U(x)) \neq \phi.$$

A un homomorphisme de faisceaux de base B :

$$\sigma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

correspond de façon biunivoque une application continue :

$$\tilde{\sigma} : \tilde{\mathcal{F}}_1 \to \tilde{\mathcal{F}}_2$$

compatible avec les projections (cf. [5] chap. II, 1.6).

DEFINITION 1. *Soient B un espace topologique, $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes de base B; $\mathcal{P}$ un faisceau d'ensembles surjectif, de base B; σ un homomorphisme de faisceaux :*

$$\mathcal{G} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}.$$

σ définit sur $\mathcal{P}$ une structure de faisceau $\mathcal{G}$ - principal à gauche *(resp. à droite) si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(D). $\forall$ U - ouvert de B -

ou bien $\mathcal{P}(U) = \phi$

ou bien $\mathcal{P}(U)$, muni de la loi externe définie par σ, est un espace homogène à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{G}(U)$.

($\tilde{D}$). $\forall\, x \in B$, $\tilde{\mathcal{P}}_x$, muni de la loi externe définie par $\tilde{\sigma}$, est un espace homogène à gauche (resp. à droite) de $\tilde{\mathcal{G}}_x$.

Pour justifier cette définition, nous allons établir l'équivalence des conditions D et $\tilde{D}$.

1) D entraîne $\tilde{D}$.

$\mathcal{P}$ étant surjectif,

$\forall x \in B$, $\exists U(x)$ - voisinage ouvert de x dans B - avec :

$$\mathcal{P}(U(x)) \neq \phi.$$

Pour tout ouvert V inclus dans $U(x)$, l'existence de l'application structurale:

$$\mathcal{P}(U(x)) \to \mathcal{P}(V)$$

entraîne :

$$\mathcal{P}(V) \neq \phi$$

et, par suite, d'après D, $\mathcal{P}(V)$ est un espace homogène à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{G}(V)$.

La limite inductive d'espaces homogènes étant un espace homogène, $\tilde{\mathcal{P}}_x$ - limite inductive de $\mathcal{P}(V)$ lorsque V parcourt l'ordonné filtrant des voisinages de x - est un espace homogène de $\tilde{\mathcal{G}}_x$.

1) $\tilde{D}$ entraîne D.

Soit U un ouvert de B.

a) $\mathcal{G}(U)$ opère sur $\mathcal{P}(U)$ par la donnée de σ.

b) $\mathcal{G}(U)$ opère simplement et transitivement sur $\mathcal{P}(U)$ si $\mathcal{P}(U)$ n'est pas vide.

En effet, soient $z \in \mathcal{P}(U)$ et $z' \in \mathcal{P}(U)$. Pour tout $x \in U$, notons z_x (resp. z'_x) le germe en x de z (resp. z'). Notons $\tilde{g}_x$ l'unique élément de $\tilde{\mathcal{G}}_x$ tel que :

$$z'_x = \tilde{g}_x z_x \qquad (cf.\ \tilde{D})$$

S'il existe $g \in \mathcal{G}(U)$ avec :

$$z' = gz,$$

il est unique, puisque son germe en tout $x \in U$ est bien déterminé :

$$g_x = \tilde{g}_x.$$

Il reste à montrer l'existence d'un tel g, i.e. à montrer que l'ensemble des $\tilde{g}_x$ pour x parcourant U est un ouvert de $\tilde{\mathcal{G}}$.

Notons :

$\tilde{U}(z) = \{z_x\}_{x \in U}$ ($\tilde{U}(z)$ est un ouvert de $\tilde{\mathcal{P}}$),

$\tilde{U}(z') = \{z'_x\}_{x \in U}$ ($\tilde{U}(z')$ est un ouvert de $\tilde{\mathcal{P}}$),

$\tilde{\pi}$ la projection : $\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{P}} \to \tilde{\mathcal{P}}$ ($\tilde{\pi}$ est continue),

$\tilde{\gamma}$ la projection : $\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{P}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ ($\tilde{\gamma}$ est ouverte),

$\{ \tilde{g}_x \}_{x \in U}$ n'est autre que :

$$\tilde{\gamma}(\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{U}(z')) \cap \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U}(z)))$$

$\tilde{U}(z)$ et $\tilde{U}(z')$ étant deux ouverts de $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\pi}$ étant continues, $\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{U}(z'))$ et $\tilde{\pi}^{-1}(U(z))$ sont des ouverts. Donc, $\tilde{\gamma}$ étant ouverte, $\{ \tilde{g}_x \}_{x \in U}$ est un ouvert de $\tilde{\mathcal{G}}$.

PROPOSITION 1. *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux faisceaux $\mathcal{G}$-principaux ; μ un homomorphisme de faisceaux d'ensembles : $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$.*

μ est un isomorphisme de faisceaux $\mathcal{G}$-principaux si et seulement si μ commute avec l'opération de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ au sens suivant :

$$\forall U, \text{ ouvert de } B ; \forall p \in \mathcal{P}(U) ; \forall g \in \mathcal{G}(U) ;$$

$$\mu_U(g.p) = g . \mu_U(p).$$

En effet, on vérifie immédiatement que pour tout ouvert U de B - avec $\mathcal{P}(U) \neq \phi$ - μ_U met en correspondance biunivoque $\mathcal{P}(U)$ et $\mathcal{P}'(U)$. $\mathcal{P}$ étant surjectif, on peut démontrer que si $\mathcal{P}'(U)$ est non vide, il en est de même de $\mathcal{P}(U)$.

3. FAISCEAUX PRINCIPAUX ET ESPACES FIBRES PRINCIPAUX.

Dans ce numéro et dans la suite, en particulier au chapitre III, par « ensemble fibré » vectoriel, principal etc., on entend un ensemble muni d'une projection sur une base avec pour seule autre structure, une structure algébrique sur chaque fibre : structure d'espace vectoriel, d'espace principal etc... En particulier, on a la définition suivante :

DEFINITION 2. *Soient F un ensemble muni d'une projection p sur un second ensemble B ; G un groupe. On définit sur (F, p) une structure* d'ensemble fibré G-principal à gauche *(resp. à droite) par la donnée d'une application :*

$$G \times F \to F$$

compatible avec la projection p et faisant de chaque fibre F_x $(x \in B)$ un espace homogène à gauche (resp. à droite) de G.

Dans la suite, par espace homogène (resp. faisceau principal, resp. espace fibré principal) nous entendrons espace homogène (resp. faisceau principal resp. espace fibré principal) à *gauche*, sauf si le contraire est spécifié.

DEFINITION 3. *Soient (F_1, p_1) (resp. (F_2, p_2)) un ensemble fibré G-principal de base B ; φ une application biunivoque : $F_1 \to F_2$.*

L'application φ est un isomorphisme d'ensembles fibrés G-principaux *si et seule-*

ment si :

1) φ est compatible avec p,

2) $\forall x \in B$, la restriction de φ à la fibre $(F_1)_x$ est un isomorphisme d'espaces homogènes de G.

REMARQUE. Tout ensemble fibré G-principal est isomorphe à $B \times G$ muni de sa structure d'ensemble fibré G-principal.

DEFINITION 4. *Nous utilisons la notation K indiquée au début de ce paragraphe. Soit (F, p) un ensemble fibré G-principal de base B.*

(F, p) est un K- espace fibré G-principal *si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :*

1) F et B sont des K-espaces; G est un K-groupe;

2) $\forall x \in B$, $\exists U(x)$-voisinage ouvert de x dans B-

$\exists \varphi$- isomorphisme d'ensembles fibrés G-principaux : $U(x) \times G \to$ $\to F_{U(x)}$- qui soit aussi un isomorphisme de K-espaces.

Un tel isomorphisme sera appelé carte compatible *de la structure de K- espace fibré G-principal de (F, p).*

PROPOSITION 2. *Soit (F, p) un K-espace fibré G-principal de base B.*

L'application : $G \times F \to F$ de sa structure d'ensemble fibré G-principal (cf. déf. 2) est une K-application.

On vérifie localement cette proposition grâce à l'existence des cartes $U(x) \times G \to$ $\to F_{U(x)}$ compatibles avec la loi externe d'opération du groupe G-groupe qui est un K- - groupe.

PROPOSITION 3. *Soit (F, p) un K-espace fibré G-principal de base B.*

Le faisceau $\mathcal{S}_K(F)$ des K-sections de F est canoniquement isomorphe au faisceau $\mathcal{C}_K(F)$ des cartes compatibles de la structure de K-espace fibré G-principal de F.

En effet, notons e l'élément neutre du groupe G.

a) Soit φ une carte compatible $U \times G \to F_U$ (où U est un ouvert de B). L'application composée :

$$x \in U, x \longrightarrow (x, e) \longrightarrow \varphi(x, e)$$

est une K-section de F_U.

b) Soit s une K-section de F sur un ouvert U de B. Montrons qu'il existe une carte unique, φ_s, telle que :

$$\varphi_s(\mathrm{U} \times \mathrm{e}) = \mathrm{s}(\mathrm{U})$$

Posons :

$$\forall x \in U, \forall g \in U, \ \varphi_s(x, g) = g s(x)$$

Pour vérifier que φ_s ainsi défini est une carte, il suffit de vérifier que tout $x \in U$ admet un voisinage $U(x)$ tel que la restriction de φ_s à $U(x) \times G$ soit une carte sur $F_{U(x)}$.

Soit φ une carte de $U(x) \times G$ sur $F_{U(x)}$ - carte qui existe, par hypothèse, pour $U(x)$ assez petit. Il suffit de montrer que $\varphi^{-1} \circ \varphi_s$ est un automorphisme de K-espace de $U \times G$. Or, on a :

$$\varphi^{-1} \circ \varphi_s(x, g) = \varphi^{-1}(g s(x)) = g \varphi^{-1}(s(x))$$

(parceque φ^{-1} est un isomorphisme d'ensembles fibrés G-principaux). L'application :

$$\begin{array}{ccc} x & \to & \varphi^{-1} s(x) \\ \cap & & \cap \\ U & & U \times G \end{array}$$

étant une K-application, il est très clair que $\varphi^{-1} \circ \varphi_s$ est un automorphisme de la structure de K-espace de $U \times G$.

PROPOSITION 4. *Le faisceau $\mathcal{S}_K(F)$ est G_K-principal, G_K étant le faisceau des K-applications des ouverts de B dans G; par la loi de composition suivante :*

Soient $s \in \mathcal{S}_K(F)(U)$; $g \in G_K(U)$ - U étant un ouvert de B -.

gs est la section de F sur U ainsi définie :

$$\forall x \in U, \quad g s(x) = g(x) s(x).$$

DEMONSTRATION. Tout d'abord, $g s$ est bien une K-application puisque g, s sont des K-applications ainsi que la loi de composition :

$$(g(x), s(x)) \to g(x) s(x).$$

De plus, G_K opère sur $\mathcal{S}_K(F)$ simplement et transitivement : soient s_1 et s_2 deux K-sections de F sur un ouvert U de B. Pour tout $x \in U$, F_x est espace homogène de G; donc, il existe $g(x) \in G$ unique tel que :

$$g(x) s_1(x) = s_2(x).$$

Il reste à vérifier que l'application :

$$x \in U, \ x \to g(x)$$

est une K-application. Or la carte compatible φ_{s_1} associée à s_1 est l'application:

$$(x, \ g(x)) \to g(x) s_1(x) = s_2(x);$$

cette carte étant un isomorphisme de K-espaces, l'image réciproque dans $U \times G$ par

φ_{s_1} de la K-section $s_2(x)$ est une K-section.

PROPOSITION 5. *Le faisceau $\mathcal{C}_K(F)$ des cartes compatibles de la structure de K-espace fibré de F est G_K-principal pour la loi de composition suivante :*

Soient φ une carte $U \times G \to F_U$;

g une K-application $U \to G$;

$g\varphi = \Psi$ est la carte :

$$\forall x \in U,\ \forall u \in G,\ \Psi(x, u) = \varphi(x, u\, g(x)).$$

Cette proposition 5 est un corollaire immédiat des propositions 3 et 4.

Rappelons un résultat classique :

Soient G un groupe; E un sous-groupe invariant de G; P un espace homogène de G; (E) la relation d'équivalence définie de la façon suivante :

Soient $f \in P$; $f' \in P$;

$f(E)\, f' \rightleftarrows \exists t \in E$ avec $f' = tf$.

Alors $P/(E)$ est muni canoniquement d'une structure d'espace homogène de G/E.

PROPOSITION 6. *Soit v l'application "valeur" :*

$$\tilde{\mathcal{S}}_K(F) \to F$$
$$\tilde{s}_x \in (\tilde{\mathcal{S}}_K(F))_x\ (x \in B);\ \tilde{s}_x \to \tilde{s}_x(x).$$

1) F considéré comme ensemble fibré G-principal est canoniquement isomorphe à $\bigcup_{x \in B} [(\tilde{\mathcal{S}}_K(F))_x / \tilde{\mathcal{E}}_{K\,x}]$ où $\tilde{\mathcal{E}}_{K\,x}$ désigne le groupe des germes en x de K-applications valant e - élément neutre de G - en x.

2) v met en correspondance biunivoque les sections continues de $\tilde{\mathcal{S}}_K(F)$ et les K-sections de F.

DEMONSTRATION.

1) L'application v est surjective : par tout élément de F passe une K-section locale comme on le voit en faisant usage d'une carte compatible; deux germes $\tilde{s}_{1\,x}$ et $\tilde{s}_{2\,x}$ ont même valeur par v si et seulement si l'unique germe $\tilde{g}_x \in (\tilde{G}_K)_x$ tel que :

$$\tilde{s}_{2\,x} = \tilde{g}_x\, \tilde{s}_{1\,x} \qquad \text{(cf. prop. 3 et déf. 1, } (\tilde{D})\text{)}.$$

a pour valeur en x l'élément neutre e de G. D'où la relation d'équivalence annoncée.

2) Soit σ une section continue $x \to s_x$ de $\tilde{\mathcal{S}}_K(F)$; $v \circ \sigma$ est une K-section de F.

Réciproquement, soit s une K-section de F; $x \to \tilde{s}_x$ est une section continue de $\tilde{\mathcal{S}}_K(F)$.

PROPOSITION 7. *Soient* Σ *un faisceau* G_K *- principal de base* B *;* $\tilde{\Sigma}$ *l'espace étalé de germes correspondant;* $F(\tilde{\Sigma})$ *l'ensemble :*

$$F(\tilde{\Sigma}) = \bigcup_{x \in B} [\tilde{\Sigma}_x \;/\; \tilde{\mathcal{E}}_x]$$

muni de sa structure évidente d'ensemble fibré G*-principal. Notons* ε *l'application de* $\tilde{\Sigma}$ *sur son quotient* $F(\tilde{\Sigma})$*.*

Il existe une unique structure, sur $F(\tilde{\Sigma})$ *de* K*-espace fibré* G*-principal et un unique isomorphisme de faisceaux,* Ψ*, tel que soit commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \tilde{\Sigma} \arrow[r] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \tilde{\mathcal{S}}_K(F(\tilde{\Sigma})) \arrow[d, "v"] \\ & F(\tilde{\Sigma}) \end{tikzcd}$$

où v *est l'application "valeur" définie à la proposition 5.*

DEMONSTRATION. Supposons la proposition vraie. Soit σ une section continue de $\tilde{\Sigma}$ au dessus d'un ouvert U de B. $\varepsilon \circ \sigma$ est une K-section de $F(\tilde{\Sigma})$ et l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma : U \times G &\to F(\tilde{\Sigma})_U \\ (x, g) &\to \varepsilon(g \,.\, \sigma(x)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de K-espaces.

1) Nous allons d'abord montrer que les φ_σ, où σ parcourt l'ensemble de toutes les sections de $\tilde{\Sigma}$ définissent sur $F(\tilde{\Sigma})$ une structure de K-espace.

En effet, $\tilde{\Sigma}$ étant surjectif, les buts des cartes φ_σ recouvrent $F(\tilde{\Sigma})$; $\tilde{G}_K$ opérant transitivement sur $\tilde{\Sigma}$, les changements de cartes sont des automorphismes de K-espaces : soient σ_1 (resp. σ_2) une section continue de $\tilde{\Sigma}$ définie sur U_1 (resp. U_2) avec :

$$U_1 \cap U_2 = U \neq \phi;\ \gamma \in G_K(U) \text{ tel que : } \gamma\sigma_2 = \sigma_1 \text{ sur } U.$$

Alors on a :

$$\begin{array}{ccc} (x, g) & \xrightarrow{\varphi_{\sigma_2}^{-1} \circ \varphi_{\sigma_1}} & (x, g\gamma(x)) \\ \cap & & \cap \\ U \times G & & U \times G \end{array}$$

et le changement de carte est bien une K-application.

2) Nous allons maintenant vérifier que l'ensemble fibré G-principal $F(\tilde{\Sigma})$ muni de cette structure de K-espace est un K-espace fibré G-principal.

En effet, toutes les cartes φ_σ sont des isomorphismes d'ensembles fibrés G-principaux (cf. déf. 4, 2)). Il reste à voir que E envoie les sections continues σ de $\tilde{\Sigma}$ sur les K-sections de $F(\tilde{\Sigma})$ et que la correspondance est biunivoque d'où il résultera aussitôt l'existence et l'unicité de Ψ.

On a :

$$\varphi_\sigma^{-1}(\sigma(x)) = (x, e);$$

donc, la section $\varepsilon\sigma$ de $F(\tilde{\Sigma})$ - image par φ_σ de la section neutre de $U \times G$- est une K-section. Que la correspondance ainsi établie soit biunivoque résulte du fait que $\Sigma(U)$ et $\mathcal{S}_K(F(\tilde{\Sigma}))(U)$ sont tous deux $G_K(U)$-principaux.

COROLLAIRE. *Soit F un ensemble fibré G-principal; $\mathcal{F}$ un sous-faisceau, G_K - principal, du faisceau des sections de F.*

Il existe sur F une unique structure de K-espace fibré principal telle que :

$$\mathcal{F} = \mathcal{S}_K(F)$$

En effet, il suffit de poser $\mathcal{F} = \Sigma$; $F(\mathcal{F})$ est en correspondance biunivoque canonique avec F.

NOTATIONS. Σ étant, comme plus haut, un faisceau principal sur G_K de base B, notons :

$\mathcal{O}(B)$ l'ensemble des ouverts de B;

$$T = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(B)} \tilde{\Sigma}(U).$$

Sur T, on définit l'application :

$$\begin{array}{ccc} t & \to & U(t) \\ \cap & & \cap \\ T & & \mathcal{O}(B) \end{array}$$

par la relation : $\forall\, t \in \tilde{\Sigma}(V),\ U(t) = V$.

Soient $t \in T$; $t' \in T$; $U = U(t)$; $U' = U(t')$. Sur $U \cap U'$ est définie la K-application $g_t^{t'}$ à valeurs dans G : $g_t^{t'}$ est l'unique élément de $G_K(U \cap U')$ tel que :

$$g_t^{t'}\, t_{U \cap U'} = t'_{U \cap U'}$$

où $t_{U \cap U'}$ (resp. $t'_{U \cap U'}$) désigne l'image de t (resp. t') dans $\tilde{\Sigma}(U \cap U')$ par le foncteur d'induction de la structure de faisceau de $\tilde{\Sigma}$.

Soit $t \in \tilde{\Sigma}(U)$; $g \in G$; on note aussi g l'application constante de $U(t)$ valant g; et on note gt l'élément de $\tilde{\Sigma}(U)$ produit de t par g - g étant considéré comme élément de $G_K(U)$. On a donc :

$$\forall\, x \in U(t) = U(g\,t),\ g_t^{g\,t}(x) = g.$$

Soit $\Theta = \{(t, x) \mid x \in U(t)\}$.

On définit sur Θ la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$:

$$(t, x)\ \mathfrak{R}\ (t', x') \rightleftarrows x' = x\,;\ g_t^{t'}(x) = e \text{ (élément neutre de } G).$$

Nous allons considérer le quotient $\Theta / \mathfrak{R} = F(\Sigma)$; nous noterons aussi $\mathfrak{R}$ la projection de Θ sur $\Theta / \mathfrak{R}$.

PROPOSITION 8. *Nous utiliserons les notations indiquées ci-dessus. Il existe sur $F(\Sigma)$ une unique structure de K-espace fibré G-principal telle que, pour tout $t \in T$, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} (t) : (x, g) & \to & \mathfrak{R}(g\,t, x) \\ \cap & & \cap \\ U(t) \times G & & F(\Sigma) \end{array}$$

soit une carte compatible.

L'application :

$$(t, x) \to t_x \text{ (germe de } t \text{ en } x)$$

de Θ dans $\tilde{\Sigma}$ induit une correspondance biunivoque entre $F(\Sigma)$ et $F(\tilde{\Sigma})$, ce qui fait de la proposition 8 un corollaire de la proposition 7.

4. ESPACES FIBRES PRINCIPAUX ET ESPACES FIBRES VECTORIELS ET PROJECTIFS.

Rappelons un résultat classique :

Soit L (resp. P) un K-espace fibré $GL(n, C)$-principal (resp. $GP(n-1, C)$-principal). On définit un K-espace fibré vectoriel $\Lambda(L)$ (resp. projectif $\Pi(P)$) associé à L (resp. à P) de la façon suivante :

1) L'ensemble $\Lambda(L)$ (resp. $\Pi(P)$) est le quotient de $L \times C^n$ (resp. $P \times P(n-1, C)$) par la relation d'équivalence r suivante :

soient $l_x,\ l'_x \in L_x$ (resp. P_x)
$y\ , y' \in C^n$ (resp. $P(n-1, C)$);

$$(l_x, y)\ r\ (l'_x, y') \rightleftarrows \exists\, g \in GL(n, C) \text{ (resp. } GP(n-1, C)) \text{avec} : l'_x = g\,l_x\,;\ y' = g\,y\ .$$

2) Soit $s(x)$ une K-section de L (resp. P) au dessus d'un ouvert U de la base. L'application :

$$\begin{array}{ccc} (x,y) & \longrightarrow & r(s(x),y) \\ \pitchfork & & \pitchfork \\ U \times C^n & & \Lambda(L) \\ (\text{resp. } U \times P(n\text{-}1,C)) & & (\text{resp. } \Pi(P)) \end{array}$$

- où r désigne la projection de $L \times C^n$ (resp. $P \times P(n\text{-}1, C)$) sur son quotient par la relation r - est une carte compatible.

PROPOSITION 9. *Reprenons les notations de la proposition 8. Sur $\Theta \times C^n$, on définit la relation d'équivalence Ψ :*

$$(t, x, y) \sim (t', x', y') \rightleftarrows x = x' ; \; g_t^{t'}(x) y = y',$$

et on note aussi Ψ la projection de $\Theta \times C^n$ sur son quotient $(\Theta \times C^n)/\Psi$.

Il existe sur $\Theta \times C^n / \Psi$ une unique structure de K-espace fibré vectoriel telle que :

$\forall\, t \in T$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} (x,y) & & \Psi(t,x,y) \\ \pitchfork & & \pitchfork \\ U(t) \times C^n & & (\Theta \times C^n)/\Psi \end{array}$$

soit une carte compatible.

Il suffit, pour démontrer cette proposition, de se reporter à la proposition 8 et d'utiliser l'unique correspondance biunivoque i rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Theta \times C^n \arrow[r] \arrow[dr, "\Psi"'] & F(\Sigma) \times C^n \arrow[r] & \Lambda(F(\Sigma)) \\ & (\Theta \times C^n)/\Psi \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Dans la suite, $(\Theta \times C^n)/\Psi$ - muni de la structure définie ci-dessus - sera appelé le K-espace fibré vectoriel associé au faisceau Σ, $[GL(n,C)]_K$-principal.

REMARQUE. Le groupe linéaire $GL(1,C)$ n'est autre que C^*, groupe multiplicatif des éléments non nuls de C : à un espace fibré C^*-principal, F^*, il est particulièrement simple d'associer un espace fibré en droite complexe, F, que nous appellerons l'espace fibré en droite *complété* de F^* : il suffit d'adjoindre à F^* une section nulle. Dans la suite, deux espaces fibrés ainsi associés, l'un C^*-principal, l'autre de fibre C, seront notés par la même lettre affectée ou non d'une astérisque :

Par exemple,

$$F^* \text{ de fibre } C^*$$
$$F \text{ de fibre } C,$$

ou encore :

$$L^*(F_1, F_2) \text{ de fibre } C^*$$
$$L\,(F_1, F_2) \text{ de fibre } C.$$

3. Puissance extérieure d'un espace fibré projectif.

Dans ce bref paragraphe, nous précisons les définitions et notations sans donner les démonstrations qui sont classiques.

