A. Andreotti
E. Vesentini

Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 4 (1962-1963), exp. nº 1, p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1962-1963__4__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Séminaire dirigé par C. EHRESMANN
MAI 1962

LES THEOREMES FONDAMENTAUX DE LA THEORIE DES ESPACES HOLOMORPHIQUEMENT COMPLETS

par A. ANDREOTTI et E. VESENTINI

Nous avons cherché à donner un exposé le plus complet possible des théorèmes A et B de H. Cartan et J.P. Serre.

Le point crucial de la démonstration originelle était le théorème des matrices holomorphes inversibles de H. Cartan. Nous l'avons remplacé ici par des considérations de géométrie differentielle (§ 1, 2, 3), qui sont utiles aussi à d'autres endroits ; essentiellement il s'agit d'une extension du théorème de "vanishing" de K. Kodaira. Il nous a semblé qu'il y avait peut être de l'intérêt à savoir qu'on pouvait aussi se servir de l'outil de la "théorie du potentiel". Il ne sera pas difficile de voir quels sont les changements à faire pour retrouver un exposé fondé sur le théorème de H. Cartan.

Comme il s'agit d'un séminaire on n'a pas hésité à écrire les détails de la démonstration pour les espaces, au lieu de se borner aux variétés. Ainsi on a découvert qu'à un certain endroit on avait besoin de savoir que, pour la topologie de la convergence compacte, l'espace des fonctions holomorphes est un espace complet. Théorème vrai, dû à Grauert et Remmert [9], mais qui fait appel au théorème de normalisation de Oka. Comme ce dernier théorème n'est pas tout à fait banal, on a suivi ici une autre démarche en introduisant sur les espaces de fonctions holomorphes en question, une topologie qui sert aussi bien pour la démonstration et ne fait pas intervenir le théorème de Oka. Cette topologie est aussi naturelle que l'autre, et avec le théorème de Grauert Remmert on verrait bien qu'elle coïncide avec la topologie de la convergence compacte.

La ligne de l'exposé suit les idées de la démonstration de H. Cartan et J.P. Serre de très près.

1. La W-ellipticité.

1.1. Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur la variété complexe paracompacte X, de dimension complexe n; $\mathbf{C}^m$ étant la fibre de E, on dira que m est le rang du fibré E. Soit $\varpi : E \to X$ la projection canonique de E sur X. Le fibré E est défini par rapport à un recouvrement ouvert coordonné convenable $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X, par un système $\{e_{ij}\}$ de fonctions de transition holomorphes

$$e_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(m, \mathbf{C})$$

telles que

$$e_{ij} e_{jk} e_{ki} = id. \ sur \ U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Soit $C^{p,q}(X, E)$ l'espace vectoriel complexe des formes différentielles C^∞ sur X, de type (p, q), à valeurs dans E. Chaque forme $\varphi \in C^{p,q}(X, E)$ est définie par un système $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ de vecteurs

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_i^m \end{pmatrix}$$

dont les éléments sont des formes $\varphi_i^r (r = 1, \ldots m)$ de type (p, q) et classe C^∞ sur U_i, telles que sur $U_i \cap U_j$ on ait :

$$(1) \qquad \varphi_i = e_{ij} \varphi_j .$$

Soit $\mathfrak{D}^{p,q}(X, E) \subset C^{p,q}(X, E)$ le sous-espace des formes à support compact.

Puisque les fonctions de transition sont holomorphes, l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux conjuguées des coordonnées locales complexes définit un homomorphisme :

$$\overline{\partial} : C^{p,q}(X, E) \to C^{p,q+1}(X, E),$$

et on a :

$$\overline{\partial}(\mathfrak{D}^{p,q}(X, E)) \subset \mathfrak{D}^{p,q+1}(X, E).$$

Puisque $\overline{\partial}\,\overline{\partial} = 0$, on a sur $C^p(X, E) = \overset{n}{\underset{q=o}{\oplus}} C^{p,q}(X, E)$ une structure de complexe, avec différentielle $\overline{\partial}$. Soit $H^{p,q}(X, E)$ le q-ième groupe de cohomologie de ce complexe.

On a - d'après Dolbeault ([10], p. 116) - un isomorphisme canonique

$$H^{p,q}_{\Phi}(X, E) \approx H^q_{\Phi}(X, \Omega^p(E)),$$

où $\Omega^p(E)$ est le faisceau des germes des p-formes holomorphes à valeurs dans E, et Φ est la famille des fermés ou des compacts de X.

1.2. Choisissons une métrique sur les fibres de E. Cela revient à se donner pour tout point $x \in X$ un produit scalaire hermitien $h(u, w)$, dépendant de façon C^{∞} du point variable x sur X, opérant sur les paires de vecteurs u et w appartenant à la fibre $\mathbf{C}_x^m$ de E.