Nous noterons :

$GL(A)$ le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel A;

$P(A)$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel A;

$GP(P)$ le groupe des automorphismes (projectifs) de l'espace projectif P;

π la projection canonique de $A-\{o\}$ sur $P(A)$ ou de $GL(A)$ sur $GP(P(A))$.

DEFINITION 1. *La représentation* ${}^p\Lambda$ *de* $GL(C^n)$ *dans* $GL({}^p\Lambda\, C^n)$.

Soit $l \in GL(C^n)$; *on note* ${}^p\Lambda\, l$ *l'automorphisme de* ${}^p\Lambda\, C^n$ *ainsi défini : soient* $x_1, \dots, x_p$ *des vecteurs de* C^n; *on a :*

$${}^p\Lambda\, l(x_1 \Lambda \dots \Lambda x_p) = l(x_1) \Lambda \dots \Lambda\, l(x_p).$$

L'application : $l \to {}^p\Lambda\, l$ *est une représentation de groupe; le sous-ensemble :*

$$\{{}^p\Lambda\, l \mid l \in GL(C^n)\} \subset GL({}^p\Lambda\, C^n)$$

est un sous-groupoïde de $GL({}^p\Lambda\, C^n)$ *appelé* puissance extérieure p^{e} de $GL(C^n)$ *et noté :*

$${}^p\Lambda\, GL(C^n).$$

Ce sous-groupe laisse invariant dans son ensemble le cône des p*-vecteurs décomposables de* ${}^p\Lambda\, C^n$.

DEFINITION 2. *La représentation* ${}^p\Lambda'$ *de* $GP(P(C^n))$ *dans* $GP(P({}^p\Lambda\, C^n))$.

C'est l'unique application rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} GL(C^n) & \xrightarrow{{}^p\Lambda} & GL({}^p\Lambda\, C^n) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ GP(P(C^n)) & \xrightarrow{{}^p\Lambda'} & GP(P({}^p\Lambda\, C^n)) \end{array}$$

Cette application est une représentation de groupe de Lie complexe; elle laisse globalement invariante la sous-variété algébrique de $P({}^p\Lambda C^n)$ *image par* π *du cône des* p*-vecteurs décomposables de* ${}^p\Lambda C^n$ *: cette sous-variété n'est autre que la grassmannienne* $G_p(C^n)$ *des sous-espaces projectifs de dimension* $p-1$ *de* $P(C^n)$ *(ou encore des sous-espaces vectoriels de dimension* p *de* C^n*).*

DEFINITION 3. *La puissance extérieure* p^e *d'un espace fibré projectif.*

Soit $\mathbf{P}$ *un espace fibré projectif analytique complexe de base* B*- variété analytique complexe - de fibre* $P(C^n)$*, de groupe structural* $GP(C^n)$*. Notons* $\mathfrak{A}(\mathbf{P})$ *l'atlas complet, ensemble de toutes les cartes compatibles :* $U \times P(C^n) \to \mathbf{P}_U$ *lorsque* U *décrit l'ensemble des ouverts de* B *(* $\mathbf{P}_U$ *désigne la restriction de* $\mathbf{P}$ *à* U*).*

Une carte sera notée $\alpha(\beta, \gamma \dots)$ et l'ouvert correspondant de B $U(\alpha)(U(\beta), U(\gamma)\dots)$; un changement de carte, application analytique de $U(\alpha) \cap U(\beta)$ dans $GP(P(C^n))$, sera noté g_α^β :

$$\beta(x, y) = \alpha(x, g_\alpha^\beta(x)y);\ x \in U(\alpha) \cap U(\beta);\ y \in P(C^n).$$

La puissance extérieure p^e, ${}^p\Lambda\,\mathbf{P}$, de $\mathbf{P}$ est le quotient de l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{(x, y, \alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{A}(\mathbf{P});\ x \in U(\alpha);\ y \in P({}^p\Lambda C^n)\}$$

par la relation $\mathfrak{R}$:

$$(x, y, \alpha)\ \mathfrak{R}\ (x', y', \beta) \Longleftrightarrow x = x' \in U(\alpha) \cap U(\beta);\ y = {}^p\Lambda'\ g_\alpha^\beta(x)\,y'.$$

L'on note aussi $\mathfrak{R}$ l'application de $\mathcal{E}$ sur son quotient ${}^p\Lambda\,\mathbf{P}$. La structure fibrée analytique complexe de ${}^p\Lambda\,\mathbf{P}$ est définie par la condition :

$\forall \alpha \in \mathfrak{A}(\mathbf{P})$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \longrightarrow & \mathfrak{R}(x, y, \alpha) \\ \cap & & \cap \\ U(\alpha) \times P({}^p\Lambda C^n) & & {}^p\Lambda'\mathbf{P} \end{array}$$

est une carte.

L'espace fibré analytique en grassmanniennes des sous-espaces projectifs de dimension $p-1$ des fibres de $\mathbf{P}$ s'identifie à un sous-espace fibré de ${}^p\Lambda'\mathbf{P}$; en chaque point x de B, la grassmannienne est une sous-variété algébrique de la fibre de ${}^p\Lambda'\mathbf{P}$; les applications :

$$(x, y) \to \mathfrak{R}(x, y, \alpha);\ x \in U(\alpha);\ y \in G_p(C^n) \subset P({}^p\Lambda C^n),$$

sont des cartes qui définissent la structure du sous-espace fibré en grassmannienne de ${}^p\Lambda'\mathbf{P}$: nous noterons $G'_p(\mathbf{P})$ ce sous-espace fibré.

CHAPITRE DEUX

CHAMPS D'ELEMENTS LINEAIRES ET CHAMPS DE VECTEURS

1. Définitions et premières propriétés.

1. NOTATIONS.

B est une variété analytique complexe régulière, irréductible, de dimension q.

E est un espace fibré vectoriel analytique complexe de fibre C^n, de base B.

$P(E)$ est l'espace fibré projectif associé à E.

E_U (resp. $(P(E))_U$) est la restriction de E (resp. $P(E)$) à un ouvert U de B.

π est la projection $E - B \to P(E)$ dont la restriction à une fibre quelconque $E_x (x \in B)$ de E coïncide avec la projection canonique - notée également π - de $E_x - \{0\}$ sur son quotient $P(E)_x = (P(E))_x$ (B est identifié à la section nulle de E).

DEFINITION 1. *Un champ holomorphe (resp. méromorphe) de vecteurs (resp. d'éléments linéaires de dimension 1 - ou 1-champ) de E sur B est une section holomorphe (resp. méromorphe) de E (resp. de $P(E)$) (cf chap. I).*

Soit $x \in B$; x possède dans B un voisinage connexe, U, tel que U puisse être identifié à un ouvert de C^q, E_U au produit $U \times C^n$ et $(P(E))_U$ à $U \times P(n-1, C)$.

L'étude d'un 1-champ méromorphe, Γ, de E sur B se ramène donc, localement, à l'étude d'une application méromorphe de U dans $P(n-1, C)$, étude déjà faite au cha--pitre I dont nous reprenons les notations dans ce chapitre-ci.

Si x est régulier pour Γ, son image est un élément $\Gamma(x)$ de $P(E_x)$;

Si x est singulier pour Γ, son image est une sous-variété algébrique de $P(E_x)$.

On a (cf chapitre I) la

PROPOSITION 1. *L'ensemble des singularités d'un 1-champ méromorphe est de codimen--sion analytique supérieure ou égale à 2.*

2. CHAMPS HOLOMORPHES DE VECTEURS INCLUS DANS UN 1-CHAMP MEROMORPHE.

DEFINITION 2. *Une section σ de E, holomorphe sur un ouvert U de B, est dite* incluse *dans le 1-champ méromorphe Γ si l'on a :*

$$\forall x \textit{ régulier pour } \Gamma \begin{cases} \textit{soit } \sigma(x) = 0 \\ \textit{soit } \pi \circ \sigma(x) = \Gamma(x) \textit{ si } \sigma(x) \neq 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(x)$ *désigne la valeur - bien déterminée - prise par* Γ *au point régulier* x.

Nous étudierons, plus loin, le faisceau $\mathfrak{J}(\Gamma)$ des sections holomorphes de E incluses dans Γ. La fibre $\widetilde{\mathfrak{J}}(\Gamma)_x$ $(x \in B)$ est un espace vectoriel sur C; c'est aussi un module sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes en x.

PROPOSITION 2. *Soit* σ *une section holomorphe de* E, *non identiquement nulle. Il existe un 1-champ méromorphe de* E, *unique*, Γ, *tel que* σ *soit incluse dans* Γ.

En effet, tout $x \in B$ admet un voisinage $U(x)$ isomorphe à C^q et tel que $E_{U(x)}$ soit isomorphe à $U(x) \times C^n$. Sur $U(x)$, σ est définie par n fonctions holomorphes non toutes identiquement nulles :

$$\varphi_1, \ldots . \varphi_n ;$$

supposons φ_ν non identiquement nulle et posons :

$$H_\nu = \{(X_1, \ldots, X_n) \in C^n \mid X_\nu = 0\} ; \; E_\nu = \pi(H_\nu).$$

Supposons qu'il existe un 1-champ Γ où σ soit incluse. $\Gamma(U(x))$ n'est pas i--dentiquement situé dans E_ν et peut donc être défini, au voisinage de tout point de $U(x)$ par $(n-1)$ fonctions méromorphes $\frac{X_i}{X_\nu}$ $(i \neq \nu)$. Soit $y \in U(x)$ régulier pour Γ et tel que $\varphi_\nu(y)$ ne soit pas nul. Il existe un voisinage de y, V, où Γ est holomorphe et où φ_ν ne s'annule pas. Pour tout $v \in V$, $\{\frac{X_i}{X_\nu}(v)\}_{i \neq \nu}$ $(resp. \{\frac{\varphi_i(v)}{\varphi_\nu(v)}\}_{i \neq \nu})$ est un système de paramètres directeurs pour la droite - bien définie - de $\Gamma(v)$ (resp. pour le support de $\sigma(v)$). Les fonctions méromorphes $\frac{X_i}{X_\nu}$ et $\frac{\varphi_i}{\varphi_\nu}$, coïncidant sur un sous-ensemble partout dense dans U (en fait, sur le supplémentaire d'un sous-espace analytique de codimension analytique ≥ 1) coïncident sur U. Le 1-champ Γ ne peut donc être que le champ défini par les fonctions méromorphes :

$$\frac{X_i}{X_\nu} = \frac{\varphi_i}{\varphi_\nu}$$

Soit φ_μ $(\mu \neq \nu)$ une autre fonction prise parmi les $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et non identique--ment nulle. Les $(n-1)$ fonctions méromorphes $\frac{\varphi_i}{\varphi_\mu}$ définissent le même champ Γ que les fonctions $\frac{\varphi_i}{\varphi_\nu}$ puisque l'on a :

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_\mu} = \frac{\varphi_i/\varphi_\nu}{\varphi_\mu/\varphi_\nu}$$

Il reste à vérifier que σ est inclus dans ce champ sur $U(x)$. Soit $z \in U(x)$; ou bien $\sigma(z)$ est nul, ou bien $\sigma(z)$ est non nul et l'une des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - soit φ_μ- est non nulle en z, donc au voisinage de z. Les fonctions méromorphes $\frac{\varphi_i}{\varphi_\mu}$ définissent le champ Γ au voisinage de z et $\{\frac{\varphi_i(z)}{\varphi_\mu(z)}\}_{i \neq \mu}$ est un système de paramètres directeurs pour $\pi \circ \sigma(z)$ et pour $\Gamma(z)$.

COROLLAIRE. *Soit σ une section holomorphe de E incluse dans un 1-champ méromorphe Γ.*
Tout $x \in B$ tel que $\sigma(x)$ soit non nul est régulier pour Γ.

En effet, parmi les n fonctions holomorphes φ_i définissant σ, l'une - φ_ν- est non nulle en x et tous les rapports $\{\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_\nu(x)}\}_{i \neq \nu}$ sont bien déterminés.

Ce corollaire permet de simplifier l'énoncé de la définition 2 :

DEFINITION 2'. *Une section σ de E, holomorphe sur un ouvert U de B est dite incluse dans le 1-champ méromorphe Γ si l'on a :*

$$\forall x \in U, \begin{cases} \text{soit } \sigma(x) = 0 \\ \text{soit } \pi \circ \sigma(x) = \Gamma(x). \end{cases}$$

3. CHAMPS D'ELEMENTS LINEAIRES DE DIMENSION p.

Considérons :
${}^p\Lambda E$ de fibre en $x \in B$: ${}^p\Lambda E_x$ - espace vectoriel de dimension $\binom{n}{p}$; $P({}^p\Lambda E)$- espace fibré projectif associé à ${}^p\Lambda E$.
Notons encore π la projection de ${}^p\Lambda E$ sur $P({}^p\Lambda E)$. $G_p(E_x)$, $x \in B$, est la variété de Grassmann des sous-espaces vectoriels de dimension p de E_x; pour $p = 1$, l'on a :

$$G_p(E_x) = P(E_x).$$

$G_p(E)$ est l'espace fibré en grassmannienne associé à E en dimension p : la fibre en $x \in B$ $(G_p(E))_x$ est la variété de Grassmann $G_p(E_x)$. Cette fibre s'identifie à l'image- par π, dans $P({}^p\Lambda E)$ du cône des p-vecteurs décomposables de ${}^p\Lambda E_x$.

DEFINITION 3. *Un champ méromorphe (resp. holomorphe) d'éléments linéaires de E de dimension p- ou p-champ méromorphe (resp. holomorphe)- est une section méromorphe (resp. holomorphe) de $G_p(E)$.*

Un p-champ Γ de E s'identifie donc à un 1-champ - que nous noterons ${}^p\Lambda\Gamma$- de ${}^p\Lambda E$, ce champ ${}^p\Lambda\Gamma$ prenant ses valeurs dans l'image par π, dans $P({}^p\Lambda E)$, des p-vecteurs décomposables de ${}^p\Lambda E$.

A $x \in B$ est associé par Γ *(resp.* $^{p}\Lambda \Gamma$*)* :

Si x est *régulier*, un sous-espace vectoriel de dimension p de E_x (resp. un élément de $P({}^{p}\Lambda E)$ image par π d'un p-vecteur décomposable de $^{p}\Lambda E$) bien déterminé;

Si x est *singulier*, une variété algébrique de sous-espaces vectoriels de dimension p de E_x (resp. d'éléments de $P({}^{p}\Lambda E_x)$ image par π de p-vecteurs décomposables de $^{p}\Lambda E$).

DEFINITION 4. *Une section σ de E holomorphe sur un ouvert U de B est dite* incluse *dans le p-champ Γ sur U si l'on a, pour tout $x \in U$, régulier pour Γ :*

$$\text{soit } \sigma(x) = 0$$

$$\text{soit } \sigma(x) \in \Gamma(x) \text{ si } \sigma(x) \neq 0$$

où $\Gamma(x)$ est le sous-espace vectoriel de dimension p, valeur de Γ en x.

Nous noterons encore $\mathcal{J}(\Gamma)$ le faisceau des sections holomorphes de E incluses dans Γ.

2. Etude locale des champs de vecteurs holomorphes inclus dans un champ méromorphe d'éléments linéaires de dimension 1.

On peut supposer, pour cette étude locale, que B est un ouvert de C^q et que E est le produit $B \times C^n$, les démonstrations faites sous ces hypothèses valant dans le cas général.

1. LE THEOREME PRINCIPAL.

THEOREME 1. *Le faisceau $\mathcal{J}(\Gamma)$ des sections holomorphes de E incluses dans le 1-champ méromorphe Γ-faisceau de modules sur le faisceau des fonctions holomorphe sur B- est* localement libre.

Ce théorème résulte immédiatement de la

PROPOSITION 1. *Soit Γ un 1-champ méromorphe de E. Quel que soit $b \in B$, il existe un voisinage $U(b)$ de b tel que soit définie sur $U(b)$ une section s, holomorphe, de E, vérifiant les conditions suivantes :*

1) s est incluse dans Γ.

2) $U(b)$ étant muni de la topologie induite par celle de B, toute section holomorphe de E incluse dans Γ sur un ouvert V de $U(b)$ est le produit de s par une fonction holomorphe sur V.

En particulier, on peut énoncer :

2') Quel que soit $x \in U(b)$, tout germe en x de section holomorphe de E incluse dans Γ est le produit du germe en x de s par le germe en x d'une fonction holomorphe.

DEMONSTRATION :

Γ est défini par $(n-1)$ fonctions méromorphes sur B :

$$\frac{X_i}{X_1} = \Psi_i(x) \quad (i = 2, \ldots, n)$$

(Γ est supposé non identiquement contenu dans $E_1 = \pi\{X_1 = 0\}$). Quel que soit $b \in B$, il existe un voisinage $V(b)$ de b où chaque Ψ_i soit définie par le quotient de deux fonctions holomorphes. Chaque fonction Ψ_i définit donc sur B un diviseur que nous noterons D_i.

Soit D_i^+ et D_i^- les plus petits diviseurs positifs dont D_i soit la différence.

$$D_i = D_i^+ - D_i^-$$

Posons :

$$D_1' = \sum_{i=2}^{n} D_i^-$$

$$D_i' = D_i + D_1' \text{ (pour } i = 2, \ldots, n)$$

Soit D le plus grand commun diviseur des D_i' $(i = 1, \ldots, n)$. $(D_1' - D)$ est un diviseur positif : il est donc défini, au voisinage de b, par une fonction φ, holomorphe dans un voisinage $W(b)$ de b et non identiquement nulle (φ est déterminée par $(D_1' - D)$ à un multiplicateur inversible près).

Sur $U(b) = V(b) \cap W(b)$, les fonctions :

$$X_1 = \varphi,\ X_2 = \varphi \times \Psi_2, \ldots, X_i = \varphi \times \Psi_i, \ldots, X_n = \varphi \times \Psi_n$$

sont n fonctions holomorphes qui définissent la section s.

Il reste à vérifier que $U(b)$ et s satisfont aux conditions de l'énoncé.

1) s est bien incluse dans Γ sur $U(b)$ puisque l'on a, en tout $x \in U(b)$:

$$\frac{X_i}{X_1} = \Psi_i(x)$$

2) Soit $\{X_i = \varphi_i(x)\}_{i=1,\ldots,n}$ une section holomorphe de E, incluse dans Γ. On a, sur $U(b)$:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{\varphi_2}{\varphi \times \Psi_2} = \ldots = \frac{\varphi_i}{\varphi \times \Psi_i} = \ldots = \frac{\varphi_n}{\varphi \times \Psi_n} = h$$

La fonction h est méromorphe; il faut montrer qu'elle est holomorphe. Notons

$D(h)$ (resp. $D(\varphi_i)$) le diviseur de h (resp. de φ_i).

$$D(h) = D(\varphi_i) - [D'_1 - D] - D_i$$

donc :

$$D(\varphi_i) = D(h) + D'_i - D$$

$(D'_i - D)$ est positif; de plus, tous les $(D'_i - D)$ sont premiers entre eux dans leur ensem- -ble. $D(\varphi_i)$ ne peut donc être positif que si $D(h)$ l'est. Or, φ_i étant holomorphe, $D(\varphi_i)$ est positif; donc, $D(h)$ est positif et h est holomorphe.

2. *SECTIONS GENERATRICES.*

DEFINITION 1. *Une section s, holomorphe, de E est dite génératrice pour Γ sur un ouvert U de B si, pour toute section σ, holomorphe, de E, incluse dans Γ sur un ouvert $V \subset U$, on a :*

$$\sigma = h \cdot s$$

où h est une fonction holomorphe sur U.

REMARQUE. La proposition 1 établit l'existence pour tout point $b \in B$ d'un ouvert $U(b) \subset \subset B$ et d'une section génératrice pour Γ sur $U(b)$.

PROPOSITION 2. *Soit s une section holomorphe de E génératrice pour Γ sur un ouvert U de B. Si en $x \in U$, s s'annule, toute section σ holomorphe de E incluse dans Γ au voisinage de x s'annule en x.*

En effet, soient $f_1, \ldots, f_n$ les n fonctions holomorphes sur U définissant s; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les n fonctions holomorphes au voisinage de x définissant σ.

On a, s étant génératrice sur U :

$$\frac{\varphi_i}{f_i} = h \quad \forall\, i \in (1, \ldots, n)$$

h étant holomorphe au voisinage de x, on a :

$$f_i(x) = 0 \Rightarrow \varphi_i(x) = 0$$

PROPOSITION 3. *Soit σ une section holomorphe de E, incluse dans Γ sur un ouvert U de B. Si, en $x \in U$, σ est non nulle, la section σ est génératrice pour Γ au voisinage de x.*

En effet, au voisinage de x :

Il existe une section génératrice s et une fonction holomorphe h avec :

$$\sigma = h \cdot s$$

σ ne s'annule pas par raison de continuité; donc h ne s'annule pas.

Soit σ_1 une section holomorphe de E incluse dans Γ. On a :

$$\sigma_1 = h_1 \cdot s$$

où h_1 est une fonction holomorphe. D'où :

$$\sigma_1 = \frac{h_1}{h} \cdot \sigma$$

h ne s'annulant pas, $\frac{h_1}{h}$ est holomorphe et σ est donc génératrice.

PROPOSITION 4. *Un point $b \in B$ est singulier pour Γ si et seulement si il existe une section génératrice nulle en b - ou encore, ce qui est équivalent, si toute section holo--morphe incluse définie au voisinage de b est nulle en b.*

DEMONSTRATION.

1) S'il existe une section génératrice s non nulle en b, b est régulier : c'est une conséquence du corollaire de la proposition 2 § 1.

2) Si b est régulier, il existe une section génératrice non nulle en b : d'après la proposition 3, il suffit d'exhiber une section holomorphe de E incluse dans Γ et non nulle en b.

Or, b étant régulier, Γ est holomorphe au voisinage de b; il existe donc une coordonnée, X_ν, telle que les $(n-1)$ fonctions méromorphes $\frac{X_i}{X_\nu}$, $i \neq \nu$ soient holomor--phes au voisinage de b. Les fonctions holomorphes :

$$\frac{X_1}{X_\nu}, \dots, \frac{X_{\nu-1}}{X_\nu}, 1, \frac{X_{\nu+1}}{X_\nu}, \dots, \frac{X_n}{X_\nu}$$

définissent la section cherchée.

3. DIVISEUR D'UNE SECTION HOLOMORPHE DE E.

DEFINITION 2. *Soit σ une section holomorphe de E incluse dans le 1-champ Γ sur un ouvert U de B; $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de U tel que sur chaque U_i il existe une section holomorphe, s_i, de E, génératrice pour Γ.*

Le *diviseur sur U de σ* est défini, sur chaque U_i, par la fonction holomorphe h_i telle que :

$$\sigma = h_i \, s_i$$

Justification: Le diviseur sur U ne dépend pas du choix du système $\{U_i, s_i\}$. Cela résul--te de la remarque suivante :

Soit s (*resp.* s') une section holomorphe de E génératrice pour Γ sur un ouvert $U' \subset U$. L'on a :

$$\sigma = h \, . \, s$$

où h est une fonction holomorphe sur U',

$$s = h' \, s'$$

où h' est une fonction holomorphe inversible sur U'.

$$\sigma = h \, h' \, . \, s'$$

et le diviseur sur U' de $h h'$ coïncide avec le diviseur sur U' de h.

PROPOSITION 5. *Soit σ une section holomorphe de E incluse dans Γ sur un ouvert U de B.*

L'ensemble des zéros de σ est réunion :

1) de l'ensemble des singularités de Γ (de codimension analytique ≥ 2)

2) du support du diviseur de σ (i.e. ensemble de codimension analytique 1 des zéros des h_i).

COROLLAIRE. *Une section holomorphe, σ, de E, incluse dans Γ sur un ouvert U de B est génératrice pour Γ si et seulement si l'ensemble de ses zéros est de codimension analytique supérieure ou égale à 2.*

DEFINITION 3. *On appelle diviseur d'une section σ holomorphe de E le diviseur - au sens de la définition 2 - de σ considérée comme section holomorphe incluse dans le 1 - champ qu'elle définit (cf § 1 prop. 2).*

PROPOSITION 6. *Une section holomorphe de E est génératrice pour le champ qu'elle définit si et seulement si son diviseur est nul (i. e. si son ensemble des zéros est de codimension analytique ≥ 2).*

Les démonstrations sont immédiates.

3. Etude locale des champs de vecteurs holomorphes inclus dans un champ méromorphe d'éléments linéaires de dimension p.

Ici encore, nous supposons que B est un ouvert de C^q et que E est le produit $B \times C^n$, les démonstrations faites sous ces hypothèses valant dans le cas général.

1. LE THEOREME PRINCIPAL.

THEOREME 1. *Le faisceau $\mathcal{J}(\Gamma)$ des sections holomorphes de E inclus dans le p - champ méromorphe Γ - faisceau de modules sur le faisceau des fonctions holomorphes sur B - est cohérent.*

Le *1* - champ ${}^p\Lambda\,\Gamma$ de ${}^p\Lambda\,E$, auquel le p - champ Γ s'identifie, satisfait aux résultats du § 2. Utilisant ces résultats, nous allons donner d'une section holomorphe de E

incluse dans Γ une nouvelle définition équivalente à la définition déjà donnée.

Considérons E et ${}^p\Lambda E$ comme sous-fibrés de ΛE - fibré vectoriel dont la fibre en $x \in B$ est ΛE_x, l'algèbre extérieure de E_x.

PROPOSITION 1. *Soit s une section holomorphe de ${}^p\Lambda E$, génératrice pour ${}^p\Lambda\Gamma$ sur un ouvert U de B (cf § 2 def. 1).*

Une section holomorphe σ de E au-dessus de U est incluse dans Γ si et seulement si :

$$(i) \qquad \forall x \in U, \quad \sigma(x) \Lambda s(x) = 0$$

L'ensemble des points réguliers pour Γ étant partout dense dans U, le $(p+1)$-vecteur $\sigma(x) \Lambda s(x)$ - fonction holomorphe de x - est nul en tout point de U si et seulement si il est nul en tout point régulier de U.

Soit donc $x \in U$ régulier pour Γ, donc aussi pour ${}^p\Lambda\Gamma$; $s(x)$ est un p-vecteur décomposable non nul (cf § 2 prop. 4). L'on peut écrire :

$$s(x) = s_1 \Lambda \dots \Lambda s_p$$

où les $s_i \in E_x$ sont p vecteurs linéairement indépendants qui engendrent $\Gamma(x)$.
L'on a :

$$\sigma(x) \in \Gamma(x)$$

si et seulement si $\sigma(x)$ est combinaison linéaire, à coefficients complexes des s_i, *i. e* si et seulement si :

$$\sigma(x) \Lambda s(x) = 0$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

La proposition 1 permet de caractériser les germes en x de sections holomorphes de E incluses dans le p-champ Γ par des équations linéaires en nombre $\binom{n}{p+1}$ dont chacune peut être considérée comme une relation entre les germes en x de n fonctions holomorphes. Le faisceau $\mathcal{J}(S)$ apparaîtra ainsi comme l'intersection de $\binom{n}{p+1}$ faisceaux cohérents. De façon précise, soient :

s une section holomorphe de ${}^p\Lambda E$ en p-vecteurs décomposables, génératrice pour le 1-champ ${}^p\Lambda\Gamma$ sur un ouvert U de B - U étant choisi assez petit pour que E_U soit isomorphe à $U \times C^n$ $(({}^p\Lambda E)_U$ est alors isomorphe à $U \times C^{\binom{n}{p}})$;

$\{(f_{i,\dots i_p})_x\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \binom{n}{p}$ germes en $x \in U$ de fonctions holomorphes en x définissant le germe s_x;

$\{(\varphi_j)_x\}_{j=1,\dots,n}$ n germes en x de fonctions holomorphes définissant un germe de section holomorphe, noté σ_x de E ;

σ_x est inclus dans Γ si et seulement si sont vérifiées les $\binom{n}{p+1}$ relations linéaires exprimant l'égalité :

$$\sigma_x \wedge s_x = 0$$

$$(I) \qquad \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{p+1-j} (f_{i_1,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+1}})_x (\varphi_{i_j})_x = 0$$

où $I = (i_1, \dots i_{p+1})$ est une suite strictement croissante de $(p+1)$ entiers pris entre 1 et n.

Chaque relation I peut être considérée comme une relation entre les germes en x de n fonctions holomorphes sur U, $g_1, \dots, g_k, \dots g_n$, avec :

$$g_k = 0 \qquad \text{si } k \notin I$$

$$g_k = (-1)^{p+1-j} f_{i_1,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+1}} \qquad \text{si } k = i_j \in I$$

Les systèmes de fonctions dont, $x \in U$, les germes $(\varphi_1)_x \dots (\varphi_n)_x$ vérifient la relation (I) constituent un sous-faisceau $\mathcal{F}_I$ du faisceau $\mathcal{O}^n(U)$ des suites de n fonctions holomorphes sur U. $\mathcal{F}_1$ n'est autre que le faisceau des relations entre $(g_1, \dots, \bar{g}_k, \dots, g_n)$; c'est donc un faisceau analytique cohérent (théorème d'Oka cf[2] exp. 15 § 1 n° 5).

Le faisceau des $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ dont les germes $(\varphi_1)_x, \dots, (\varphi_n)_x$ vérifient les $\binom{n}{p+1}$ relations (I) est l'intersection des $\binom{n}{p+1}$ faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}_I$: c'est donc un faisceau analytique cohérent (cf [2] exp. 15 § 6 Cor. 1).

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

DEFINITION 1. *Nous appellerons* système générateur *en* $b \in B$ *du* p*-champ* Γ *un ensemble fini* $\{(s_1)_b \dots (s_r)_b\}$ *de germes en* b *de section holomorphe de* E *incluse dans* Γ *tels qu'il existe un voisinage* U *de* b *où soient définies des sections* $s_1, \dots s_r$ *dont les germes en* b *soient respectivement* $(s_1)_b, \dots, (s_r)_b$ *et jouissant de la propriété suivante :*

$\forall x \in U$ *et* $\forall \sigma_x$ *- germe en* x *de section holomorphe de* E *incluse dans* Γ *-*
$\exists \{(\lambda_1)_x, \dots, (\lambda_r)_x\}$ *- système de germes de fonction holomorphe en* x *- avec :*

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i)_x (s_i)_x$$

Le théorème 1 implique, en particulier, qu'en tout point de B il existe un système générateur de Γ.

Pour $p = 1$, nous savons qu'il existe en tout point de B un système générateur for

-mé d'un seul élément (cf § 2).

Pour p quelconque, il est clair qu'il existe en tout point de B, régulier pour Γ, un système générateur formé de p éléments. Mais en un point singulier, il n'en est pas en général de même, comme le montre le contre exemple suivant.

2. UN CONTRE-EXEMPLE.

Le champ $\overline{\Gamma}$ particulier défini ci-dessous possède les propriétés suivantes : c'est un champ d'éléments linéaires de dimension 2; il possède une singularité où il existe un système générateur formé de *trois* germes mais non de *deux* germes.

DEFINITION DU CHAMP $\overline{\Gamma}$.

La base B est l'espace affine complexe de dimension 3 rapporté à un système de coordonnées linéaires (x, y, z). E est le produit $B \times C^3$. Nous rapportons C^3 à sa base canonique $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$. Un vecteur de C^3 sera noté :

$$X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ ou : } (X, Y, Z)$$

$\overline{\Gamma}$ est le 2-champ qui à chaque point $(x, y, z) \in B$ associe le plan de C^3 d'équation :

$$(I) \qquad xX + yY + zZ = 0$$

ce plan est orthogonal (au sens ordinaire et non au sens hermitique) au vecteur $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

Le point $O = (o, o, o) \in B$ est l'unique point singulier de $\overline{\Gamma}$.

Une section holomorphe de E, σ, sur un ouvert U de B est définie par ses composantes dans C^3, X, Y, Z - fonctions holomorphes du point $(x, y, z) \in U$-. Cette section σ sera incluse dans $\overline{\Gamma}$ si et seulement si est vérifiée la relation (I).

Soit a une section constante de E au dessus de B; la section σ qui au point $(x, y, z) \in B$ associe le vecteur $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \Lambda a$, orthogonal au vecteur $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, est incluse dans $\overline{\Gamma}$.

Posons : $$a = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} ;$$

On a : $$\sigma(x, y, z) = a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3$$

$$\begin{aligned} s_1(xyz) &= \quad\;\; - z\vec{j} + y\vec{k} \\ s_2(xyz) &= z\vec{i} \quad\;\; - x\vec{k} \\ s_3(xyz) &= -y\vec{i} + x\vec{j} \end{aligned}$$

La section s_1(resp. s_2, s_3), étant égale en tout point $(x, y, z) \in B$ au produit vectoriel $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \Lambda \vec{i}$ (resp. $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \Lambda j, (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \Lambda k$) est incluse dans $\overline{\Gamma}$

En un point $m \in B$ où $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0, z \neq 0$) les germes de s_2 et s_3 (resp. s_3 et s_1, s_1 et s_2) forment un système générateur.

Nous allons montrer que $\{(s_1)_o,(s_2)_o,(s_3)_o\}$ est un système générateur en O, puis nous montrerons qu'il n'existe pas, en O, de système générateur formé de moins de trois germes. *$\{(s_1)_o,(s_2)_o,(s_3)_o\}$ est un système générateur de $\overline{\Gamma}$ en O.*

Soit σ une section holomorphe en $o \in B$ de E, de composantes X, Y, Z - fonc--tions holomorphes de $(x, y, z) \in B$ - incluse dans $\overline{\Gamma}$. X, Y, Z admettent, au voisinage de o, des développements en série entière absolument convergents. Désignons par $X^{(q)}$ (resp. $Y^{(q)}, Z^{(q)}$) l'ensemble des termes homogènes de degré q de X (*resp.* Y, Z).

DEFINITION. *Une section de E est dite* homogène de degré q *(q entier positif ou nul) si ses composantes dans la fibre sont des polynômes homogènes de degré q en les coordonnées dans B.*

Avec les notations précédentes, la section de E de composantes $X^{(q)}, Y^{(q)}, Z^{(q)}$, est appelée *partie homogène de degré q* de σ en o.

LEMME 1. *La partie homogène de degré q (q entier quelconque positif ou nul) d'une section holomorphe de E définie au voisinage de o et incluse dans $\overline{\Gamma}$ est une section de E incluse dans $\overline{\Gamma}$ (définie sur tout B).*

En effet, soit σ- de composantes X, Y, Z, une section holomorphe de E incluse dans $\overline{\Gamma}$ en o. On a :

$$xX + yY + zZ = 0 \tag{I}$$

La partie homogène de degré $(q+1)$ (pour tout entier $q \geq 0$) du développement du 1er membre de (I) est donc nulle. D'où :

$$xX^{(q)} + yY^{(q)} + zZ^{(q)} = 0 \tag{I_q}$$

ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que la section de composantes $X^{(q)}, Y^{(q)}, Z^{(q)}$ soit incluse dans $\overline{\Gamma}$.

COROLLAIRE.

a) X, Y, Z n'ont pas de terme constant : $X^{(o)} = Y^{(o)} = Z^{(o)} = 0$.

b) Il n'y a pas de terme en x^q (resp. y^q, z^q) dans $X^{(q)}$ (resp. $Y^{(q)}, Z^{(q)}$).

LEMME 2. *Soit σ une section holomorphe de E incluse dans $\overline{\Gamma}$ au voisinage de $o \in B$. Il existe trois fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ holomorphes en $o \in B$ telles que, au voisinage de o, l'on ait :*

$$\sigma = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3 \tag{O}$$

DEMONSTRATION. Supposons qu'il existe trois fonctions holomorphes $\{\lambda_i\}_{i=1,2,3}$ satisfaisant, au voisinage de $o \in B$, à la relation (O).

On a, entre les premières composantes, la relation :

$$X = -\lambda_3 Y + \lambda_2 Z \tag{I}$$

qui est donc une condition nécessaire à l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Cherchons si l'on peut déterminer λ_3, λ_2 satisfaisant à (I). Au voisinage de o, on a :

$$X = \sum_{q=1}^{\infty} X^{(q)} \quad \text{puisque } X^{(o)} = 0 \text{ (cf. Lemme 1 Cor)}$$

De plus, dans chaque X^q, il n'y a pas de terme en x^q (Lemme 1 Cor); mettons y en facteur dans tous les termes de $X^{(q)}$ qui le contiennent. Les termes restants auront z en facteur. Ainsi, on met $X^{(q)}$ sous la forme :

$$X^{(q)} = yX_1^{(q)} + zX_2^{(q)}$$

Les séries $\sum_{q=1}^{\infty} X^{(q)}$ et $\sum_{q=1}^{\infty} X^{(q)}$ sont convergentes dans le domaine d'absolue convergence de $\sum_{q=1}^{\infty} X^q$. Posons :

$$X_1 = \sum_{q=1}^{\infty} X_1^{(q)}; \quad X_2 \to \sum_{q=1}^{\infty} X_2^{(q)};$$

il vient :

$$X = yX_1 + zX_2$$

Nous allons montrer qu'en posant $\lambda_3 = -X_1$ et $\lambda_2 = X_2$, on peut déterminer λ_1 telle que (O) soit satisfaite. Il faut, pour cela, vérifier que $\sigma + X_1 s_3 - X_2 s_2$ est un mul--tiple de s_1.

La relation (I) s'écrit :

$$y(Y + xX_1) + z(Z + xX_2) = 0$$

On en déduit que le développement de $(Y + xX_1)$ (resp. $Z + xX_1$) contient z (resp. y) en facteur et, par suite,

$$\lambda = \frac{Y + xX_1}{-z} = \frac{Z + xX_2}{y}$$

est holomorphe au voisinage de 0.

Or, $(O, Y + xX_1, Z + xX_2)$ (resp. $(o, z, -y)$) sont les composantes de $(\sigma + X_1 s_3 - X_2 s_2)$ (resp. s_3).

CONCLUSION. $\lambda_3 = -X_1$, $\lambda_2 = X_2$, $\lambda_1 = \lambda$ sont trois fonctions holomorphes en O qui satisfont à la relation (O).

$(s_1)_o, (s_2)_o, (s_3)_o$ est donc bien un système générateur, en o, de $\overline{\Gamma}$.

Il n'existe pas, en o, de système générateur formé de moins de trois germes :

LEMME 3. *Si, au voisinage de $o \in B$, une section holomorphe de E incluse dans $\overline{\Gamma}$, σ, est combinaison linéaire à coefficients holomorphes de sections holomorphes de E incluses dans $\overline{\Gamma}$, $\{\sigma_i\}$, la partie homogène de degré 1 de σ est combinaison linéaire à* *coefficients constants des parties homogènes de degré 1 de* σ_i.

En effet, soit $\sigma = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sigma_i$ où λ_i est holomorphe au voisinage de $o \in B$.

Désignons par X, Y, Z (resp $X_i Y_i Z_i$) les composantes de σ (resp σ_i); on a :

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \ ; \ Y = P \ \lambda_i Y_i \ ; \ Z = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Z_i .$$

σ_i étant incluse dans $\overline{\Gamma}$, on a (cf. Lemme 1 Cor.) :

$$X_i^{(o)} = Y_i^{(o)} = Z_i^{(o)} = 0$$

d'où :

$$X^{(1)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(o)} X_i^{(1)}; \ Y^{(1)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(o)} Y_i^{(1)}; \ Z^{(1)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(o)} Z_i^{(1)}$$

LEMME 4. *Les sections de E homogènes de degré 1 incluses dans* $\overline{\Gamma}$ *forment un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des complexes.*

En effet, une section de E homogène de degré 1 est un système de trois formes linéaires à coefficients dans le corps des complexes :

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= ax + by + cz \\ Y^{(1)} &= a'x + b'y + c'z \\ Z^{(1)} &= a''x + b''y + c''y \end{aligned}$$

L'ensemble de ces sections forment donc un espace vectoriel sur C de dimen-sion 9.

L'ensemble des sections homogènes de degré 1 incluses dans $\overline{\Gamma}$ constituent un sous-espace vectoriel du précédent de dimension 3 : en effet, une section σ de compo-santes $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$ sera incluse dans $\overline{\Gamma}$ si et seulement si,

$$x X^{(1)} + y Y^{(1)} + z Z^{(1)} = 0$$

i.e. $a = b' = c'' = 0$; $b = -a'$; $c = -a''$; $c' = -b''$.

D'où :

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= by + cz \\ Y^{(1)} &= -bx + c'z \\ Z^{(1)} &= -cx - c'y \end{aligned}$$

où l'on voit que la section $(X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)})$ est combinaison linéaire à coefficients constants, de $s_3(-y, x, o)$, $s_2(z, o, -x)$ et $s_1(o, -z, y)$:

$$(X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}) = b s_1 + c s_2 + c' s_3$$

D'autre part, s_1, s_2, s_3, sont linéairement indépendants sur C. Ces trois sec-tions constituent donc une base de l'espace vectoriel sur C des sections de E homo-gènes de degré 1 - espace qui est donc de dimension 3.

C. Q. F. D.

LEMME 5. *Soit* $\{(\sigma_1)_o, \ldots, (\sigma_r)_o\}$ *un système générateur en* o *de* $\overline{\Gamma}$*; on a :* $r \geq 3$.

DEMONSTRATION.

Notons $(\sigma_1, \ldots \sigma_r)$ des sections holomorphes de E, définies au voisinage de o, incluses dans $\overline{\Gamma}$, de germes en o $\{(\sigma_1)_o \ldots (\sigma_r)_o\}$.

D'après la définition 1, toute section σ holomorphe de E, définie au voisinage de o, incluse dans $\overline{\Gamma}$, peut s'écrire :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sigma_i$$

où les λ_i sont holomorphes et l'égalité vaut sur un voisinage de o. Ceci est vrai, en particulier, pour σ homogène de degré 1. Il en résulte (cf. Lemme 3) que toute section de E homogène de degré 1 incluse dans $\overline{\Gamma}$ peut s'écrire :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sigma_i^{(1)}$$

où $\lambda_i \in C$ et où $\sigma_i^{(1)}$ désigne la partie homogène de degré 1 de σ_i.

L'ensemble $\{\sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_r^{(1)}\}$ engendre donc l'espace vectoriel sur C des sections de E homogènes de degré 1 incluses dans $\overline{\Gamma}$. Or, d'après le lemme 4, cet espace vectoriel est de dimension 3 sur C et toute partie l'engendrant contient au moins trois éléments.

Le lemme 5 est ainsi démontré, ce qui achève l'étude du contre-exemple.

3. *ENSEMBLE DES VALEURS PRISES PAR LES SECTIONS HOLOMORPHES DE E INCLUSES DANS UN p-CHAMP Γ DE E EN UN POINT SINGULIER POUR Γ.*

Revenons au cas envisagé au début de ce paragraphe où B est un ouvert de C^q, où $E = B \times C^n$ et où Γ est un p-champ.

Pour terminer l'étude locale de $\mathcal{S}(\Gamma)$, ajoutons que de même que pour $p = 1$ un point $a \in B$ est singulier pour Γ si et seulement si toutes les sections holomorphes de E définies au voisinage de a incluses dans Γ sont nulles en a (cf. § 2 prop. 5), de même, pour p quelconque on a la :

PROPOSITION 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a de B soit singulier pour* Γ *est que l'ensemble* $\mathcal{B}(\Gamma)_a$ *des valeurs prises dans E par les éléments de la fibre* $\widetilde{\mathcal{S}(\Gamma)}_a$ *constitue un sous-espace vectoriel de* E_a *de dimension strictement inférieure à p.*

REMARQUE. En un point régulier $x \in B$, ce sous-espace $\mathcal{B}(\Gamma)_x$ n'est autre que l'élément linéaire du champ Γ en x et est donc de dimension p.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.

Soit $a \in B$ un point singulier où $\mathcal{B}(\Gamma)_a$ soit de dimension supérieure ou égale à p. Il existerait p vecteurs dans $\mathcal{B}(\Gamma)_a$ linéairement indépendants : $v_1, \ldots, v_p$. Ces vecteurs $v_1, \dots, v_p$ seraient les images dans E_a, par l'application but, de p germes de $\mathfrak{J}(\Gamma)_a : (\sigma_1)_a, \dots, (\sigma_p)_a$. Il existerait un voisinage V de a dans B et une section de $\mathfrak{J}(\Gamma)$ au dessus de V, $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ dont le germe en a serait $((\sigma_1)_a, \dots, (\sigma_p)_a)$. Les valeurs en a des sections $\sigma_1, \dots \sigma_p$ de E seraient $v_1, \dots, v_p$, vecteurs linéairement indépendants de E_a; donc, il existerait un voisinage W de a où $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ prendraient des valeurs linéairement indépendantes. $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ définiraient sur W un p-champ sans singularités, Γ', coïncidant avec Γ en tout point de W régulier pour Γ, i.e. sur un ensemble partout dense de W; Γ et Γ' coïncideraient donc sur tout W et $a \in W$, régulier pour Γ', serait régulier pour Γ, ce qui est contraire à l'hypothèse.

AUTRE DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.

On utilise le :

LEMME. *$\forall a \in B$, $\mathfrak{B}(\Gamma)_a \subset \bigcap_{h \in \Gamma(a)} h$ où h désigne un sous-espace vectoriel de dimension p qui est une valeur au point a de l'application Γ de B dans $G_p(C^n)$.*

Si a est régulier, l'inclusion résulte de l'égalité évidente :

$$\mathfrak{B}(\Gamma)_a = \Gamma(a).$$

Si a est singulier, considérons $s(x)$, section de E incluse dans Γ, définie au voisinage de a, et montrons que l'on a :

$$\forall h \in \Gamma(a), s(a) \in h.$$

La valeur singulière h de Γ en a est limite de valeurs h_i prises en des points réguliers x_i tendant vers a (cf. chap. I §1 déf. 5,6 et prop. 1). En tout point x_i (régulier) on a :

$$s(x_i) \in h_i$$

Donc à la limite, s étant holomorphe, donc continue,

$$s(a) \in h.$$

4. Indices des singularités.

Ce bref paragraphe contient quelques définitions et résultats de nature *locale*. Une formule, de nature globale, sera donnée au chapitre IV § 3 après l'étude de la classification des champs.

DEFINITION 1. *Soit E un espace fibré vectoriel analytique complexe de base B (B de dimension q) de fibre C^n. Nous considérons une section holomorphe σ de E au-dessus d'un ouvert U de B comme une application holomorphe de B dans E et notons $\sigma(B)$, le graphe de cette application; le graphe de la section nulle sera identifié avec B.*

Une section σ est dite transverse *à la section nulle sur l'ouvert U de B si :*

$$\forall x \in \sigma(U) \cap U,$$

la réunion de l'espace tangent à $\sigma(U)$ en x et de l'espace tangent à U en x engendre l'espace tangent à E en x.

Soit σ une section holomorphe de E, transverse à la section nulle : si $q < n$, l'ensemble $\sigma^{-1}(0)$ des zéros de σ est vide; si $q \geq n$, $\sigma^{-1}(0)$ peut être non vide ; c'est alors une sous-variété analytique régulière de B, de codimension complexe n. En particulier, si $q = n$, $\sigma^{-1}(0)$ est discret.

DEFINITION 2. *Nous gardons les notations de la définition 1. Soit Γ un 1-champ de E méromorphe ; x un point singulier pour Γ ; s une section holomorphe de E génératrice pour Γ au voisinage de x.*

x est dit singulier de codimension ordinaire *si, au voisinage de x, l'ensemble des singularités de Γ est une sous-variété analytique régulière de B, de codimension n.*

x est dit singulier simple *s'il existe un voisinage de x sur lequel s est transverse à la section nulle ; (cette définition ne dépend pas du choix de s).*

Une singularité simple est, a fortiori, de codimension ordinaire.

Si $q < n$, Γ n'a pas de singularité de codimension ordinaire; si $q = n$, l'ensemble des singularités de codimension ordinaire de Γ est discret.

REMARQUE. De l'ensemble des singularités, on peut seulement dire, en général, qu'il est analytique et de codimension comprise entre 2 et $q + 1$.

Dans la suite de ce paragraphe, quand il s'agira de singularités de codimension ordinaire (simples ou non) la question sera de caractère local; on pourra donc, à l'aide de cartes, se ramener à la situation suivante :

La base B est un ouvert de C^q : on pose $q = n + p$, $p \geq 0$, et on désigne par:

$$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}$$

les coordonnées sur B.

E est identifié à $B \times C^n$.

On considère un 1-champ méromorphe Γ présentant à l'origine de C^q une singularité de codimension ordinaire et, de plus, tel que l'ensemble de ses singularités soit la sous-variété linéaire S de C^q définie par :

$$x_1 = \dots = x_n = 0.$$

On note :

s une section de E génératrice pour Γ sur B; $R = B - S$.

Γ_R (resp. s_R) l'application holomorphe, restriction de Γ (resp. s) à R dans $P(n-1, C)$ (resp. C^n) ;

$\mathbf{S}(2n-1)$ le quotient de $C^n - \{0\}$ par le groupe des homothéties positives;

s'_R le produit à droite de s_R par la projection de $C^n - \{0\}$ sur son quotient $\mathbf{S}(2n-1)$.

DEFINITION 3. *Soit Σ une sphère orientée à $(2n-1)$ dimensions, incluse dans $B-S$:*

$$\Sigma \subset B-S;$$

supposons que le nombre d'entrelacement de Σ et de S soit 1 (par exemple, Σ est la frontière d'une boule voisinage de l'origine dans la variété d'équations :

$$x_{n+1} = \dots = x_{n+p} = 0).$$

On appelle indice de la singularité *à l'origine du champ Γ la classe d'homotopie de l'application Γ_R de Σ dans $P(n-1, C)$.*

On sait que $\pi(P(n-1, C))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$: cette classe est donc un nombre entier.

Il est clair que la définition ci-dessus ne dépend pas de la sphère Σ choisie celle-ci étant définie à une homotopie près par la condition d'avoir avec S un nombre d'enlacement égal à 1.

Dans ce qui suit, nous supposerons $p = 0$; le cas général se ramène à ce cas particulier car l'indice de la singularité à l'origine du champ Γ sur B est égal à l'indice de la singularité de la restriction de Γ à la sous-variété d'équation :

$$x_{n+1} = \dots = x_{n+p} = 0 .$$

PROPOSITION 1. *L'indice de la singularité à l'origine de Γ n'est autre que l'indice de l'application $s : B \to C^n$ à l'origine.*

En effet, la classe de l'application Γ_R de Σ dans $P(n-1, C)$ se calcule comme la classe d'un relèvement de Γ_R à $\mathbf{S}(2n-1)$ dont $P(n, C)$ est un quotient : nous prendrons s'_R pour relèvement de Γ_R. Or, la classe de l'application s'_R de Σ dans $\mathbf{S}(2n-1)$ n'est autre que l'indice à l'origine de l'application s de B dans C^n.

PROPOSITION 2. *L'indice d'une singularité est un nombre entier qui peut prendre toute valeur strictement positive.*

En effet, l'indice de l'application holomorphe s de B dans C^n au dessus de 0 est un nombre strictement positif : c'est un nombre positif parce que le Jacobien d'une application holomorphe est positif; il est strictement positif parce que la valeur nulle est effectivement prise par s.

En calculant, sur des exemples, combien de fois la valeur nulle est prise par s, nous verrons que l'indice peut prendre toute valeur positive.

1) Considérons le champ défini par l'application s :

$$X_i = x_i ;$$

son indice est *1*.

Plus généralement toute singularité de codimension ordinaire qui a un indice égal à *1* est simple et réciproquement.

2) Considérons le champ défini par l'application s :

$$X_1 = x_1^p \quad (\, p \text{ entier strictement positif })$$
$$X_2 = x_2$$
$$X_n = x_n \quad ;$$

Son indice est p car tout système de valeurs X_i voisin de l'origine est pris pour p systèmes de X_i.

La démonstration est ainsi achevée.

PROPOSITION 3. *Soit x une singularité de codimension ordinaire d'un 1-champ Γ d'un espace fibré vectoriel E ; on a :*

$$\Gamma(x) = P(E_x).$$

DEMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas où E est le produit $U \times C^n$; U ouvert de C^n ; x, l'origine.

Identifions Γ, application de U dans $U \times P(n\text{-}1, C)$, avec le produit de Γ par la projection $U \times P(n\text{-}1, C)$ dans $P(n\text{-}1, C)$.

On doit montrer que l'image par Γ de $V - \{ 0 \}$ - où V est un voisinage de 0 - est $P(n\text{-}1, C)$ tout entier. Or, celà découle de ce que l'image par s'_R d'une sphère quelconque de centre O et contenue dans V est $\mathbf{S}(2n\text{-}1)$ tout entière, sinon l'indice de O serait nul et O ne serait pas singulier pour Γ.

REMARQUE. Il résulte de la proposition 3 que si Γ est un p-champ, le *1*-champ ${}^p\Lambda\Gamma$ ne peut avoir de point singulier de codimension ordinaire au sens de la définition 2 : en effet, au voisinage d'une telle singularité, x, le *1*-champ prendrait toutes les directions de $P({}^p\Lambda E_x)$ donc, en particulier, les directions de p-vecteurs non décomposables.

La notion de singularité de « codimension ordinaire » pour un p-champ reste à définir, et ne peut se ramener à celle proposée pour les *1*-champs.

CHAPITRE TROIS

ESPACES FIBRES VECTORIELS ET ESPACES FIBRES PROJECTIFS

L'objet de ce chapitre est double : d'abord étudier les espaces fibrés vectoriels analytiques complexes admettant un espace fibré projectif associé donné (à un isomorphisme près); ensuite, préparer la classification des sections méromorphes d'un espace fibré projectif donné. L'étude de ces deux problèmes utilise les résultats du chapitre II dont nous conservons les notations.

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{P}$ désigne un espace fibré analytique complexe projectif de base B, de fibre $P(n-1, C)$.

1. Classification des espaces fibrés vectoriels associés à un espace fibré projectif donné.

1. COUPLES ASSOCIES; ISOMORPHISMES DE COUPLES.

DEFINITION 1. *Soit E (resp. $\mathbf{P}$) un espace fibré analytique complexe vectoriel (resp. projectif) de base B; B est identifié à la section nulle de E.*

Une *projection admissible* de E sur $\mathbf{P}$ est une application ρ de $E - B$ sur $\mathbf{P}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1) ρ est une application de fibre sur fibre (i.e. commute avec les projections de $\mathbf{P}$ et E sur B).

2) il existe un isomorphisme d'espaces fibrés analytiques complexes, θ - dont il est aisé de voir qu'il est unique- de $P(E)$ sur $\mathbf{P}$ tel que :

$$\theta \circ \pi = \rho ;$$

θ et ρ seront dits *associés* l'un à l'autre. Nous appellerons *couple associé* à $\mathbf{P}$ tout couple (E, ρ) où E est un espace fibré vectoriel analytique complexe de base B et ρ une projection admissible de E sur $\mathbf{P}$.

DEFINITION 2. *Conservons les notations de la définition 1; nous appellerons* isomorphisme *(resp. isomorphisme* ensembliste*) de* couples associés *de (E, ρ) sur (E', ρ') tout isomorphisme Ψ d'espaces fibrés analytiques complexes (resp d'ensembles fibrés : cf chap. I) de E sur E' rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & E' \arrow[dl, "\rho'"] \\ & \mathbf{P} & \end{tikzcd}$$

Deux couples associés à $\mathbf{P}$: $(E\,\rho)$, (E', ρ') seront dits de *même classe* s'il exis-te un isomorphisme de couples de (E, ρ) sur (E', ρ').

Le quotient de la classe (au sens de la théorie des ensembles !) de tous les cou-ples associés à $\mathbf{P}$ par cette relation d'équivalence est noté $\mathcal{C}(\mathbf{P})$.

2. PRODUIT TENSORIEL D'UN COUPLE PAR UN ESPACE FIBRE EN DROITES ; LE THEOREME DE CLASSIFICATION.

PROPOSITION 1. *Soient E un espace fibré vectoriel analytique complexe ; Δ un espace fibré en droites analytique complexe ; B la base commune à E et à Δ.*

Les espaces fibrés $P(E)$ et $P(E \otimes \Delta)$ sont en isomorphisme canonique par l'ap-plication φ ainsi définie.

Soit $x \in B$; $d_x \in (P(E))_x$ - d_x est une droite de la fibre E_x - ; on pose :

$$\varphi(d_x) = d_x \otimes \Delta_x \in (P(E \otimes \Delta))_x$$

DEFINITION 3. *Soit (E, ρ) un couple associé à $\mathbf{P}$; θ l'isomorphisme $P(E) \to \mathbf{P}$ asso-cié à ρ; φ l'isomorphisme canonique $P(E) \to P(E \otimes \Delta)$.*

Nous poserons :

$$(E, \rho) \otimes \Delta = (E \otimes \Delta, \rho \otimes \Delta)$$

où $\rho \otimes \Delta$ est la projection admissible $E \otimes \Delta \to \mathbf{P}$ associé à l'isomorphisme $\theta \circ \varphi^{1}$ de $P(E)$ sur $\mathbf{P}$.

THEOREME 1. *Le produit tensoriel défini ci-dessus fait opérer $H^1(B, C^*_\omega)$ sur $\mathcal{C}(\mathbf{P})$. Muni de cette opération, $\mathcal{C}(\mathbf{P})$, s'il est non vide, est un espace homogène du groupe abé-lien $H^1(B, C^*_\omega)$.*

DEMONSTRATION.

$H^1(B, C^*_\omega)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'espaces fibrés en droi-tes analytiques complexes de base B. Les produits tensoriels de couples de même clas-se par des espaces fibrés en droites isomorphes étant des couples de même classe, $H^1(B, C^*_\omega)$ opère bien sur $\mathcal{C}(\mathbf{P})$. Qu'il opère comme un groupe résulte de l'associativité du produit tensoriel.

Il reste à démontrer qu'il opère transitivement et simplement, ce qui sera fait au nº 4 de ce paragraphe.

REMARQUE. Si **P** est un espace fibré projectif de dimension zéro, **P** s'identifie à sa base B; les couples associés à **P** ne sont autres que les espaces fibrés en droites analytiques complexes de base B munis de leur projection sur cette base; dans ce cas particulier, le théorème 1 est évident. On a alors :

$$\Delta_2 \approx \Delta_1 \otimes L(\Delta_1, \Delta_2); \quad \Delta_2 \approx L(\Delta_1, \Delta_1 \otimes \Delta_2)$$

où $L(\Delta_1, \Delta_2)$ est l'espace fibré des applications linéaires de fibre dans fibre de Δ_1 dans Δ_2, se projetant sur l'application identique de B.

En généralisant la définition de L au cas de deux couples (cf. déf. 4) nous pourrons démontrer les propositions 6 et 7 qui généralisent ces formules.

3. FAISCEAU ET ESPACE FIBRE D'ISOMORPHISME ENTRE DEUX COUPLES.

DEFINITION 4. *Soient (E, ρ) (resp. E', ρ') un couple associé à* **P**; $x \in B$.

Nous appellerons isomorphisme admissible d'une fibre sur une fibre : $(E, \rho)_x \to (E', \rho')_x$ tout isomorphisme d'espaces vectoriels, $\Psi_x : E_x \to E'_x$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E_x \arrow[rr, "\Psi_x"] \arrow[dr, "\rho_{E_x}"'] & & E'_x \arrow[dl, "\rho'_{E'_x}"] \\ & \mathbf{P}_x & \end{tikzcd}$$

Nous noterons $H^*((E, \rho); (E', \rho'))$ l'ensemble de tous les isomorphismes admissibles d'une fibre sur une fibre $(E, \rho)_x \to (E', \rho')_x$ lorsque x parcourt la base B.

PROPOSITION 2. *$H^*((E, \rho); (E', \rho'))$ est un ensemble fibré C^*-principal (cf, chap. I)*

Posons $H^* = H^*((E, \rho); (E', \rho'))$. H^* est muni de façon évidente d'une projection sur B, projection que nous noterons p. Posons :

$$\forall z \in C^*; \ \forall l \in H^*; \ \forall u \in E_x;$$
$$(z l)(u) = z \, . \, l(u).$$

$z l$ est un isomorphisme admissible de fibre sur fibre, en sorte que nous avons une application :

$$C^* \times H^* \to H^*$$

compatible avec la projection p.

On vérifie immédiatement que, pour tout x, C^* opère simplement et transitive-ment sur H^*_x.

Pour tout ouvert U de B, nous noterons $\mathcal{K}((E,\rho);(E',\rho'))(U)$ - ou $\mathcal{K}(U)$ en abrégé - l'ensemble de tous les isomorphismes ensemblistes de couples $(E,\rho)_U \to (E',\rho')_U$. Le système des $\mathcal{K}(U)$, muni de l'opération de restriction habituelle, forme un faisceau $\mathcal{K}$. Ce faisceau s'identifie au faisceau des sections (au sens ensembliste) de $H^*((E,\rho);(E',\rho'))$ et le faisceau des isomorphismes de couples en est un sous-faisceau que nous noterons $\mathcal{H}((E,\rho);(E',\rho')$ - ou $\mathcal{H}$ en abrégé.

PROPOSITION 3. *Il existe sur H^* une unique structure d'espace fibré analytique com-plexe C^*-principal telle que le faisceau des sections analytiques de H^* soit $\mathcal{H}$.*

D'après le corollaire de la proposition 6 §2 chap. I, il suffit d'établir la

PROPOSITION 4. *Le faisceau $\mathcal{H}$ est C^*_ω - principal.*

DEMONSTRATION.

1) $\mathcal{H}$ est un faisceau surjectif :

$\forall x_o \in B$, $\exists U$ - voisinage ouvert de x dans B - tel qu'il existe une carte φ(resp. φ') de $U \times C^n$ sur E_U (resp. E'_U). Posons :

$$\hat{\rho} = \rho_{E_U} \circ \varphi$$
$$\hat{\rho}' = \rho_{E'_U} \circ \varphi'$$

$\hat{\rho}$ (resp. $\hat{\rho}'$) est une projection admissible de $U \times C^n$ sur $\mathbf{P}_U$. Notons $\hat{\theta}$ (resp. $\hat{\theta}'$) l'isomorphisme $U \times P(n-1, C) \to \mathbf{P}_U$ associé à $\hat{\rho}$ (resp. $\hat{\rho}'$). $g = \hat{\theta}'^{-1} \circ \hat{\theta}$ est un auto-morphisme de $U \times P(n-1, C)$ de la forme :

$$(x, y) \in U \times P(n-1, C); (x, y) \to (x, \gamma(x)y)$$

où γ est une application analytique complexe $U \to GP(n-1, C)$.

x_o admet un voisinage $V(x_o)$ dans U tel que la restriction de g à $V(x_o) \times P(n-1, C)$ se relève suivant un automorphisme g' de $V(x_o) \times C^n$ (cf. lemme ci-dessous).

$(\varphi' \circ g' \circ \varphi)_{E_{V(xo)}}$ est un isomorphisme de couples $(E,\rho)_{V(xo)} \to (E',\rho')_{V(xo)}$.

2) Soit U un ouvert de B tel que $\mathcal{H}(U)$ ne soit pas vide; $\mathcal{H}(U)$ est un espace homogène de $C^*_\omega(U)$.

En effet, soient $\lambda \in C^*_\omega(U)$; $\Psi \in \mathcal{H}(U)$; $\lambda\Psi$ est l'isomorphisme : $\forall u \in E$, $u \to \lambda(pu)\Psi(u)$ où pu désigne la projection de u sur B : $\lambda(pu) \in C^*$. On vérifie immédiatement que cet isomorphisme est un élément de $\mathcal{H}(U)$. Donc $C^*_\omega(U)$ opère sur $\mathcal{H}(U)$. Montrons que cette opération est simple et transitive :

Soient $$\varphi \in \mathcal{H}(U),\ \Psi \in \mathcal{H}(U)$$
$$\forall \in E,\ \rho' \circ \varphi(u) = \rho' \circ \Psi(u)$$
donc, $$\varphi(u) = \lambda(u)\Psi(u) \text{ où } \lambda(u) \in C^*$$

φ(resp. Ψ), restreint à une fibre quelconque, étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, $\lambda(u)$ est une fonction de pu seulement. Enfin, φ(resp. Ψ) étant un isomorphisme d'espaces fibrés analytiques complexes, $\lambda(pu)$ est une fonction analytique de pu. Autrement dit, il existe $\lambda \in C^*_\omega$ unique tel que :

$$\varphi = \lambda \Psi$$

3) LEMME. *Soit g un automorphisme de $U \times P(n-1, C)$ de la forme :*

$$g : (x, y) \to (x, \gamma(x) y)$$

$x \in U$; $y \in P(n-1, C)$; $\gamma(x) \in GP(n-1, C)$ et dépendant analytiquement de x.

Notons I_U^U l'application identique de U, π' l'application produit $I_U^U \times \pi$ de $U \times (C^n - \{o\})$ sur $U \times P(n-1, C)$.

Tout $x_o \in U$ admet un voisinage V dans U tel que la restriction de g à $V \times P(n-1, C)$ se relève, par π', suivant un automorphisme g' de $V \times (C^n - \{o\})$ de la forme :

$$(x, z) \to (x, \gamma'(x) z)$$
$$x \in U,\ z \in (C^n - \{o\}),\ \gamma'(x) \in GL(n, C)$$

et dépendant analytiquement de x.

g' est défini à la multiplication près par une fonction holomorphe inversible sur V.

En effet, $GL(n, C)$ est l'ouvert de $L(C^n, C^n)$ constitué par les applications linéaires inversibles, $GP(n-1, C)$ est l'image de cet ouvrage par la projection canonique de $L(C^n, C^n)$ sur son espace projectif associé. Or, $L(C^n, C^n)$ est isomorphe à C^{n^2} et son espace projectif associé est isomorphe à $P(n^2-1, C)$.

Le problème à résoudre est donc un cas particulier du suivant : relever une application holomorphe :

$$U \to P(n^2-1, C)$$

en une application holomorphe :

$$U \to C^{n^2}$$

problème qui peut être résolu localement (cf. chap. II § 2 prop. 4 dém. 2).

Dans la suite, nous considérerons $H^*((E, \rho); (E', \rho'))$ muni de sa structure d'espace fibré analytique complexe C^*-principal. Nous noterons $H((E,\rho);(E',\rho'))$ l'espace fibré en *droites* complété de H^*.

PROPOSITION 5. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un isomorphisme de couples associés à* **P** *de* (E,ρ) *sur* (E',ρ') *est que l'espace fibré* C^*-*principal* $H^*((E,\rho);(E',\rho'))$ *soit trivial.*

En effet, un tel isomorphisme existera si et seulement si $H^*((E,\rho);(E',\rho'))$ admet une section analytique définie sur tout B.

4. DEMONSTRATION DU THEOREME DE CLASSIFICATION (théorème1) : fin.

Les deux propositions ci-dessous établissent que $H^1(B, C^*_\omega)$ opère sur $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ transitivement (prop. 6) et simplement (prop. 7).

Les démonstrations de ces deux propositions feront usage du lemme suivant :

LEMME. *Soient* E, E' *deux espaces fibrés vectoriels analytiques complexes de même base,* B. *L'espace fibré vectoriel analytique complexe produit tensoriel :* $E \otimes E'$ *est l'ensemble fibré* $E \otimes E'$ *muni de l'unique structure analytique telle que :*

si s *(resp.* s'*) est une section analytique sans zéros de* E *(resp.* E'*),* $s \otimes s'$: $x \to s(x) \otimes s'(x)$ *est une section analytique de* $E \otimes E'$.

On démontre facilement ce lemme en faisant choix de cartes $U \times C^n \to E_U$ (*resp.* $U \times C^p \to E'_U$).

PROPOSITION 6. *Soient* (E,ρ), (E',ρ') *deux couples associés à* **P**. *Le couple produit tensoriel* $(E,\rho) \otimes H((E,\rho);(E',\rho'))$ *est isomorphe à* (E',ρ') *par l'application :*

$$e_x \otimes \Psi_x \to \Psi_x(e_x) \quad (x \in B)$$

où $\Psi_x(e_x)$ *désigne l'image du vecteur* $e_x \in E_x$ *par l'isomorphisme admissible* Ψ_x *de* E_x *sur* E'_x *(déf. 4).*

La démonstration comporte trois points :

a) L'application est bien définie: si l'on substitue à (e_x, Ψ_x) deux éléments ayant même produit tensoriel, on obtient une même image dans E'.

b) L'application est un isomorphisme de fibre sur fibre.

c) C' est un isomorphisme analytique complexe : il suffit (cf lemme) de montrer que si s (*resp.* h) est une section analytique de E (*resp.* H) au-dessus d'un ouvert U de B, la section analytique $x \to s(x) \otimes h(x)$ de $E \otimes H$ va sur une section s' analytique de E'; or s' est l'image de s par l'isomorphisme h de E_U sur E'_U.

PROPOSITION 7. *Soient* (E,ρ) *un couple associé à* **P**; Δ *un espace fibré en droites analytique complexe de base* B. $H((E,\rho);(E,\rho)\otimes\Delta)$ *est isomorphe à* Δ *par l'application qui à* $\delta_x \in \Delta_x$ *associe l'isomorphisme admissible :*

$$\begin{array}{ccc} e_x & \to & e_x \otimes \delta_x \\ \cap & & \cap \\ E_x & & E_x \otimes \Delta_x \end{array}$$

L'on démontre successivement que l'application est un isomorphisme d'ensembles fibrés et qu'à une section analytique de Δ^* (i.e. à une section sans zéros de Δ) au dessus d'un ouvert U de la base B correspond un isomorphisme d'espaces fibrés analytiques

$$E_U \to E_U \otimes \Delta_U$$

d'où résulte la proposition (cf. lemme).

Les propositions suivantes sont des conséquences faciles à établir des propositions 6 et 7 et du théorème 1; elles seront utilisées au § 3.

PROPOSITION 8. *Soient* $\{E_i, P_i)\}(i = 1, 2, 3)$ *trois couples associés à* **P** . *Notons :*

$$H_i^j = H((E_i \rho_i); (E_j \rho_j))$$

L'application :

$$\begin{array}{ccc} h_x \otimes h'_x & \to & h'_x \circ h_x \\ \cap & & \cap \\ H_1^2 \otimes H_2^3 & & H_1^3 \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces fibrés en droites analytiques complexes.

PROPOSITION 9. *Conservons les notations de la proposition précédente.*

H_1^2 *est canoniquement isomorphe à l'espace fibré dual* $\check{H}_2^1$ *de* $\check{H}_2^1$

PROPOSITION 10. *Conservons les notations des propositions 8 et 9. Soit, de plus,* Δ_1, Δ_2 *deux espaces fibrés en droites analytiques complexes,* Δ_1 *le dual de* Δ_1. *On a :*

$$H((E_1, \rho_1) \otimes \Delta_1 ; (E_2, \rho_2) \otimes \Delta_2) \approx H_1^2 \otimes \check{\Delta}_1 \otimes \Delta_2$$

5. UNE GENERALISATION DU THEOREME DE CLASSIFICATION.

Nous donnons ci-dessous sans démonstration un théorème de classification dont la parentée avec celui ci-dessus est évidente.

Comme au chapitre I nous ferons usage de l'indice K-K pouvant prendre les valeurs C, δ, ω selon que l'on considère le point de vue continu, différentiable ou analytique.

Soit L un K-groupe; C un sous-groupe central de L; P le quotient L / C. L'on suppose réalisées les conditions suivantes :

a) C et P sont des K-groupes; l'inclusion de C dans L et la projection de L sur son quotient P sont des K-applications.

b) Tout point de P admet un voisinage au dessus duquel est définie une K--section de L - considérée comme espace fibré sur P. (Ceci est toujours vrai dans le cas de groupes de Lie : $K = \delta$ ou $k = \omega$).

On se propose d'étudier les k - fibrés C, L, P - principaux de base une k - variété B donnée. On définit successivement :

1) Le K - espace fibré P - principal $P(\mathbf{L})$ associé à un k - fibré L - principal : $\mathbf{L}$. C'est le quotient de $\mathbf{L}$, fibre par fibre, par la relation :

$$\lambda_x \sim \lambda'_x \text{ si } \lambda_x, \lambda'_x \in \mathbf{L}_x ; \exists\, c \in C : \lambda'_x = c\lambda_x$$

La K - structure de $P(\mathbf{L})$ est telle que la projection p de $\mathbf{L}$ sur son quotient $P(\mathbf{L})$ soit une K - application.

2) Un couple associé à un K - espace fibré P - principal $\mathbf{P}$: c'est un couple formé d'un K - espace fibré L - principal $\mathbf{L}$, et d'une k - application $\rho : \mathbf{L} \to \mathbf{P}$ telle qu'il existe un isomorphisme θ de K - espaces fibrés P - principaux (θ est dit associé à ρ) rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ P(\mathbf{L}) \arrow[r, "\theta"'] & \mathbf{P} \end{tikzcd}$$

On définit de façon évidente les isomorphismes et les classes de couples associés à $\mathbf{P}$; l'ensemble de ces classes est noté $\mathcal{C}(\mathbf{P})$.

3) Le produit tensoriel d'un couple associé $(\mathbf{L}, \rho)$ par un K - espace fibré C--principal $\mathbf{C}$: on définit $\mathbf{C} \otimes \mathbf{L}$ comme le quotient de $\mathbf{C} \times \mathbf{L}$, fibre par fibre, par la relation d'équivalence :

$$(\gamma_x, \lambda_x) \sim (\gamma'_x, \lambda'_x) \in \mathbf{C}_x \times \mathbf{L}_x$$

$$\text{si} \quad c \in C : \gamma'_x = c\gamma_x ; \ \lambda_x = c\lambda'_x .$$

La projection $\mathbf{C} \otimes \rho$ de $\mathbf{C} \otimes \mathbf{L}$ sur $\mathbf{P}$ envoie $\gamma_x \otimes \lambda_x$ sur $\rho(\lambda_x)$.

On définit de même le produit tensoriel de deux K - espaces fibrés C - principaux.

On a le :

THEOREME DE CLASSIFICATION. $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ est, soit vide, soit espace homogène de $H^1(B, C_k)$ pour la multiplication $\otimes$ des classes de couples par les classes de K - espaces fibrés C - principaux.

Dans la démonstration du théorème, joue un rôle essentiel la construction d'un espace fibré d'isomorphismes entre deux couples analogue à celle faite au n° 3 : cette construction n'est possible que grâce à la condition b (cf. prop.4 dém.lemme).

2. Espaces fibrés vectoriels associés à un espace fibré projectif muni d'une section méromorphe.

Dans ce paragraphe, nous construisons canoniquement un couple associé à un espace fibré projectif muni d'une section méromorphe. Outre qu'elle fournit un théorème d'existence, cette construction sera utilisée dans la suite pour classer les sections méromorphes d'un espace fibré projectif.

1. *FAISCEAUX DE GROUPOIDES.*

La notion de faisceau dont nous aurons besoin sortant de la théorie des ensembles plus qu'il n'est coutume, nous allons d'abord préciser les définitions utilisées ici.

DEFINITION 1. *(cf. [3]) Un* groupoïde *est une catégorie dont les éléments -appelés morphismes - sont tous inversibles.*

Un groupoïde est dit *transitif* (resp. *simple*) si à chaque couple d'unités (e',e) correspond au moins (resp. au plus) un morphisme de e vers e'.

DEFINITION 2.*(cf. [5]) Soit B un espace topologique. Un* préfaisceau de groupoïdes *sur B est défini par la donnée,*

1) pour chaque ouvert U de B, d'un groupoïde $\mathcal{G}(U)$,

2) pour tout couple d'ouverts U, V vérifiant :

$$V \subset U$$

d'un foncteur de restriction :

$$\Phi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V),$$

les Φ_U^V *vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\Phi_U^U = \textit{identité}; \textit{ si } W \subset V \subset U,\ \Phi_V^W \circ \Phi_U^V = \Phi_U^W$$

DEFINITION 3. *Un préfaisceau de groupoïdes sur B est appelé* faisceau de groupoïdes *si les deux conditions suivantes sont remplies :*

1) Soit U un ouvert de B; $\{U_i\}$ *un recouvrement de U par des ouverts;* Ψ_1 *et* Ψ_2 *deux morphismes de* $\mathcal{G}(U)$; Ψ_{kU_i} *la restriction de* Ψ_k *à* U_i *(i.e.* $\Psi_{kUi} = \Phi_U^{U_i}(\Psi_k)$*)* $(k = 1.2)$.

Si $\forall i,\ \Psi_{1U_i} = \Psi_{2U_i}$, *alors,* $\Psi_1 = \Psi_2$.

2) U étant encore un ouvert de B et $\{U_i\}$ *un recouvrement ouvert de U, soit* $\{\Psi_i\}$ *un système de morphismes de* $\mathcal{G}(U_i)$ *tel que :*

$$\forall\ (i,j) \textit{ avec } U_i \cap U_j \neq \phi \textit{ on ait : } \Psi_{i\,U_i \cap U_j} = \Psi_{j\,U_i \cap U_j}$$

Alors il existe un morphisme Ψ *de* $\mathcal{G}(U)$ *tel que :*

$$\Psi_{U_i} = \Psi_i$$

2. *TRIPLES ASSOCIES A* $(\mathbf{P},\Gamma)$; *LE THEOREME D'EXISTENCE.*

DEFINITION 4. *Soit* (E,ρ) *un couple associé à* $\mathbf{P}$; θ *l'isomorphisme* $P(E)\to\mathbf{P}$ *associé à* ρ; Γ *une section méromorphe de* $\mathbf{P}$; s *une section holomorphe de* E.

s sera dit *incluse* dans Γ (resp. *génératrice* pour Γ) sur un ouvert U de B par ρ- ou par θ - si elle est incluse (resp. génératrice), sur U, dans (resp. pour) le 1-champ méromorphe $\theta^{-1}\circ\Gamma$ (cf. chap.II § 1 déf.2' et § 2 déf. 1).

DEFINITION 5. *Soit* Γ *une section méromorphe de* $\mathbf{P}$. *Nous appellerons* triple associé à $(\mathbf{P},\Gamma)$ *tout triple* (E,s,ρ) *où :*

(E,ρ) *est un couple associé à* $\mathbf{P}$,

s *une section holomorphe de* E *génératrice pour* Γ *par* ρ.

DEFINITION 6. *Soient :*

$$t=(E,s,\rho);\ t_1=(E_1,s_1,\rho_1)$$

deux triples associés à $(\mathbf{P},\Gamma)$.

Un isomorphisme de triples, $\Psi:(E,s,\rho)\to(E_1,s_1,\rho_1)$ est un couple $(\overline{\Psi},t)$ où $\overline{\Psi}$ est un isomorphisme d'espaces fibrés vectoriels analytiques complexes :

$$\overline{\Psi}:E\to E_1$$

tel que :

$$1)\ \rho=\rho_1\circ\overline{\Psi}$$
$$2)\ s_1=\overline{\Psi}\circ s$$

REMARQUE : En vue des constructions canoniques effectuées dans ce paragraphe, on a précisé la source, t, de l'isomorphisme de triples.

Pour chaque ouvert U de B, nous allons considérer les restrictions à U de $\mathbf{P}$ et Γ, et les triples associés à $(\mathbf{P}_U,\Gamma_U)$. Associons à U le groupoïde $\mathcal{G}(U)$ ayant pour objets les triples associés à $(\mathbf{P}_U,\Gamma_U)$ et pour morphismes les isomorphismes entre ces triples.

Soit $\Psi\in\mathcal{G}(U)$: Ψ est un isomorphisme

$$(E,s,\rho)\to(E',s',\rho')$$

Pour tout ouvert V inclus dans U, posons :

$$\Phi_U^V(\Psi):(E_V,s_V,\rho_{E_V})\to(E'_V,s'_V,\rho'_{E'_V})$$

On définit ainsi sur B un préfaisceau, $\mathcal{G}$, de groupoïdes.

PROPOSITION 1. *Le préfaisceau* $\mathcal{G}$ *défini ci-dessus est un faisceau de groupoïdes sur* B *(cf. déf. 3).*

DEMONSTRATION.

1) Vérifions que la condition 1) de la définition 3 est satisfaite.

Soit U un ouvert de B, $\{U_i\}$ un recouvrement de U par des ouverts; $\Psi_k \in \mathcal{G}(U)$ $(k = 1,2)$ avec :

(1) $$\forall i \ \Psi_{1U_i} = \Psi_{2U_i}$$

Puisque chaque morphisme Ψ possède une seule unité à droite, $\alpha(\Psi)$, (resp. à gauche, $\beta(\Psi)$) cette égalité entraine, pour chaque i, l'identité des unités à droite (resp. à gauche) de Ψ_{1U_i} et Ψ_{2U_i}. Posons :

$$\alpha(\Psi_k) = (E_k, s_k, \rho_k); \ \beta(\Psi_k) = (E'_k, s'_k, \rho'_k) \text{ (i.e. } \Psi_k = (E_k, s_k, \rho_k) \to (E'_k, s'_k, \rho'_k))$$

On a :

(2) $$\forall i, \ (E_{1U_i}, s_{1U_i}, \rho_{1E_{1U_i}}) = (E_{2U_i}, s_{2U_i}, \rho_{2E_{2U_i}})$$

Les égalités (2) se décomposent en trois groupes d'égalités ($(2)_1$, $(2)_2$, $(2)_3$ ci-dessous) d'où nous déduirons :

(3) $$\begin{cases} E_1 = E_2; \ s_1 = s_2; \ \rho_1 = \rho_2 \\ E'_1 = E'_2; \ s'_1 = s'_2; \ \rho'_1 = \rho'_2 \end{cases}$$

a) $E_1 = E_2$; $E'_1 = E'_2$.

En effet, on a :

$(2)_1$ $$\forall i \ E_{1U_i} = E_{2U_i}; \ E'_{1U_i} = E'_{2U_i}$$

E_1 (resp. E'_1) et E_2 (resp. E'_2) coïncident puisqu'ils ont les mêmes éléments; quant aux structures fibrées de E_1 et E_2 (resp. E'_1 et E'_2), ayant même restrictions au-dessus de chaque U_i, elles coïncident en vertu de l'axiome de recollement des struc--tures locales.

b) $s_1 = s_2$; $s'_1 = s'_2$.

C'est une conséquence immédiate de :

$(2)_2$ $$\forall \ i \ s_{1U_i} = s_{2U_i}; \ s'_{1U_i} = s'_{2U_i}$$

c) $\rho_1 = \rho_2$; $\rho'_1 = \rho'_2$.

C'est une conséquence de :

$(2)_3$ $$\forall i \ \rho_{1E_{U_i}} = \rho_{2E_{U_i}}; \ \rho'_{1E'_{U_i}} = \rho'_{2E'_{U_i}}$$

où on a posé $E = E_1 = E_2$; $E' = E'_1 = E'_2$.

Pour achever la démonstration du 1) il faut démontrer que l'on a :

(4) $$\Psi_1 = \Psi_2$$

Posons $(E,s,\rho) = \alpha(\Psi_1) = \alpha(\Psi_2)\,;\,(E',s',\rho') = \beta(\Psi_1) = \beta(\Psi_2)$
Ψ_1 et Ψ_2 sont deux isomorphismes :

$$t = (E,s,\rho) \to (E',s',\rho') = t'$$

on a : $\Psi_1 = (t,\overline{\Psi}_1)\,;\,\Psi_2 = (t,\overline{\Psi}_2)$ où $\overline{\Psi}_1$ et $\overline{\Psi}_2$ sont deux isomorphismes :

$$E \to E'$$

$$\forall\, u \in E, \exists\, i : u \in E_{U_i} \text{ et } \overline{\Psi}_1(u) = \overline{\Psi}_2(u) \qquad \text{d'après (1)}$$

Donc, on a :

$$\overline{\Psi}_1 = \overline{\Psi}_2$$

Et, par suite :

$$\Psi_1 = \Psi_2$$

2) Vérifions qu'est satisfaite la condition 2) de la définition 3.

Soit U un ouvert de B; $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de U ; $\{\Psi_i\}$ un système de morphismes de $\mathcal{G}(U_i)$ tel que :

(1) $$\forall\, i,j \text{ avec } U_i \cap U_j \neq \phi, \text{ l'on ait } \Psi_{iU_i\cap U_j} = \Psi_{jU_i\cap U_j}$$

Posons : $\alpha(\Psi_i) = (E_i, s_i, \rho_i)$; $\beta(\Psi_i) = (E'_i, s'_i, \rho'_i)$.

De (1) on déduit :

$$\forall\, i,j\; E_{1U_i\cap U_j} = E_{jU_i\cap U_j}\,;\; E'_{iU_i\cap U_j} = E'_{jU_i\cap U_j}$$

Posons $E = \bigcup_i E_i$; $E' = \bigcup_i E'_i$. Il existe sur E (resp. E') une structure fibrée bien déterminée telle que E_i soit la restriction de E à U_i : E, muni de cette structure, est obtenu par recollement des E_i.

La proposition 1 est ainsi démontrée.

THEOREME 1. *Pour tout ouvert U de B, le groupoide $\mathcal{G}(U)$ est non vide, simple et transitif.*

En particulier, étant donné $(\mathbf{P},\Gamma)$, il existe un triple (E,s,ρ) associé. Nous verrons que (E,s,ρ) peut être déterminé canoniquement par $(\mathbf{P},\Gamma)$; tout autre triple associé à $(\mathbf{P},\Gamma)$ lui est isomorphe.

Du théorème 1 - qui sera démontré au nº 5 - et d'un résultat de Serre (cf. [6]) on déduit le théorème suivant où l'on fait sur B une hypothèse supplémentaire :

THEOREME 2. *Si la base B est une sous-variété algébrique d'un espace projectif, $\mathbf{P}$ admet des sections méromorphes si et seulement si il existe un couple associé à $\mathbf{P}$.*

4. *PREMIERES PROPRIETES DU FAISCEAU $\mathcal{G}$ (cf. Prop. 1).*

PROPOSITION 2. *Pour tout ouvert U de B, le groupoïde $\mathcal{G}(U)$ est simple.*

i.e. s'il existe un isomorphisme entre deux triples associés à ($\mathbf{P}_U \Gamma_U$), il est unique.

En effet, soient Ψ et Ψ' deux isomorphismes de triples :

$$(E, s, \rho) \to (E_1, s_1, \rho_1)$$

La condition 1) de la définition 6 entraîne :

$$(1) \qquad \overline{\Psi}' = \lambda(x)\overline{\Psi}$$

où $\lambda(x)$ est une fonction holomorphe sur B ; et la condition 2) de la définition 6 entraîne:

$$(2) \qquad \forall x \in B, \quad s_1(x) = \overline{\Psi}(s(x)) = \overline{\Psi}'(s(x)).$$

De (1) et (2) on déduit :

$$\forall x \in B, \ \overline{\Psi}(s(x)) = \lambda(x)\ \overline{\Psi}(s(x)).$$

$\overline{\Psi}$ étant un isomorphisme de fibrés, les zéros de $\overline{\Psi}(s(x))$ ne sont autres que les zéros de $s(x)$ i.e. les points singuliers de Γ_U.Donc, en tout point régulier pour Γ_U, on a :

$$\lambda(x) = 1 .$$

λ étant une fonction holomorphe valant 1 sur un ensemble partout dense dans B, elle est constante sur B.

$$\forall\ x \in B, \qquad \lambda(x) = 1$$

D'où :

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi}$$

D'où, enfin :

$$\Psi' = \Psi$$

PROPOSITION 3. *Tout $x \in B$ admet un voisinage assez petit pour que $\mathcal{G}(U)$ soit non vide.*

En effet, tout $x \in B$ admet un voisinage U' tel que $\mathbf{P}_{U'}$ soit trivial. Il existe donc un isomorphisme :

$$\theta : U' \times P(n-1, C) \to \mathbf{P}_{U'}$$

Soit $\Gamma_{U'}$ la restriction de Γ à U'. $\theta^{-1} \circ \Gamma_{U'}$ est une section méromorphe de $U' \times P(n-1, C)$ et nous savons (cf. chap. II § 2 prop. 1) que x admet, dans U', un voisinage U sur lequel existe une section holomorphe s de $U \times C^n$ génératrice pour $\theta^{-1} \circ \Gamma_U$.

$(U \times C^n, s, \theta \circ \pi_{U \times C^n})$ est un triple associé à $(\mathbf{P}_U, \Gamma_U)$ i.e. un objet pour $\mathcal{G}(U)$ et $\mathcal{G}(U)$ contient au moins l'isomorphisme identité de ce triple.

PROPOSITION 4. *Pour tout ouvert U de B, $\mathcal{G}(U)$ est transitif.*

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons le lemme de la proposition 4 du § 1 et le lemme suivant :

LEMME. *Soit U un ouvert de B tel que $\mathbf{P}_U$ soit trivial, et soit $(U \times C^n, s_k, \rho_k) \in \mathcal{G}(U)$ $(k = 1, 2)$.*

Il existe un isomorphisme - unique d'après la proposition 2 -

$$\Psi : (U \times C^n, s_1, \rho_1) \to (U \times C^n, s_2, \rho_2).$$

En effet, supposons établie l'existence d'un tel isomorphisme Ψ_i sur chaque ouvert U_i d'un recouvrement de U. D'après la proposition 2, on a, sur $U_i \cap U_j$:

$$(\Psi_i)_{U_i \cap U_j} = (\Psi_j)_{U_i \cap U_j}$$

Il est alors possible de "recoller" les Ψ_i en un isomorphisme au dessus de U tout entier.

Il suffit donc d'établir que tout $x_o \in U$ possède un voisinage V tel que l'iso-morphisme Ψ cherché existe entre les restrictions à V des triples $(U \times C^n, s_k, \rho_k)$.

Soit θ_k l'isomorphisme $U \times P(n-1, C) \to \mathbf{P}$ associé à ρ_k. Posons :

$$g = \theta_1 \circ \theta_2$$

g est un automorphisme de $U \times P(n-1, C)$ muni de sa structure fibrée analytique complexe, i.e. vérifiant l'hypothèse du lemme de la proposition 4 § *1*, démonstration. D'après le lemme, il existe, pour tout $x_o \in U$, un voisinage V dans U tel que la restriction de g à $V \times P(n-1, C)$ se relève suivant un automorphisme g' de $V \times C^n$:

$$g' : (x, z) \to (x, \gamma'(x) z)$$

$x \in U$, $z \in C^n - \{o\}$, $\gamma'(x) \in GL(n, C)$ et dépendant analytiquement de x (γ' est défini par g à la multiplication près par une fonction holomorphe inversible sur V) de telle sorte que soit commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
V \times C^n \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "\rho"] \arrow[dd, "\pi"'] & & V \times C^n \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[dd, "\pi"] \\
& \mathbf{P} & \\
V \times P(n-1, C) \arrow[rr, "g"'] \arrow[ur, "\theta_2"] & & V \times P(n-1, C) \arrow[ul, "\theta_1"']
\end{tikzcd}$$

$g'(s_2)$ est inclus dans Γ par ρ_1 et n'a pas d'autres zéros que ceux de s_2 ; $g'(s_2)$ est donc génératrice pour Γ par ρ_1. On a (cf. chap. II § 2) :

$$g'(s_2) = \lambda s_1$$

où λ est une fonction holomorphe inversible sur V.

$$\frac{1}{\lambda} g' : (x, z) \to (x, \frac{1}{\lambda(x)} \gamma'(x) z)$$

est l'isomorphisme cherché.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.

Soit $(E_k, s_k, \rho_k) \in \mathcal{G}(U) (k = 1, 2)$. Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme :

$$\Psi : (E_1, s_1, \rho_1) \to (E_2, s_2, \rho_2)$$

Pour celà, il suffit d'établir l'existence d'un isomorphisme :

$$\Psi_i \ (E_1, s_1, \rho_1)_{U_i} \to (E_2, s_2, \rho_2)_{U_i}$$

pour tout ouvert U_i d'un recouvrement de U; la proposition 2 permet de recoller les Ψ_i en un isomorphisme Ψ au dessus de U tout entier.

Or, tout $\bar{x} \in U$ admet un voisinage V tel que $(E_1)_V$ et $(E_2)_V$ soient triviaux Soit φ_k un isomorphisme :

$$(E_k)_V \to V \times C^n,$$

et posons :

$$\rho'_k = \rho_k \circ \varphi_k^{-1}.$$

ρ'_k est une projection admissible de $V \times C^n$ sur $\mathbf{P}$, et $(V \times C^n, \varphi_k \circ s_k, \rho'_k)$ est un triple associé à $(\mathbf{P}_V, \Gamma_V)$. P_V est donc trivial ; le lemme ci-dessus affirme l'existence d'un isomorphisme.:

$$(V \times C^n, \varphi_1 \circ s_1, \rho'_1) \to (V \times C^n, \varphi_2 \circ s_2, \rho'_2)$$

d'où l'on déduit qu'il existe un isomorphisme :

$$(E_1, s_1, \rho_1) \to (E_2, s_2, \rho_2). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous avons démontré une partie du théorème à savoir : pour tout ouvert U de B, $\mathcal{G}(U)$ est simple (prop. 2) et transitif (prop. 4). Nous montrerons au nº 5 que $\mathcal{G}(U)$ est non vide, ce qui achèvera d'établir le théorème.

4. ETUDE DU SOUS-FAISCEAU DE $\mathcal{G}$ DONT LES OBJETS AU DESSUS DE CHAQUE OUVERT U DE B SONT LES TRIPLES ASSOCIES A $(\mathbf{P}, \Gamma)$ DE LA FORME $(U \times C^n, s, \rho)$.

Pour chaque ouvert U de B, notons $\mathcal{T}(U)$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{G}(U)$ dont les objets sont les triples associés à $(\mathbf{P}, \Gamma)$ de la forme $(U \times C^n, s, \rho)$; (plein signifie que $\mathcal{T}(U)$ contient un isomorphisme de $\mathcal{G}(U)$ dès qu'il en contient l'unité à gauche et l'unité à droite). Notons $\mathcal{U}(U)$ l'ensemble des objets de $\mathcal{T}(U)$. On définit ainsi un sous-faisceau $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, l'application structurale :

$$\forall\, V \subset U,\ \mathfrak{T}(U) \to \mathfrak{T}(V)$$

étant induite par celle de $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{T}$ est un faisceau de groupoïdes. On définit aussi le faisceau d'ensembles $\mathfrak{U}$.

PROPOSITION 5. *$\mathfrak{T}$ (resp. $\mathfrak{U}$) est surjectif (i.e. tout $x \in B$ admet un voisinage $U(x)$ tel que $\mathfrak{T}(U(x))$ (resp. $\mathfrak{U}(U(x))$) soit non vide.*

(cf. prop. 3 démonstration).

PROPOSITION 6. *Pour tout ouvert U de B tel que $\mathfrak{T}(U)$ soit non vide, $[GL(n,C)]_{\omega}(U)$ opère sur $\mathfrak{U}(U)$ simplement et transitivement de la façon suivante :*

Soient $(U \times C^n, s, \rho) \in \mathfrak{U}(U)$; $g \in [GL(n, C)]_{\omega}(U)$.

Désignons par $\overline{g}$ l'automorphisme de $U \times C^n$ muni de sa structure fibrée analytique complexe :

$$\forall x \in U, \forall z \in C^n,\ \overline{g} : (x, z) \to (x, g(x)z)$$

On pose :

$$g(U \times C^n, s, \rho) = (U \times C^n, \overline{g} \circ s, \rho \circ \overline{g}^{-1})$$

1) On vérifie immédiatement que $g(U \times C^n, s, \rho)$ est bien un objet de $\mathfrak{T}(U)$.

2) Il y a une correspondance biunivoque canonique entre $[GL(n, C)]_{\omega}(U) \times \mathfrak{U}(U)$ et $\mathfrak{T}(U)$.

En effet, à $(g, (U \times C^n, s, \rho))$ correspond de façon canonique :

$$(g) : (U \times C^n, s, \rho) \to g(U \times C^n, s, \rho)$$

et (g) est un élément de $\mathfrak{T}(U)$ (cf. déf. 6).

Réciproquement, soit $\Psi \in \mathfrak{T}(U)$; Ψ a une unité à droite et une unité à gauche bien déterminées :

$$\Psi : (U \times C^n, s, \rho) \to (U \times C^n, \overline{\Psi} \circ s, \rho \circ \overline{\Psi}^{-1})$$

Ψ (déf. 6) est un automorphisme de la structure fibrée vectorielle analytique complexe de $U \times C^n$, i.e. une application de $U \times C^n$ dans lui-même :

$$(x, z) \to (x, \Psi_x(z))$$

où $\Psi_x \in GL(n, C)$ dépend analytiquement de x.

L'application :

$$\forall x \in U,\ x \to \Psi_x$$

est donc un élément de $[GL(n, C)[_{\omega}(U)]$.

3) $[GL(n, C)]_{\omega}(U)$ opère simplement et transitivement sur $\mathfrak{U}(U)$.

Ceci résulte des propositions 2 et 4 et du point 2) de cette démonstration.

Des propositions 5 et 6, il résulte que $\mathfrak{U}$ peut être muni canoniquement d'une structure de faisceau GL_ω-principal. On posera (cf. chap. I § 2 prop. 7)

$$T = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(B)} \mathfrak{U}(U)$$

Tout triple $t \in T$ pourra s'écrire :

$$t = (U(t) \times C^n, s(t), \rho(t))$$

Soit $t, t' \in T$; $U = U(t)$; $U' = U(t')$. On définit $g_t^{t'}$: $g_t^{t'} \in GL_\omega(U \cap U')$: $g_t^{t'}\, t_{U \cap U'} = t'_{U \cap U'}$.

5. *DEMONSTRATION DU THEOREME.*

Pour tout ouvert U de B, $\mathcal{G}(U)$ est simple (prop.2) et transitif (prop. 4). Il reste à montrer que $\mathcal{G}(U)$ est non vide. Pour celà, il suffit de montrer que $\mathcal{G}(B)$ est non vide.

D'après la proposition 8 (chap. I §2 n° 3), au faisceau GL_ω-principal, $\mathfrak{U}$, est associé un espace fibré vectoriel : nous allons montrer que ce fibré - noté $E(\Gamma)$ - est muni canoniquement d'une projection compatible $\rho(\Gamma)$ sur **P** et d'une section, $s(\Gamma)$, génératrice pour Γ. Ainsi, sera défini canoniquement un triple associé à $(\mathbf{P}, \Gamma) : (E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$.

1°) L'espace fibré $E(\Gamma)$: c'est $F(\mathfrak{U})$ (cf prop. 8 chap. I § 2) i.e. le quotient de l'ensemble :

$$\Theta \times C^n = \{ (t, x, y) \mid t \in T,\ x \in U(t),\ y \in C^n \}$$

par la relation $\mathfrak{R}$:

$$(t, x, y) \sim (t', x', y') \rightleftarrows x = x' ;\ g_t^{t'}(x) y = y'$$

Les cartes sont les :

$$(t) : U(t) \times C^n \to E(\Gamma)$$
$$(x, y) \to \mathfrak{R}(t, x, y)$$

et les changements de cartes sont les $g_t^{t'}$.

2°) La projection $\rho(\Gamma)$: c'est la projection telle que, pour tout $t \in T$: $t = (U \times C^n, s(t), \rho(t))$, soit commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} U(t) \times C^n \arrow[r] \arrow[dr, "\rho(t)"'] & E(\Gamma) \arrow[d, "\rho(\Gamma)"] \\ & \mathbf{P} \end{tikzcd}$$

3°) La section $s(\Gamma)$: c'est la section telle que, pour tout $t \in T$, soit commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} U(t) \times C^n \arrow[r, "(t)"] & E(\Gamma) \\ U(t) \arrow[u, "s(t)"] \arrow[ur, "s(\Gamma)"'] & \end{tikzcd}$$

On vérifie immédiatement que les conditions imposées en 2°) et 3°) peuvent être satisfaites et définissent $\rho(\Gamma)$ et $s(\Gamma)$ de façon unique.

REMARQUE. Il résulte du théorème 1 que tout triple (E, s, ρ) associé à $(\mathbf{P}, \Gamma)$ - i.e. tout objet de $\mathcal{G}(B)$ - se déduit de $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$ par l'isomorphisme unique de fibrés :

$$\overline{\Psi} : E(\Gamma) \to E$$

tel que :

$$\overline{\Psi} \circ \Delta(\Gamma) = s$$
$$\rho \circ \overline{\Psi} = \rho(\Gamma).$$

CHAPITRE QUATRE

CLASSIFICATION DES SECTIONS MEROMORPHES D'UN ESPACE FIBRE PROJECTIF

Dans ce chapitre, nous conservons les notations des chapitres précédents.

1. Espaces fibrés en droites associés à une section méromorphe d'un espace fibré projectif.

Soit Γ une section holomorphe de $P(E)$: Γ définit un sous-espace fibré en droites de E dont la fibre en $x \in B$ est la droite du champ Γ : $\pi^{-1}(\Gamma(x)) \cup \{o\}$.

Si Γ est une section méromorphe de $P(E)$, on peut définir un espace fibré en droites réciproque de Γ : cet espace fibré est muni d'une application holomorphe, β, dans E; β est linéaire sur chaque fibre; elle est nulle au dessus d'un point singulier; au dessus d'un point régulier, elle est injective et envoie la fibre sur la droite du champ Γ.

1. CONSTRUCTION DE L'ESPACE FIBRE EN DROITES RECIPROQUE D'UNE SECTION MEROMORPHE DE $\mathbf{P}$ *PAR UNE PROJECTION ADMISSIBLE.*

Soient :

Γ une section méromorphe de $\mathbf{P}$;

(E, ρ) un couple associé à $\mathbf{P}$ (cf. chap. III § 2 déf. 4).

θ l'isomorphisme $P(E) \to \mathbf{P}$ associé à ρ.

Pour chaque ouvert U de B, considérons l'ensemble $\mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho}(U)$ des sections holomorphes de E génératrices pour Γ par ρ(cf. chap. III § 1 déf. 5) - i.e. génératrices pour $\theta^{-1} \circ \Gamma$ - au dessus de U.

Si V est un ouvert de B inclus dans U, on a :

$$\mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho}(U) \to \mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho}(V)$$

par l'opération de restriction des sections de E. On définit ainsi un faisceau : $\mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho}$. Nous noterons $\widetilde{\mathcal{G}}^*_{\Gamma,\rho}$ l'espace étalé de germes correspondant.

PROPOSITION 1. $\mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho}$ *est un faisceau* C^*_ω*-principal (cf. chap. I § 2).*

En effet,

1) $\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}$ est surjectif :

$\forall x \in B$, $\exists U(x)$ - voisinage ouvert de x dans B - où soit définie une section holomorphe de E génératrice pour Γ par ρ (cf chap. II § 2 prop. 1).

2) $\forall U$ - ouvert de B - avec $\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}(U) \neq \phi$, $\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}(U)$ est espace homogène de $C^*_\omega(U)$:

C'est une conséquence immédiate de l'étude faite au chapitre II § 2 n° 2.

Au faisceau $\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}$, on peut associer, de façon canonique, un espace fibré analytique complexe C^*- principal (cf chap. I § 2 n° 3).

DEFINITION 1. *L'espace fibré en* C^*: $F(\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho})$ *(cf chap. I § 2 prop. 8) sera noté* $F^*(\Gamma,\rho)$ *et appelé* espace fibré en C^* réciproque de Γ par ρ. *L'espace fibré en droites complété de* $F^*(\Gamma,\rho)$ *(cf chap. I) sera noté* $F(\Gamma,\rho)$ *et appelé* espace fibré en droites réciproque de Γ par ρ.

Rappelons, dans ce cas particulier, les définitions et propriétés générales données au chapitre I :

$F^*(\Gamma;\rho)$ est l'ensemble quotient de $\widetilde{\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}}$ par la relation d'équivalence suivante :
Soient $\tilde{s} \in (\widetilde{\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}})_x$; $\tilde{s}' \in (\widetilde{\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}})_{x'}$, $x \in B$; $x' \in B$.

$$s \sim s' \rightleftarrows x = x' ; \exists \tilde{h} \in (C^*_\omega)_x \text{ avec : } \tilde{h}(x) = 1 ; \tilde{s}' = \tilde{h}\,\tilde{s}$$

Il existe un unique isomorphisme Ψ de faisceaux principaux sur C^*_ω tel que soit commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}} \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \mathcal{S}_\omega(F^*(\Gamma,\rho)) \arrow[dl, "\nu"] \\ & F^*(\Gamma,\rho) & \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{S}_\omega(F^*(\Gamma,\rho))$ désigne le faisceau des sections holomorphes de $F^*(\Gamma,\rho)$.

DEFINITION 2. *Soit* β *l'application but des germes de* $\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}$ *dans* E. *Nous noterons* $\beta(\Gamma,\rho)$ *- ou* β *en abrégé quand aucune confusion ne sera à craindre - l'unique application de* $F^*(\Gamma,\rho)$ *dans* E *telle que soit commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathfrak{J}^*_{\Gamma,\rho}} \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ E & & F^*(\Gamma,\rho) \arrow[ll, "\beta(\Gamma,\rho)"] \end{tikzcd}$$

L'application $\beta(\Gamma,\rho)$, prolongée à $F(\Gamma,\rho)$, qui envoie la section nulle de

$F(\Gamma,\rho)$ sur la section nulle de E sera encore notée $\beta(\Gamma,\rho)$ - ou β -.

PROPOSITION 2. *L'application β de $F(\Gamma,\rho)$ dans E est une application analytique, linéaire sur chaque fibre. En un point x de B régulier pour Γ, β est injective et envoie la fibre de $F(\Gamma,\rho)$ sur la droite $\Gamma(x)$. En un point x de B singulier pour Γ, la restriction de β à la fibre $(F(\Gamma,\rho))_x$ est nulle. β met en correspondance biunivoque les sections analytiques sans zéro de $F(\Gamma,\rho)$ (i.e. les sections analytiques de $F^*(\Gamma,\rho)$) (resp. les sections analytiques quelconques de $F(\Gamma,\rho)$) et les sections de E génératrices pour (resp. incluses dans) Γ par ρ).*

L'analycité et la linéarité de β résultent de ce que Ψ est un isomorphisme de faisceaux C^*_ω- principaux.

Le comportement aux points réguliers et singuliers résultent de la proposition 4 chapitre II §2.

REMARQUE. Le diviseur d'une section incluse (cf chap. II §2 déf. 2.) n'est autre que le diviseur de la section correspondante de l'espace fibré en droites réciproque.

PROPOSITION 3. *Soit Γ une section méromorphe de* $\mathbf{P}$.
$F(\Gamma,\rho(\Gamma))$ est un espace fibré en droites trivial.

En effet, Γ admet une section $s(\Gamma)$ génératrice par $\rho(\Gamma)$ (cf chap. III § 2 théo--rème 1) : à $s(\Gamma)$ correspond une section sans zéros de $F(\Gamma,\rho(\Gamma))$ définie sur tout B.

2. DEUX FORMULES.

PROPOSITION 4 : *la première formule.*

Soient (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) deux couples associés à $\mathbf{P}$; *Γ une section méromor--phe de* $\mathbf{P}$; *$F(\Gamma,\rho_1)$ (resp. $F(\Gamma,\rho_2)$) l'espace fibré en droites réciproque de Γ par ρ_1 (resp. ρ_2) (cf def. 1).*

On a :

$$H((E_1,\rho_1);(E_2,\rho_2)) \approx L(F(\Gamma,\rho_1);F(\Gamma,\rho_2)).$$

où $L(F(\Gamma,\rho_1);F(\Gamma,\rho_2))$ désigne l'espace fibré en droites analytique complexe des homomorphismes de fibre dans fibre de $F(\Gamma,\rho_1)$ dans $F(\Gamma,\rho_2)$ se projetant sur B suivant l'identité et où H est l'espace fibré en droites correspondant à $H^*((E_1,\rho_1);(E_2,\rho_2))$ défini au chap. III, §1, définition 4.

DEMONSTRATION.

Notons $L^*(F(\Gamma,\rho_1);F(\Gamma,\rho_2))$ l'espace fibré C^*-principal dont $L(F(\Gamma,\rho_1);$

$F(\Gamma, \rho_2))$ est le complété; $\mathfrak{L}^*(F(\Gamma, \rho_1); F(\Gamma, \rho_2))$- faisceau des sections analytiques complexes de L^*(i.e. des sections analytiques complexes sans zéros de L)- est un faisceau C^*_ω- principal.

$\mathfrak{H}^*((E_1, \rho_1);(E_2, \rho_2))$- faisceau des sections analytiques complexes de $H^*((E_1, \rho_1);(E_2, \rho_2))$- est un faisceau C^*_ω- principal.

Pour démontrer l'isomorphisme de ces deux faisceaux-$\mathfrak{L}^*$ et H^*- nous allons uti--liser la proposition 1 chap. I §2, i. e. définir une application de faisceaux d'ensembles :

$$\mathfrak{H}^* \xrightarrow{\mu} \mathfrak{L}^*$$

dont nous démontrerons qu'elle est compatible avec l'opération de C^*_ω. C'est l'objet du

LEMME. *Soit* $\Psi_U \in \mathfrak{H}^*(U)$.

a) Il existe un unique élément $l_U = \mu_U(\Psi_U) \in \mathfrak{L}^*(U)$ *tel que soit commutatif le diagram--me :*

$$\begin{tikzcd}
F(\Gamma, \rho_1)_U \arrow[rr, "l_U"] \arrow[d, "\beta"'] & & F(\Gamma, \rho_2)_U \arrow[d, "\beta"] \\
E_{1U} \arrow[rr, "\Psi_U"] \arrow[dr, "\rho_1"'] & & E_{2U} \arrow[dl, "\rho_2"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

b) Soit $g_U \in C^*_\omega(U)$*; l'on a :*

$$\mu_U(g_U \cdot \Psi_U) = g_U \cdot \mu_U(\Psi_U)$$

DEMONSTRATION DU LEMME.

Les faisceaux et espaces fibrés considérés ici sont restreints à U. Pour abréger, nous omettrons d'écrire U en indice.

a) L'image par Ψ_U d'une section génératrice est génératrice. Donc, Ψ_U se relè--ve en un isomorphisme de faisceaux :

$$\mathfrak{F}^*_{\Gamma, \rho_1} \longrightarrow \mathfrak{F}^*_{\Gamma, \rho_2}$$

compatible avec l'opération de C^*_ω. A cet isomorphisme correspond un unique isomorphis--me, λ, d'espaces étalés :

$$\lambda : \widetilde{\mathfrak{F}^*_{\Gamma, \rho_1}} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{F}^*_{\Gamma, \rho_2}}$$

L'isomorphisme λ passe au quotient par la relation ($\sim$) d'équivalence définissant $F(\Gamma, \rho_1)$ (*resp.* $F(\Gamma, \rho_2)$) sur $\widetilde{\mathfrak{F}^*_{\Gamma, \rho_1}}$ (*resp.* $\widetilde{\mathfrak{F}^*_{\Gamma, \rho_2}}$) et fournit l'isomorphisme cherché, l, de $F(\Gamma, \rho_1)$ sur $F(\Gamma, \rho_2)$.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho_1}} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "(\sim)"'] & \widetilde{\mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho_2}} \arrow[d, "(\sim)"] \\
F(\Gamma,\rho_1) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\beta"'] & F(\Gamma,\rho_2) \arrow[d, "\beta"] \\
E_1 \arrow[r, "\Psi"] & E_2
\end{tikzcd}$$

b) Soit $g \in C^*_\omega(U)$. $g\,\Psi$ se relève suivant λ' :

$$\mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho_1} \longrightarrow \mathcal{G}^*_{\Gamma,\rho_2}$$

Au dessus de chaque $x \in U$, on a :

$$\lambda'_x = \tilde{g}_x . \lambda_x$$

où $\tilde{g}_x$ est le germe en x de l'application g :

$$U \longrightarrow C^*$$

Par passage au quotient, on a b).

PROPOSITION 5 : *La deuxième formule .*

Soient Γ_1 *(resp.* Γ_2*) une section méromorphe de* $\mathbf{P}$; $(E(\Gamma_1), s(\Gamma_1), \rho(\Gamma_1))$ *(resp.* $(E(\Gamma_2), s(\Gamma_2), \rho(\Gamma_2))$*) le triple associé canoniquement à* Γ_1 *(resp.* Γ_2*) (cf chap. III § 2 théorème1);* (E, ρ) *un couple associé à* $\mathbf{P}$.

on a :

$$H((E(\Gamma_1), \rho(\Gamma_1)) ; (E(\Gamma_2), \rho(\Gamma_2))) \approx L(F(\Gamma_2, \rho), F(\Gamma_1, \rho)).$$

Pour chaque couple $(E,\rho), (E(\Gamma_1), \rho(\Gamma_1)), (E(\Gamma_2), \rho(\Gamma_2))$, on a deux espaces fibrés réciproques, l'un réciproque de Γ_1, l'autre réciproque de Γ_2 :

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
F(\Gamma_1,\rho) \arrow[dr] & & F(\Gamma_2,\rho) \arrow[dl] & F(\Gamma_1,\rho(\Gamma_1)) \arrow[dr] & & F(\Gamma_2,\rho(\Gamma_1)) \arrow[dl] & F(\Gamma_1,\rho(\Gamma_2)) \arrow[dr] & & F(\Gamma_2,\rho(\Gamma_2)) \arrow[dl] \\
& (E,\rho) & & & (E(\Gamma_1),\rho(\Gamma_1)) & & & (E(\Gamma_2),\rho(\Gamma_2)) &
\end{tikzcd}$$

Nous allons utiliser la formule générale suivante :

$$L(A,B) \approx L(A,C) \otimes L(C,B)$$

où C sera le fibré en droite trivial qui apparait en deux endroits sur notre graphique: $F(\Gamma_1, \rho(\Gamma_1))$ et $F(\Gamma_2, \rho(\Gamma_2))$. On a :

$$L(F(\Gamma_2,\rho); F(\Gamma_1,\rho)) \approx L(F(\Gamma_2,\rho); F(\Gamma_2,\rho(\Gamma_2))) \otimes L(F(\Gamma_1,\rho(\Gamma_1)); F(\Gamma_1,\rho))$$

Appliquons la première formule (prop. 4) :

$$L(F(\Gamma_2,\rho); F(\Gamma_2,\rho(\Gamma_2))) \approx H(E,\rho); E(\Gamma_2), \rho(\Gamma_2))$$

$$L(F(\Gamma_1,\rho(\Gamma_1); F(\Gamma_1,\rho)) \approx H((E(\Gamma_1), \rho(\Gamma_1)); (E,\rho))$$

Or, (cf. chap. III § 1 prop. 8) on a :

$H((E,\rho),(E(\Gamma_2),\rho(\Gamma_2)))\otimes H((E(\Gamma_1),\rho(\Gamma_1));(E,\rho))\approx H((E(\Gamma_1)\rho(\Gamma_1));$
$(E(\Gamma_2),\rho(\Gamma_2)))$.

D'où la formule annoncée.

2. Classification des sections méromorphes d'un espace fibré projectif P.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons de façon essentielle un théorème de Cartan-Serre et un théorème de Remmert; pour satisfaire aux hypothèses de ces deux théorèmes, nous devons supposer la base B de **P** compacte.

1. REPARTITION EN CLASSES.

Soit Γ une section méromorphe de **P**; $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$ le triple canoniquement associé à $(\mathbf{P},\Gamma)$ (cf chap. III § 2 n- 5).

DEFINITION 1. *Nous appellerons* classe *de* Γ *la classe, dans* $\mathcal{C}(\mathbf{P})$, *du couple* $(E(\Gamma), \rho(\Gamma))$ *(cf chap. III §1 déf. 2).*

Nous noterons $i: M(\mathbf{P}) \to \mathcal{C}(\mathbf{P})$ l'application de l'ensemble $M(\mathbf{P})$ de toutes les sections méromorphes de **P** dans l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ de toutes les classes de couples associés à **P** qui, à la section $\Gamma \in M(\mathbf{P})$, associe la classe du couple $(E(\Gamma), \rho(\Gamma))$.

L'image réciproque par i d'un élément de $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ est un ensemble de sections méromorphes de **P**- ensemble qui peut être vide. Soit $\Gamma \in M(\mathbf{P})$; par abus ce langage, $i^{-1}(\{i(\Gamma)\})$ sera aussi appelé classe de Γ.

PROPOSITION 1. *Soient* Γ *une section méromorphe de* **P** ; (E,ρ) *un couple associé à* **P**.

E possède une section globale, s, génératrice pour Γ *par* ρ *(cf. chap. II§2 n°2) si et seulement si* (E,ρ) *est de classe* $i(\Gamma)$.

En effet, E possède une section s génératrice pour Γ par ρ si et seulement si (E,s,ρ) est un triple associé à $(\mathbf{P},\Gamma)$. Or, tout triple associé à $(\mathbf{P},\Gamma)$ est isomorphe à $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$ (cf chap. III § 2 théorème 1). D'où la proposition :

PROPOSITION 2. *Soient* Γ *une section méromorphe de* **P** *dont la base* B *est supposée compacte ;* (E,ρ) *un couple associé à* **P**.

Si E *possède une section globale,* s, *génératrice pour* Γ *par* ρ, *toute section* σ *de* E, *non identiquement nulle, incluse dans* Γ *par* ρ, *est génératrice pour* Γ *par* ρ *et s'écrit* λs *où* $\lambda \in C^*$.

En effet, on a, sur tout B :

$$\sigma = h s$$

où h est une fonction holomorphe sur B. B étant compact, h est une constante $\lambda \in C^*$ et σ est génératrice.

PROPOSITION 3. *Soit (E, ρ) un couple associé à* $\mathbf{P}$.

Deux sections méromorphes, Γ_1 et Γ_2, de $\mathbf{P}$ *sont de même classe si et seulement si les espaces fibrés en droites réciproques par ρ de Γ_1 et Γ_2 (cf. § 1) sont isomorphes.*

En effet, Γ_1 et Γ_2 sont de même classe si et seulement si $(E(\Gamma_1), \rho(\Gamma_1))$ et $(E(\Gamma_2), \rho(\Gamma_2))$ sont isomorphes i.e. si $H((E(\Gamma_1), \rho(\Gamma_1)); (E(\Gamma_2), \rho(\Gamma_2)))$ est trivial. La proposition résulte alors immédiatemment de la deuxième formule (cf. § 1 prop. 5).

2. L'ESPACE PROJECTIF AMBIANT D'UNE CLASSE DE SECTIONS MEROMORPHES DE $\mathbf{P}$.

Nous supposons la base B de $\mathbf{P}$ compacte.

Considérons l'ensemble $i^{-1}(k)$ des sections méromorphes de $\mathbf{P}$ de même classe $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$. A k nous allons associer canoniquement un espace projectif complexe $P(k)$: au nº 3 (cf. déf. 1) nous construirons une application :

$$\gamma : P(k) \to M(\mathbf{P});$$

γ met en correspondance biunivoque canonique un ouvert de Zariski (cf. théorème 1 ci-dessous) de $P(k)$ et $i^{-1}(k)$. $P(k)$ sera appelé *l'espace projectif ambiant de $i^{-1}(k)$.*

La définition de l'espace projectif complexe $P(k)$ utilise les propositions 4 et 5 suivantes :

PROPOSITION 4. *Soit G un groupoïde simple et transitif d'isomorphismes entre espaces projectifs complexes.*

A G est associé canoniquement un espace projectif complexe $P(G)$. L'ensemble $P(G)$ est le quotient de la classe réunion des objets de G par la relation d'équivalence suivante : deux éléments appartenant chacun à un objet sont équivalents s'ils se correspondent par un morphisme de G; la structure d'espace projectif complexe de $P(G)$ est définie par ca condition suivante : l'application d'un objet quelconque de G sur $P(G)$ qui à un élément de cet objet associe sa classe dans $P(G)$ est un isomorphisme d'espaces projectifs complexes.

PROPOSITION 5. *Soient $(E, \rho)(E', \rho')$ deux couples isomorphes associés à* $\mathbf{P}$.

$\mathcal{H}(B)$ - ensemble de tous les isomorphismes de couples $(E, \rho) \to (E', \rho')$ (cf. *chap. III § 1 déf. 2) - est un espace homogène de C^*.*

En effet, d'après la proposition 4 (chap. III § 1), $\mathcal{H}(B)$ est un espace homogène de $C^*_\omega(B)$. B étant compact, les fonctions analytiques sur B sont constantes et $C^*_\omega(B)$ s'identifie à C^*.

DEFINITION 2. *Le groupoïde* $G(k)$.

Soit (E,ρ) *un couple associé à* $\mathbf{P}$; *nous noterons* $S(E)$ *l'espace vectoriel des sections holomorphes de* E. *La base* B *de* $\mathbf{P}$ *étant compacte,* $S(E)$ *est de dimension finie (cf.* [6]). *Nous noterons* $P(S(E))$ *l'espace projectif associé à* $S(E)$ *et* π *la projection de* $S(E)$ *sur* $P(S(E))$.

Soient $(E,\rho),(E',\rho')$ deux couples isomorphes associés à $\mathbf{P}$. Tout isomorphisme de couples :

$$\Psi : (E,\rho) \to (E',\rho')$$

définit un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$S(\Psi): S(E) \to S(E')$$

L'ensemble $\mathcal{H}(B)$ de tous les isomorphismes de couples de (E,ρ) sur (E',ρ') étant un espace homogène de C^* (cf. prop. 5), l'ensemble :

$$\{S(\Psi) \mid \Psi \in \mathcal{H}(B)\}$$

est un espace homogène de C^*. Par passage au quotient, $\{S(\Psi) \mid \Psi \in \mathcal{H}(B)\}$ définit un isomorphisme unique :

$$P((E,\rho);(E',\rho')) : P(S(E)) \to P(S(E'))$$

Soit $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ une classe de couples associées à $\mathbf{P}$. $G(k)$ *est le groupoïde simple et transitif dont la classe des objets est :*

$$\{\ P(S(E)) \mid (E,\rho) \in k\ \}$$

et dont les morphismes sont les isomorphismes :

$$\{\ P((E,\rho);(E',\rho')) \mid (E,\rho) \in k\,;\,(E',\rho') \in k\ \}$$

On vérifie immédiatement que l'on définit bien ainsi un groupoïde simple et transitif.

DEFINITION 3. *L'espace projectif complexe* $P(k)$.

C'est l'espace projectif complexe canoniquement associé à $G(k)$ *selon la proposition 4 ; l'ensemble* $P(k)$ *est le quotient de la classe* $\{\ P(S(E)) \mid (E,\rho) \in k\ \}$ *par la relation d'équivalence :*

Soient $u \in P(S(E))\,;\, u' \in P(S(E'))\,;\,(E,\rho) \in k\,;\,(E',\rho') \in k$.

$$u \sim u' \rightleftarrows u' = P((E,\rho);(E',\rho'))u.$$

Nous noterons :

$$q : \cup P(S(E)) \to P(k)$$

l'application qui à $v \in P(S(E))$ associe sa classe d'équivalence dans $P(k)$.

REMARQUE. Si pour $(E,\rho) \in k$, $S(E)$ est de dimension zéro, l'unique objet du groupoïde $G(k)$ est l'ensemble vide considéré comme espace projectif de dimension (-1) et on a :

$$P(k) = \phi$$

Dans ce cas, tous les problèmes étudiés sur $P(k)$ dans la suite sont triviaux.

DEFINITION 4. *Le cycle des zéros.*

Soient $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$; (E,ρ) un couple de classe k. Posons :

$$Z(S(E)) = \{(b,s) \mid b \in B; s \in S(E); s \neq 0; s(b) = 0\} \subset B \times S(E);$$
$$Z(P(S(E))) = (I \times \pi)(Z(S(E))) \subset B \times P(S(E));$$
$$Z(k) = (I \times q)(Z(P(S(E)))) \subset B \times P(k);$$

où I désigne l'application identique de B dans B et où π (resp. q) a la signification donnée à la définition 2 (resp. définition 3).

On vérifie immédiatement que $Z(k)$ ne dépend pas du choix du couple (E,ρ) dans la classe k.

Un point $w \in P(k)$ est une classe d'équivalence de sections holomorphes, non identiquement nulles, d'espaces fibrés vectoriels de base B. Toutes ces sections ont pour ensemble des zéros la projection sur B de l'intersection :

$$Z(k) \cap (B \times \{w\})$$

Cette projection (qui est un sous-ensemble analytique fermé de B) est appelée *le cycle des zéros de* w et $Z(k)$ est appelé *le cycle des zéros de la classe* k.

PROPOSITION 6. *$Z(k)$ est un sous-ensemble analytique fermé du produit $B \times P(k)$.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de démontrer que $Z(P(S(E)))$ est un sous-ensemble analytique fermé du produit $B \times P(S(E))$ i.e. est défini, au voisinage de chaque point $\bar{z} \in B \times P(S(E))$ par un nombre fini d'équations :

$$h_i(z) = 0$$

où les h_i sont des fonctions à valeurs dans C, holomorphes sur un voisinage W de $\bar{z}$ dans $B \times P(S(E))$.

Soit $\bar{z} \in B \times P(S(E))$: $\bar{z} = (\bar{b}, \bar{d})$ avec :

$$\bar{b} \in B;\ \bar{d} \in P(S(E));$$

soit $\bar{s} \in S(E)$ avec $\pi \bar{s} = \bar{d}$; on a :

$$\bar{s} \neq o.$$

Prenons pour voisinage W de $\bar{z}$ le produit $U \times V$ où U est un voisinage de $\bar{b}$, dans B, tel que E_U soit trivial ,et où V est le voisinage de $\bar{d}$ dans $P(S(E))$ ainsi défini : soit $s_o, s_1, \ldots, s_m$ une base de $S(E)$ - espace vectoriel de dimension finie-;

$$\bar{s} = \bar{x}^o\ s_o + \ldots + \bar{x}^i\ s_i + \ldots + \bar{x}^m\ s_m.$$

$\bar{s}$ étant différent de zéro, l'une de ses coordonnées, $\bar{x}^o$ par exemple, est non nulle ; on pose :

$$H_o = \{(x^o, x^1, \ldots x^m) \in S(E) \mid x^o = 0\};\ V = \pi \complement H_o.$$

$V \subset P(S(E))$ peut être rapporté au système de coordonnées homogènes :

$$y^1 = \frac{x^1}{x^o}; \ldots; y^m = \frac{x^m}{x^o};$$

E_U étant trivial ,on peut faire choix d'une carte :

$$\varphi : E_U \to U \times C^n$$

et tout élément u de $(E_U)_b$ $(b \in B)$ admet, par φ, n coordonnées dans $b \times C^n$ que nous noterons :

$$\varphi^1(u), \ldots, \varphi^n(u).$$

A l'aide des coordonnées que nous venons de définir, nous allons exprimer que $z \in U \times V$ appartient à $Z(P(S(E)))$.

$$z = (b, d);\ b \in U;\ d \in V;$$
$$d = (y^1, \ldots, y^m);$$

soit $s \in \pi^{-1}(d)$:

$$s = s_o + \sum_{i=1}^{m} y^i s_i.$$

La condition cherchée s'écrit :

$$s(b) = 0, \qquad \text{i.e. :}$$
$$s_o(b) + y^1 s_1(b) + \ldots + y^m s_m(b) = 0$$

Cette relation équivaut au système de n équations :

$$\varphi^i(s_o(b)) + y^1 \varphi^i(s_1(b)) + \ldots + y^m \varphi^i(s_m(b)) = 0$$

$(i = 1, \ldots, n)$.

D'où la proposition .

3. *STRUCTURE D'UNE CLASSE.*

DEFINITION 5. *Soient (E, ρ) un couple associé à* **P***; k sa classe : $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$. On définit comme suit les applications γ_ρ et γ :*

γ_ρ *est l'application :*

$$P(S(E)) \to M(\mathbf{P})$$

qui à $d \in P(S(E))$ *associe l'unique section méromorphe de* $\mathbf{P}$ *définie par une section* $s \in \pi^{-1}(d)$.

γ *est l'unique application :*

$$P(k) \to M(\mathbf{P})$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} P(S(E)) \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma_\rho"'] & P(k) \arrow[d, "\gamma"] \\ & M(\mathbf{P}) \end{tikzcd}$$

JUSTIFICATION.

a) γ_ρ est bien définie : soit $s \in S(E)$; s définit une section $\Gamma \in M(\mathbf{P})$ unique où elle est incluse par ρ (cf. chap. II § 1 prop. 2). De plus, si l'on a :

$$s_1 \in S(E); \, s_2 \in S(E) \text{ avec } \pi(s_1) = \pi(s_2),$$

il existe $\lambda \in C^*$ unique tel que :

$$s_1 = \lambda s_2 \quad \text{(cf. prop. 2)}$$

par suite, s_1 et s_2 définissent la même section méromorphe de $\mathbf{P}$.

b) γ ne dépend pas du choix du couple (E, ρ) dans la classe k. En effet, soit (E_1, ρ_1) un couple de classe k : la restriction de q à $P(S(E))$ (resp. $P(S(E_1))$) est un isomorphisme sur $P(k)$ (cf. prop. 4 et déf. 3) et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & P(k) \arrow[d, dash] & \\ P(S(E)) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "\gamma_\rho"'] & P((E,\rho);(E_1,\rho_1)) \arrow[d, "\gamma"] & P(S(E_1)) \arrow[ul, "q"'] \arrow[dl, "\gamma_{\rho_1}"] \\ & M(\mathbf{P}) & \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 7. *Soient* (E, ρ) *un couple associé à* $\mathbf{P}$; k *sa classe* ; $\Gamma \in i^{-1}(k)$.

Il existe d *(resp.* d_ρ *) unique tel que :*

$$d \in P(k) \quad ; \quad \gamma(d) = \Gamma$$

$$(\textit{resp.} \quad d_\rho \in P(S(E)) \; ; \; \gamma_\rho(d_\rho) = \Gamma \;)$$

On notera :

$$d = \eta(\Gamma) \quad ; \quad d_\rho = \eta_\rho(\Gamma)$$

DEMONSTRATION .

a) Existence . D'après la proposition 1, il existe $s \in S(E)$ avec :

$$\gamma_\rho(\pi(s)) = \Gamma$$

et on a (cf déf. 4) :

$$\gamma(q(\pi(s))) = \Gamma$$

b) Unicité. Soient $d_1 \in \gamma_\rho^{-1}(\Gamma)$; $d_2 \in \gamma_\rho^{-1}(\Gamma)$; $s_1 \in \pi^{-1}(d_1)$; $s_2 \in \pi^{-1}(d_2)$. Les sections s_1 et s_2 de E sont génératrices pour Γ par ρ et sont proportionnelles (cf prop. 2) . D'où :

$$d_1 = d_2 .$$

PROPOSITION 8 . *Soit (E, ρ) un couple associé à $\mathbf{P}$; k sa classe .*

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
i^{-1}(k) \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[ddr, "\eta_\rho"'] & & M(\mathbf{P}) \\
& P(k) \arrow[ur, "\gamma"] & \\
& P(S(E)) \arrow[u, "q"] \arrow[uur, "\gamma_\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

où j désigne l'application inclusion de $i^{-1}(k)$ dans $M(\mathbf{P})$.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la définition 4 et de la proposition 7.

PROPOSITION 9 . *Soient $(E ; \rho)$ un couple associé à $\mathbf{P}$; k sa classe ; $d \in P(k)$ (resp. $d_\rho \in P(S(E))$; $q(d_\rho) = d$); on a :*

$$\gamma(d) \in i^{-1}(k)$$

si et seulement si le cycle des zéros de d (cf def. 4) est de codimension analytique supé-rieure ou égale à 2.

En effet, soit $s \in S(E)$. $\gamma_\rho(\pi(s))$ est de classe k si et seulement si (cf prop. 1) s est génératrice pour $\gamma_\rho(\pi(s))$ par ρ, i.e. (cf chap. II §2 prop. 5 corollaire) si le cycle des zéros de d est de codimension analytique supérieure ou égale à 2.

THEOREME 1 . *Soit $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$. Notons m la dimension de B. L'on a (cf chap. I §1 prop. 6)*

$$p_{m-1}^{P(k)}(Z(k)) = \complement\, \eta(i^{-1}(k))$$

et $\eta(i^{-1}(k))$ qui correspond biunivoquement par η à l'ensemble des sections méromorphes de $\mathbf{P}$ de classe k - est un ouvert de Zariski de $P(k)$ i.e. le complémentaire d'une sous - variété algébrique compacte de $P(k)$.

En effet, soit $d \in P(k)$. D'après la proposition 7, les conditions (1) et (2) suivantes sont équivalentes :

(1) $$d \notin \eta(i^{-1}(k))$$

(2) $$\gamma(d) \notin i^{-1}(k)$$

D'après la proposition 9 la condition (2) est équivalente à la condition (3) ci-dessous :

$$dim\ p^B(B \times d \cap Z(k)) \geq m-1$$

(où p^B désigne la projection sur B), condition qui, d'après la définition de $p_{m-1}^{P(k)}(Z(k))$, équivaut à

$$d \in p_{m-1}^{P(k)}(Z(k))$$

Nous avons ainsi démontré :

$$p_{m-1}^{P(k)}(Z(k)) = \complement \eta(i^{-1}(k))$$

D'après la proposition 6 du chapitre I §1, $p_{m-1}^{P(k)}(Z(k))$ est un sous-ensemble algébrique de $P(k)$. Son complémentaire dans $P(k)$, $\eta(i^{-1}(k))$, est donc un ouvert de Zariski de $P(k)$.

4. *STRUCTURE ORDONNEE DE L'ENSEMBLE DES CLASSES.*

Pour caractériser les éléments de $\gamma(P(k))$, on utilise la structure ordonnée de $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ qui dérive de celle du groupe $H^1(B.C_\omega^*)$: en effet, $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ s'il est non vide, est un espace homogène de $H^1(B, C_\omega^*)$ (cf chap. III §1 théorème 1).

Rappelons (cf chap. I §1n° 2) qu'est positive (resp. nulle) la classe des espaces fibrés en droite qui admettent des sections holomorphes globales (resp. des espaces fibrés en droite triviaux).

DEFINITION 6. *Soient k, k' deux éléments de $\mathcal{C}(\mathbf{P})$. Nous noterons :*

$k - k'$ l'unique élément de $H^1(B, C_\omega^*)$ dont le produit par k' soit égal à k (cf chap III §1 théorème 1);

$k \succ k'$ (resp. $k \succeq k'$)

ou encore

$k - k' \succ 0$ (resp. $k - k' \succeq 0$)

si la classe $(k - k')$ d'espaces fibrés en droite est positive (resp. positive ou nulle).

Un espace fibré en droite de base B, muni de sa projection sur B, est un couple associé à B- espace projectif de dimension zéro, de base B. Ainsi, $(k - k')$ peut être considérée comme une classe de couples associés à B; à cette classe $(k - k')$ correspond canoniquement, selon le numéro 2 de ce paragraphe, l'espace projectif complexe $P(k - k')$.

DEFINITION 7. *L'application produit :* $P(k') \times P(k-k') \to P(k)$.

Soit (E, ρ) *(resp.* (E', ρ')*) un couple de classe* k *(resp.* k'*) ; nous noterons* H *l'espace fibré en droite :*

$$H = H((E', \rho') ; (E, \rho)).$$

D'après la proposition 6 du §1 chap. III, E est canoniquement isomorphe à $E' \otimes H$ et H est de classe $k-k'$.

Soient : $\sigma' \in S(E')$; $\chi \in S(H)$

Nous noterons :

$$\chi \times \sigma' \in S(E)$$

l'image canonique dans $S(E)$ de la section holomorphe $\chi \otimes \sigma'$ de $E' \otimes H$.

Le produit $\times$ est une application bilinéaire de $S(H) \times S(E')$ dans $S(E)$; de plus, on a :

$$\chi \times \sigma' = 0$$

si et seulement si l'un au moins des facteurs (χ, σ') est la section nulle .

Par passage au quotient, est donc définie une application algébrique régulière :

$$P(S(H)) \times P(S(E')) \to P(S(E)).$$

Ces trois espaces projectifs sont canoniquement isomorphes par q (cf déf 3) respectivement à $P(k-k')$, $P(k')$, $P(k)$. *Nous avons donc défini une application algébrique régulière - le produit - notée* Ψ *:*

$$P(k-k') \times P(k') \to P(k).$$

On peut montrer, en procédant comme au numéro 2, que cette définition est indépendante du choix particulier de (E, ρ), $(E' \rho')$.

PROPOSITION 10. *Soit* (E, ρ) *un couple de classe* k ; Γ' *une section méromorphe de* $\mathbf{P}$ *de classe* k'.

L'espace fibré en droite $F(\Gamma', \rho)$ *est de classe* $k-k'$.

En effet, d'après la proposition 4 du § 1, on a l'isomorphisme :

$$L(F(\Gamma', \rho(\Gamma')) ; F(\Gamma', \rho)) \approx H((E(\Gamma'), \rho(\Gamma')) ; (E, \rho))$$

Or, $F(\Gamma', \rho(\Gamma'))$ est trivial (cf. §1 prop. 3); donc :

$$F(\Gamma', \rho) \approx H((E(\Gamma'), \rho(\Gamma')) ; (E, \rho))$$

et $F(\Gamma', \rho)$ est de classe $(k - k')$.

PROPOSITION 11. *Soit* $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$.

On a l'égalité :

$$\gamma(P(k)) = \bigcup_{k' \succcurlyeq k} i^{-1}(k').$$

En effet, soit (E, ρ) un couple de classe k ; $\Gamma' \in M(\mathbf{P})$: Γ' appartient à $\gamma_\rho(P(S(E)))$ si et seulement si il existe des sections holomorphes globales de E incluses dans Γ' par ρ i.e. si $F(\Gamma' \rho)$ est de classe $\succcurlyeq 0$. Or, d'après la proposition précédente, ceci équivaut à :

$$k - i(\Gamma') \succcurlyeq 0$$

D'où la proposition .

DEFINITION 8. *Nous noterons* $V(k,k')$ *la sous-variété algébrique compacte de* $P(k)$ *image par l'application régulière* Ψ *du produit* $P(k-k') \times P(k')$.

PROPOSITION 12. *Soient* $\Gamma' \in M(\mathbf{P})$; $i(\Gamma') = k'$; $d' = \eta(\Gamma') \in P(k')$; $k \succcurlyeq k'$.

L'image réciproque $\gamma^{-1}(\Gamma')$ *de* Γ' *dans* $P(k)$ *est un sous-espace projectif* $P(k)$, *image par* Ψ *de :*

$$P(k-k') \times d'$$

$\gamma^{-1}(\Gamma')$ *a même dimension que* $P(k-k')$: *nous l'appellerons le* sous-espace de Γ' dans $P(k)$.

En effet, soit (E, ρ) (resp. $(3', \rho')$) un couple de classe k (resp. k'). Nous reprenons les notations de la définition 8 ci-dessus. Soit σ' une section de E' génératrice pour Γ' par ρ' : σ' est définie à une constante multiplicative non nulle près. L'espace vectoriel des sections de E incluses dans Γ' par ρ est isomorphe à $S(H)$ (cf déf. 7 et prop. 10) par l'application

$$\begin{array}{ccc} \chi & \rightarrow & \chi \times \sigma' \\ \cap & & \cap \\ S(H) & & S(E) \end{array}$$

$\gamma_\rho^{-1}(\Gamma')$ n'est autre que l'image par π dans $P(S(E))$ du sous-espace vectoriel :

$$\{ \chi \times \sigma' \mid \chi \in S(H) \} \subset S(E)$$

La proposition en résulte immédiatemment, si l'on remarque que $d' = q(\sigma')$.

PROPOSITION 13. *Soient* $\Gamma'' \in M(\mathbf{P})$; $i(\Gamma'') = k''$; $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$; $k' \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$, *avec :* $k'' \prec k' \prec k$; P *(resp.* P'*) le sous-espace de* Γ'' *dans* $P(k)$ *(resp.* $P(k')$*). L'image par* Ψ *de la sous-variété :*

$$P(k-k') \times P'$$

du produit :

$$P(k-k') \times P(k')$$

est incluse dans P.

PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION.

Soit (E,ρ) (resp. (E',ρ'), resp. (E'',ρ'')) un couple associé à **P** de classe k (resp. k', resp. k''). Notons :

$$H = H((E',\rho');(E,\rho))$$
$$H' = H((E'',\rho'');(E',\rho')).$$

Soit s'' une section de E'' génératrice pour Γ'' par ρ''. L'espace vectoriel des sections de E' incluses dans Γ'' par ρ' est :

$$\{(\chi' \times s'') \mid \chi' \in S(H')\}$$

dont l'espace projectif associé est canoniquement isomorphe à P'.

L'espace vectoriel :

$$\{\chi \times (\chi' \times s'') \mid \chi \in S(H) ; \chi' \in S(H')\}$$

dont l'espace projectif associé est canoniquement isomorphe à l'image par Ψ de $P(k-k') \times P'$, est un sous-espace vectoriel dont l'espace projectif associé est canoniquement isomorphe à P.

REMARQUE. En général, on n'a pas :

$$\Psi(P(k-k') \times P) = P$$

Ceci résulte en particulier de considérations de dimension :

$$dim.\ P = dim.\ P(k-k'')$$
$$dim.\ P' = dim.\ P(k'-k'')$$
$$dim.\ \Psi(P(k-k') \times P') \leq dim.\ P(k-k') + dim.\ P(k'-k'')$$

Or, on peut voir sur des exemples simples (dans le cas où la base est un espace projectif) l'inégalité stricte :

$$dim.\ P(k-k') + dim.\ P(k'-k'') < dim.\ P(k-k'')$$

PROPOSITION 14. *Soit* $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$. *On a :*

$$\complement \eta(i^{-1}(k)) = \bigcup_{k' \prec k} V(k,k')$$

Cette proposition est un corollaire immédiat des propositions 10 et 12.

PROPOSITION 15. *Soient* $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$; $k' \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ *avec :* $k' \prec k$. *On a :*

$$\gamma(V(k,k')) = \bigcup_{k'' \prec k} i^{-1}(k')$$
$$\gamma^{-1}(i^{-1}(k')) = V(k,k') - \bigcup_{k'' \prec k'} V(k,k'') \cap V(k,k')$$

On notera (cf. remarque ci-dessus) que l'inégalité $k'' \prec k'$ n'implique pas $V(k,k'') \subset V(k,k')$.

La proposition 15 est un corollaire de la proposition 13.

5. *LE CAS DES p-CHAMPS.*

Dans ce numéro, nous reprenons les notations et définitions du chapitre 1 § 3.

Un p-champ de l'espace fibré vectoriel E est une section méromorphe de l'espace fibré en grassmannienne $G_p(E)$ qui s'identifie au sous-espace $G'_p(P(E))$ de l'espace fibré projectif ${}^p\Lambda' P(E)$. Plus généralement, on peut se proposer d'étudier et de classer les sections méromorphes de $G'_p(\mathbf{P})$ où $\mathbf{P}$ est un espace fibré projectif analytique complexe.

Une section méromorphe Γ_p de $G'_p(\mathbf{P})$ n'est autre qu'une section méromorphe de l'espace fibré projectif ${}^p\Lambda' \mathbf{P}$ satisfaisant à la condition supplémentaire de prendre ses valeurs dans $G'_p(\mathbf{P})$. Toutes les considérations développées dans ce chapitre et le précédent sur les sections méromorphes d'un espace fibré projectif s'appliquent donc en particulier aux sections méromorphes de $G'_p(\mathbf{P})$; on peut définir le triple :

$$(E(\Gamma_p);\ s(\Gamma_p);\ \rho(\Gamma_p))$$

où $(E(\Gamma_p), \rho(\Gamma_p))$ est un couple associé à l'espace fibré projectif ${}^p\Lambda' \mathbf{P}$, et $s(\Gamma_p)$ une section génératrice pour Γ_p par $\rho(\Gamma_p)$ dans $E(\Gamma_p)$.

Si (E_p, ρ_p) est un couple associé à l'espace fibré projectif ${}^p\Lambda' \mathbf{P}$, on peut définir l'espace fibré en droite réciproque de Γ_p par ρ_p. Enfin, on appelle classe $i_p(\Gamma_p)$ de Γ_p dans $\mathcal{C}({}^p\Lambda' \mathbf{P})$ la classe du couple $(E(\Gamma_p), \rho(\Gamma_p))$. On a :

PROPOSITION 16. *Notons* $M(G'_p(\mathbf{P}))$ *l'ensemble des sections méromorphes de* $G'_p(\mathbf{P})$*:*

$$M(G'_p(\mathbf{P})) \subset M({}^p\Lambda' \mathbf{P});$$

notons i_p *la restriction à* $M(G'_p(\mathbf{P})$ *de l'application* i *de* $M({}^p\Lambda' \mathbf{P})$ *dans* $\mathcal{C}(\Lambda'^p \mathbf{P})$*; soit* $k \in \mathcal{C}({}^p\Lambda' \mathbf{P})$ *:* $P(k)$, $\gamma : P(k) \to M({}^p\Lambda' \mathbf{P})$, *et* $\eta : i^{-1}(k) \to P(k)$ *sont définis comme au n° 3 de ce chapitre.*

1) $\gamma^{-1}(M(G'_p(\mathbf{P})) \cap \gamma(P(k))) = \{m \mid m \in P(k);\ \gamma(m) \in M(G'_p(\mathbf{P}))\}$ *est un sous-ensemble algébrique fermé de* $P(k)$ *que nous noterons* $G_p(k)$.

2) L'ensemble $i_p^{-1}(k)$ *des champs de classe* k *de* $M(G'_p(\mathbf{P}))$ *s'identifie à un ouvert de Zariski de* $G_p(k)$ *ainsi défini :*

$$i_p^{-1}(k) \equiv G_p(k) \cap \eta(i^{-1}(k)).$$

DEMONSTRATION .

2) résulte immédiatement de 1) et du fait, démontré au théorème 1, que $\eta(i^{-1}(k))$ est un oubert de Zariski de $P(k)$.

Pour démontrer 1), remarquons qu'une section d'un espace fibré vectoriel E_p muni d'une projection admissible ,ρ_p, sur ${}^p\Lambda' \mathbf{P}$ est incluse par ρ_p dans une section de $M(G'_p(\mathbf{P}))$ si et seulement si sa valeur en tout point a pour image par ρ_p un point de $G'_p(\mathbf{P})$. Les sections de $S(E_p)$ génératrices pour une section de $M(G'_p(\mathbf{P}))$ forment donc un sous-ensemble défini par un système (infini) de relations algébriques : ce sous-ensemble est donc algébrique ainsi que son image par q (cf nº 2) dans $P(k)$- où k est la classe de (E_p, ρ_p) - image qui n'est autre que $G_p(k)$.

REMARQUE . La théorie de GrothendiecK des classes de Chern (cf(10),(11)) permet d'étendre la définition de ces classes aux faisceaux algébriques cohérents sur une base quasi projective. Il résulte d'un travail de Serre (cf(12)) que les faisceaux analytiques cohérents de base une sous-variété algébrique compacte B de l'espace projectif complexe s'identifient aux faisceaux algébriques cohérents sur cette base B : on peut donc définir les classes de Chern de tels faisceaux analytiques cohérents .

Soit Γ un p. champ méromorphe d'un espace fibré vectoriel E de base B, sous variété algébrique compacte d'un espace projectif complexe : nous reprenons les notations du chapitre II ; π désigne la projection de ${}^p\Lambda E$ sur l'espace fibré projectif associé $P({}^p\Lambda E)$.

Le faisceau :

$$\mathfrak{J}({}^p\Lambda \Gamma)$$

s'identifie au faisceau :

$$\mathcal{S}(F({}^p\Lambda \Gamma, \pi))$$

des sections holomorphes de l'espace fibré en droite réciproque de ${}^p\Lambda \Gamma$ par π. La classe de Chern (de degré 2) de ce faisceau détermine la classe du fibré et, par là, la classe du champ : on peut conjecturer que les classes de Chern, de degré 2 à 2p, du faisceau cohérent :

$$\mathfrak{J}(\Gamma)$$

se calculent à partir de celle de $\mathfrak{J}({}^p\Lambda \Gamma)$ par une formule polynomiale dont les coefficients comporteraient les classes de Chern de l'espace fibré vectoriel E. S'il n'en est pas ainsi, il existe une classification des p.champs plus fine que celle donnée ici, et faisant intervenir les classes de Chern du faisceau $\mathfrak{J}(\Gamma)$.

3. Singularités des sections méromorphes d'un espace fibré projectif **P**.

Dans ce paragraphe, comme dans le précédent, la base B de **P** sera supposée compacte.

1. CYCLE DES ZEROS ET CYCLE DES SINGULARITES.

PROPOSITION 1. *Soit* $\Gamma \in i^{-1}(k)$ *une section méromorphe de* **P** *de classe* k.

L'ensemble des points singuliers de Γ *n'est autre que :*

$$p^B(Z(k) \cap B \times \{\eta(\Gamma)\}) \qquad (cf.\ \S 2\ déf.\ 4)$$

Plus généralement, soit Γ' *de classe* $k' \prec k$ *et* $w \in P(k)$ *tel que :*

$$\gamma(w) = \Gamma'$$

L'ensemble des singularités de Γ' *est inclus dans :*

$$p^B(Z(k) \cap B \times \{w\})$$

Cette proposition résulte immédiatement des deux points suivants (cf. chap.II § 2 prop. 4) :

L'ensemble des points singuliers d'un 1-champ sur un ouvert U de B coïncide avec l'ensemble des zéros d'une section génératrice pour ce champ sur U; l'ensemble des zéros d'une section incluse dans le champ contient l'ensemble des singularités.

Dans le cas où la base B est une variété algébrique projective compacte, un théorème de Grothendieck (cf. [10] p. 153) permet de préciser le cycle des singularités de Γ sous une hypothèse complémentaire :

PROPOSITION 2. *Soit* Γ *une section méromorphe de* **P** *- espace fibré analytique complexe projectif de fibre* $P(C^n)$, *de base* B *algébrique projective compacte. Supposons de plus que* $s(\Gamma)$ *soit une section de* $E(\Gamma)$ *transverse à la section nulle (cf. chap.II § 4 déf. 1).*

La classe, pour l'équivalence rationnelle, de l'ensemble algébrique des singularités de Γ *est la classe de Chern :*

$$C_n(E(\Gamma))$$

Cette classe ne dépend que de celle, k, de Γ.

COROLLAIRE. *Soit* Γ *une section méromorphe de* **P** *sans singularités - i.e. holomorphe-* B *étant une variété algébrique projective compacte et* **P** *de fibre* $P(C^n)$.

On a :

$$C_n(E(\Gamma)) = 0.$$

En effet, $s(\Gamma)$ est sans zéros, donc transverse à la section nulle.

DEFINITION 1. *Soit* Γ *une section méromorphe de* $\mathbf{P}$.

Un point b *de la base* B, *singulier pour* Γ, *sera dit* simple *(resp. de* codimension ordinaire*) si* b *est singulier simple (resp. de codimension ordinaire) au sens de la définition 2, chap. II § 4, pour le 1-champ* $\theta^{-1}(\Gamma)\circ\Gamma$ *de* $E(\Gamma)$ *- où* $\theta(\Gamma)$ *est l'isomorphisme de* $P(E(\Gamma))$ *sur* $\mathbf{P}$ *associé à* $\rho(\Gamma)$.

L'indice d'une singularité b de codimension ordinaire pour Γ sera l'indice de b pour $\theta^{-1}(\Gamma)\circ\Gamma$ - i. e. l'indice en b de l'application :

$$U \to C^n,$$

qui définit $s(\Gamma)$ sur un voisinage ouvert U de b tel que E_U s'identifie à $U \times C^n$.

PROPOSITION 3. *Soit* $\mathbf{P}$ *un espace fibré projectif de fibre* $P(C^n)$ $(n \geq 2)$, *de base* B *- variété analytique complexe compacte de dimension* $q = n + p$. *Soit* $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$.

$Q(k)$ *- image par* η *de l'ensemble des sections méromorphes de* $\mathbf{P}$ *de classe* k *dont le cycle des singularités est de codimension ordinaire est un ouvert de Zariski de* $P(k)$.

Donc, ou bien $Q(k)$ est vide, ou bien, s'il possède un élément, il est partout dense.

DEMONSTRATION.

Si $p < 0$, $Q(k)$ est l'image par η de l'ensemble des sections de classe k sans singularités.

Si $p \geq 0$, $Q(k)$ est l'image par η de l'ensemble des sections de classe k dont le cycle des singularités est de codimension n ; c'est à dire que sont à éliminer les sections dont l'ensemble des singularités est, en certains points, de codimension inférieure ou égale à $n-1$.

D'où les égalités :

$$Q(k) = \complement\, p_o^{P(k)}(Z(k)) \text{ si } p < 0;$$

$$Q(k) = \complement\, p_{p+1}^{P(k)}(Z(k)) \text{ si } p \geq 0$$

Rappelons que l'on a :

$$\eta(i^{-1}(k)) = \complement\, p_{n+p-1}^{P(k)}(Z(k)).$$

La proposition résulte immédiatement des égalités écrites et de la proposition 6, chap. I, § 1 (à laquelle on peut se reporter pour les notations).

PROPOSITION 4. *Soit* $\mathbf{P}$ *de fibre* $P(C^n)$, *de base* B *- variété analytique complexe compacte. Soit* $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$. *Notons* $R(k)$ *l'image par* η *dans* $P(k)$ *de l'ensemble des sections méromorphes de* $\mathbf{P}$ *de classe* k *n'admettant que des singularités simples.*

$R(k)$ est un ouvert de Zariski de $P(k)$.

Donc, comme $Q(k)$, $R(k)$ est ou vide, ou partout dense dans $P(k)$.

DEMONSTRATION. Soit (E, ρ) un couple associé à $\mathbf{P}$ de classe k ; $S(E)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes globales de E.

Le produit :

$$S(E) \times E$$

est muni d'une structure fibrée de fibre C^n, de base $S(E) \times B$.

Le produit :

$$(S(E) - \{0\}) \times B = S^*(E) \times B$$

est muni canoniquement d'une projection - notée π - sur $P(S(E)) \times B$.

Le produit :

$$P(S(E)) \times B$$

est en correspondance biunivoque par q (cf. § 2 déf. 3) avec $P(k) \times B$.

$S(E) \times E$ admet une section holomorphe globale remarquable, $\bar{s}$, ainsi définie :

$$\forall s \in S(E),\ b \in B,\ \bar{s}(s, b) = (s, s(b)) \in S(E) \times E.$$

Notons Z l'ensemble des zéros de $\bar{s}$ au dessus de $S^*(E) \times B$. $Z(k)$ n'est autre que :

$$Z(k) = q \circ \pi(Z)$$

Notons Z_S le sous-ensemble de Z formé des points de $S^*(E) \times B$ où $\bar{s}$ est nulle et non transverse à la section nulle de $S(E) \times E$. On a :

$$R(k) = \complement\, p_o^{P(k)}(q \circ \pi(Z_S))$$

(car une section de $\mathbf{P}$ a toutes ses singularités simples si et seulement si elle n'a pas d'autres singularités!).

La proposition résulte donc du :

LEMME. *$q \circ \pi(Z_S)$ est un sous-ensemble analytique compact de $P(k) \times B$.*

DEMONSTRATION DU LEMME. Il suffit d'établir que $\pi(Z_S)$ est un sous-ensemble analytique compact de $P(S(E)) \times B$ et, pour celà, que Z_S est un sous-ensemble analytique fermé de $S^*(E) \times B$ "invariant par homothétie" au sens suivant :

$$\forall \lambda \in C^*,\ (s, b) \in Z_S \rightleftarrows (\lambda s, b) \in Z_S.$$

Or, cette dernière propriété résulte immédiatement de la définition de Z_S. Il reste à établir que Z_S est un sous-ensemble analytique fermé de $S^*(E) \times B$.

Soit $(s, b) \in S^*(E) \times B$. Au dessus d'un voisinage U de (s, b) dans $S(E) \times B$, $S(E) \times E$ s'identifie à l'espace fibré trivial $U \times C^n$, la section $\bar{s}$ est définie par une application - notée encore $\bar{s}$ - de U dans C^n; on a :

$$Z \cap U = \{(s, b) \mid (s, b) \in U;\ \bar{s}(s, b) = 0\}$$
$$Z_S \cap U = \{(s, b) \mid (s, b) \in Z \cap U;\ rang\ D_{(s, b)}\bar{s} < n\}$$

où $D_{(s, b)}\bar{s}$ désigne la différentielle au point (s, b) de l'application $\bar{s}$ de U dans C^n.

Le lemme, donc la proposition, en résulte immédiatement.

REMARQUE. La proposition 4 montre que si elle s'applique dans un cas, la formule de Grothendieck s'applique dans presque tous les cas.

Voici un corollaire relatif à un cas particulier simple :

COROLLAIRE. Soit $\mathbf{P}$ de fibre $P(C^n)$, de base B - variété algébrique projective compacte de dimension n. (C'est notemment le cas si $\mathbf{P} = P(T(B))$ - $T(B)$ étant l'espace fibré tangent à B - i.e. le cas correspondant aux champs d'éléments de contact sur B).

Soit $k \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$; supposons qu'il existe une section méromorphe $\Gamma \in i^{-1}(k)$ n'ayant que des singularités simples. Soit d leur nombre.

1°) $R(k)$ (cf. prop. 4) est un ouvert de Zariski partout dense de $P(k)$: pour toute section de $\mathbf{P}$, élément de $\eta^{-1}(R(k))$ le nombre des singularités est d; d est donné par la formule de Grothendieck (cf. prop. 2).

2°) $Z(k)$ admet un système fini (éventuellement vide si $d = 0$) de composantes irréductibles se projetant par $p^{P(k)}$ sur $P(k)$ tout entier. Nous noterons Z' la réunion de ces composantes. Le degré de la projection $p^{P(k)}$ de Z' sur $P(k)$ est d.

3°) $Q(k)$ est un ouvert de Zariski partout dense de $P(k)$; si $Z(k)$ est irréductible, pour toute section de $\mathbf{P}$ élément de $\eta^{-1}(Q(k))$ la somme des indices des singularités est d (cf. 1°).

DEMONSTRATION.

1°) est une conséquence des propositions 2 et 4.

2°) Comme $P(k)$ est irréductible, une composante irréductible de $Z(k)$ se projetant sur une partie de $P(k)$ dont la fermeture a un intérieur non vide se projette sur $P(k)$ tout entier : au dessus d'un point générique de $R(k)$, $Z(k)$ se réduit à Z', d'où 2°).

3°) Si $Z(k)$ est irréductible, $Z(k) = Z'$; pour tout champ Γ de classe k le cycle des singularités est :

$$(B \times \eta(\Gamma)) \cap Z(k)$$

qui, d'après 2°) est de dimension supérieure ou égale à 1, ou se compose de points isolés dont la somme des indices de multiplicité est d.

2. *CALCUL DE CLASSES DE CHERN.*

Soit Γ une section méromorphe de $\mathbf{P}$; $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$ le triple associé (cf. chap. III § 2), (E, ρ) un couple associé à $\mathbf{P}$.

Supposons que l'on soit à même de calculer :

les classes de Chern de E : $C_i = C_i(E)$ $(i = 1, \dots, n)$,

la classe de Chern de $F(\Gamma, \rho)$: $\varphi = C_1[F(\Gamma, \rho)]$;

nous nous proposons de calculer $C_n(E(\Gamma))$ en fonction de φ et des C_i. Nous allons établir la formule :

$$C_n(E(\Gamma)) = \sum_{i=o}^{n} C_i(-\varphi)^{n-1}$$

PROPOSITION 5. *$E(\Gamma)$ est isomorphe à l'espace fibré :*

$$E \otimes \check{F}(\Gamma, \rho)$$

où $\check{F}(\Gamma, \rho)$ désigne l'espace fibré dual de $F(\Gamma, \rho)$.

En effet, appliquons la première formule du § 1 (prop. 4) :

$$H[(E, \rho); (E(\Gamma), \rho(\Gamma))] \approx L[F(\Gamma, \rho); F(\Gamma, \rho(\Gamma))]$$

$F(\Gamma, \rho(\Gamma))$ étant trivial (cf. § 1 prop. 3), on en déduit :

$$H[(E, \rho); (E(\Gamma), \rho(\Gamma))] \approx \check{F}(\Gamma, \rho),$$

d'où :

$$E \otimes \check{F}(\Gamma, \rho) \approx E(\Gamma)$$

La proposition 5 nous ramène au calcul des classes de Chern d'un produit tensoriel, calcul que nous ferons suivant l'axiomatique maintenant classique (cf. [10] ou [13]) mais en utilisant l'artifice du polynôme de Chern homogène à deux variables.

DEFINITION 1. *Soit E un espace fibré de fibre C^n; nous noterons $C(E; u, t)$ le polynôme homogène de degré n à deux variables :*

$$C(E; u, t) = u^n + u^{n-1} t\, C_1(E) + \dots + u^{n-i} t^i C_i(E) + \dots + t^n C_n(E)$$

où $C_i(E)$ désigne la i^e classe de Chern de E.

PROPOSITION 6. *Soit E un espace fibré vectoriel de base B de fibre C^n; Δ un espace fibré en droites de base B.*

On a :

$$C(E \otimes \check{\Delta}; u, t) = C(E; (u - t\delta), t)$$

où $\check{\Delta}$ désigne l'espace fibré dual de Δ et δ la classe de Chern de Δ.

DEMONSTRATION.

a) Cas où E est un espace fibré en droites.

Posons $\varepsilon = C_1(E)$. On a :

$$\begin{aligned} C_1(E \otimes \check{\Delta}) &= C_1(E) - C_1(\Delta) \\ &= \varepsilon - \delta; \end{aligned}$$

d'où :

$$C(E \otimes \check{\Delta}; u, t) = u + t(\varepsilon - \delta).$$

Or, on peut écrire :

$$u + t(\varepsilon - \delta) = (u - t\delta) + t\varepsilon$$

i.e.

$$C(E \otimes \check{\Delta}; u, t) = C(E; (u - t\delta), t)$$

b) Cas où E est somme directe d'espaces fibrés en droites.

$$\begin{aligned} E &= \Delta_1 \oplus \dots \oplus \Delta_r \\ C(E; u\ t) &= \prod_{i=1}^{r} C(\Delta_i; u, t) \\ E \otimes \check{\Delta} &= (\Delta_1 \otimes \check{\Delta}) \oplus \dots \oplus (\Delta_r \otimes \check{\Delta}) \\ C(E \otimes \check{\Delta}; u, t) &= \prod_{i=1}^{r} [\ C(\Delta_i \otimes \check{\Delta}); u, t] \\ &= \prod_{i=1}^{r} [\ C(\Delta_i; u - t\delta, t)] \\ &= C(E; u - t\delta, t) \end{aligned}$$

c) Le cas général.

On sait (cf. [13] page 65 Satz 4.4.3.) que les formules relatives aux polynômes de Chern et démontrées dans le cas particulier d'espaces fibrés vectoriels sommes directes d'espaces fibrés en droites ont un caractère universel. Le cas général se ramène donc au cas étudié en b).

COROLLAIRE. *des propositions 5 et 6.*

$$C(E(\Gamma); u, t) = C(E; (u - t\varphi), t),$$

les notations étant celles indiquées au début de ce n° 2.

En particulier, on a :

$$C_n(E(\Gamma)) = (-1)^n \varphi^n + \dots + (-1)^{n-i} \varphi^{n-i} C_i + \dots + C_n .$$

Dans le cas particulier où B est de dimension n, $C_n(E(\Gamma))$ s'identifie à un nombre entier. Si, de plus, la formule de Grothendieck s'applique (cf. n°1), cet entier n'est autre que le nombre des singularités de Γ (qui sont alors simples et isolées).

3. *APPLICATION AUX CHAMPS D'ELEMENTS DE CONTACT SUR L'ESPACE PROJECTIF.*

Nous supposons dans ce numéro que B est l'espace projectif complexe de dimension $n (B = P(C^{n+1}))$ et que $\mathbf{P}$ est l'espace projectif associé à l'espace fibré tangent T à $B(\mathbf{P} = P(T))$.

La cohomologie de B à valeurs dans Z est particulièrement simple : si l'on note X la classe de cohomologie de degré 2 définie par un hyperplan de B, une classe de cohomologie de degré $2p$ (p entier $\leq n$) est un multiple entier de X^p - classe de cohomologie définie par une sous-variété linéaire de B de codimension p. On a:

$$C(T; u, t) = \sum_{i=o}^{n} (u + tX)^{n-i} t^i X^i.$$

Soit Γ un champ méromorphe d'éléments de contact sur B (i.e. une section méromorphe de $\mathbf{P}$). Nous allons voir qu'il est facile de calculer la classe de Chern de $F(\Gamma, \pi)$ -où π désigne la projection $T \to \mathbf{P}$)- donc de calculer le nombre des singularités si celles-ci sont isolées.

Faisons choix dans $P(C^{n+1})$ privé d'un hyperplan à l'infini d'un système de n coordonnées affines $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. On démontre que Γ peut être défini par un champ de vecteurs (i.e. une section de T) dont les composantes $X_1, \ldots, X_n$ sont des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$ premiers entre eux dans leur ensemble, déterminés à une constante multiplicative complexe non nulle près. Si l'on choisit un hyperplan à l'infini ne contenant aucune des singularités de Γ, la borne supérieure des degrés des polynômes X_i est un entier appelé degré du champ Γ et noté m.

La classe de Chern de l'espace fibré $F(\Gamma, \pi)$ est :

$$(2-m)X.$$

Pour le démontrer, on remarque que le champ de vecteurs de composantes $X_1, \ldots X_n$ qui définit Γ correspond à une section de $F(\Gamma, \pi)$ dont le diviseur a pour support l'hyperplan à l'infini. Il suffit alors d'étudier, par changement de variable, l'ordre d'infinitude du champ $X_1, \ldots, X_n$ au voisinage d'un point de l'hyperplan de l'infini.

En appliquant la formule du n° 2, il vient :

$$C_n(E(\Gamma)) = X^n([1-(2-m)]^n + [1-(2-m)]^{n-1} + \ldots + 1)$$
$$= X^n((m-1)^n + (m-1)^{n-1} + \ldots + 1).$$

Le polynôme :

$$(m-1)^n + (m-1)^{n-1} + \dots + 1$$

donne le nombre des singularités lorsque celles-ci sont simples et isolées.

Bibliographie.

[1] S.S. CHERN. Complex Manifolds (Universidade do Recife 1959).

[2] H. CARTAN. Séminaire E.N.S. 1951-52.

[3] C. EHRESMANN. Gattungen von lokalen Strukturen (Jahresberichte der Deutschen Math. Vereinigung 60, 1957).

[4] C. EHRESMANN. Espaces fibrés associés (C. R. Ac. Sc. Paris, 213, 1941, p. 762).

[5] R. GODEMENT. Théories des Faisceaux (Hermann, Paris 1958).

[6] H. CARTAN & J.P. SERRE. Théorème de finitude (C. R. Ac. Sc. Paris, 237, 1953, p.128-130)

[7] STOLL. (Math. Annalen, 136).

[8] A. WEIL. Variétés kähleriennes (Hermann, Paris, 1958).

[9] R. REMMERT. Projektionen analytischer Mengen (Math. Annalen, 130, 1956, p. 410-441).

[10] A. GROTHENDIECK. La théorie des classes de Chern (Bull. Soc. Math. France, 86, 1958, p. 137-154).

[11] A. BOREL - J.P. SERRE. Le théorème de Riemann-Roch (Bull. Soc. Math. France, 86, 1958, p. 97 - 136).

[12] J.P. SERRE. Géométrie algébrique et géométrie analytique (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6, 1955-1956, p. 1-42).

[13] F. HIRZEBRUCH. Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie (Springer-Verlag Berlin 1956).

[14] J. FRENKEL. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés (Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, p. 135 à 220).