Si ξ_i et η_i sont les coordonnées fibre de u et w au dessus de la carte locale $U_i \ni x$, on a :

$$h(u, w) = {}^t\overline{\eta}_i h_i \xi_i$$

où h_i est une matrice hermitienne définie positive et de classe C^{∞} sur U_i. Puisque sur $U_i \cap U_j$

$${}^t\overline{\eta}_i h_i \xi_i = {}^t\overline{\eta}_j h_j \xi_j$$

on a :

$$h_i = {}^t\overline{e}_{ji} h_j e_{ji} \text{ sur } U_i \cap U_j. \tag{2}$$

Le fibré dual E^* de E est un fibré holomorphe de rang m sur X, définit par les fonctions de transition $\{ {}^t e_{ij}^{-1} \}$.

La métrique $h(u, w)$ introduite sur les fibres de E définit un antiisomorphisme de chaque fibre de E sur la fibre correspondante de E^*. Cette application se prolonge naturellement en un antiisomorphisme

$$\# : C^{p,q}(X, E) \tilde{\to} C^{q,p}(X, E^*)$$

défini localement par

$$(\# \varphi)_i = \overline{h}_i \overline{\varphi}_i . \tag{3}$$

Soit :

$$\tilde{\partial} : C^{p,q}(X, E) \to C^{p+1,q}(X, E)$$

l'application linéaire définie par

$$\#(\tilde{\partial} \varphi) = \overline{\partial}(\# \varphi) \qquad (\varphi \in C^{p,q}(X, E)). \tag{4}$$

On a $\tilde{\partial}\tilde{\partial} = 0$ et $\tilde{\partial}(\mathfrak{D}^{p,q}(X, E)) \subset \mathfrak{D}^{p+1,q}(X, E)$.

Si E est le fibré trivial avec la métrique $h_i = 1$, $\tilde{\partial}$ coïncide avec l'opérateur ∂ de différentiation extérieure par rapport aux coordonnées locales complexes et, dans ce cas,

$$\overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial} = 0.$$

Pour calculer en général l'expression de $\overline{\partial}\tilde{\partial} + \tilde{\partial}\overline{\partial}$, introduisons d'abord les formes locales :

$$l_i = h_i^{-1} \partial h_i$$

(5) $$s_i = \bar{\partial} l_i = \bar{\partial}(h_i^{-1} \partial h_i).$$

Les e_{ij} étant holomorphes, il résulte de (2) que, sur $U_i \cap U_j$

(6) $$l_i = e_{ij} l_j e_{ji} - \partial e_{ij}\, e_{ji}$$

(7) $$s_i = e_{ij} s_j e_{ji}.$$

Soit $e(s_i)\varphi_i$ le produit *extérieur* de la matrice s_i par la forme φ_i. Il résulte de (1) et (7) que, si φ_i et φ_j sont les composantes locales, sur les ouverts U_i et U_j, d'une forme $\varphi \in C^{p,q}(X, E)$, on a :

$$e(s_i)\varphi_i = e(s_j)\varphi_j.$$

Le produit $e(s_i)$ définit donc un homomorphisme global

$$e(s) : C^{p,q}(X, E) \to C^{p+1,q+1}(X, E).$$

Il résulte de (4) que sur U_i

$$(\tilde{\partial}\varphi)_i = \partial\varphi_i + e(l_i)\varphi_i.$$

On obtient de là par un calcul immédiat, que

(8) $$\bar{\partial}\tilde{\partial} + \tilde{\partial}\bar{\partial} = e(s)$$

1.3. *Une interprétation géométrique (inutile) des formes l_i et s_i*. Nous allons indiquer une interprétation géométrique des formes l_i et s_i, qui d'ailleurs ne sera pas utilisée dans la suite, mais qui servira à justifier la terminologie.

Soit P le fibré principal holomorphe associé au fibré E; P est défini, par rapport au recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X, par les fonctions de transition $\{e_{ij}\}$ qui opèrent sur la fibre $GL(m, \mathbf{C})$ de P, par les formules

$$Z_i = e_{ij} Z_j \qquad (Z_i, Z_j \in GL(m, \mathbf{C})) .$$

Il résulte de (6) que sur $\varpi^{-1}(U_i)$ $\varpi^{-1}(U_j)$

$$Z_i^{-1}(l_i Z_i + dZ_i) = Z_j^{-1}(l_j Z_j + dZ_j).$$

En d'autres termes, *les formes locales $\omega_i = Z_i^{-1}(l_i Z_i + dZ_i)$ sur $\varpi^{-1}(U_i)$ définissent une 1-forme globale ω sur P, à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de $GL(m, \mathbf{C})$.*

Soit Q_ξ le sous-espace de l'espace tangent P_ξ à P au point $\xi \in P$, qui est annulé par la forme ω. On vérifie que l'ensemble des espaces Q_ξ définit une connexion dans P, dont ω est la forme de connexion associée (1).

(1) Pour les définitions concernant les connexions, cf. [13].

Soit Ω la forme de courbure de ω. La valeur $\Omega(\xi, \eta)$ de Ω sur une paire ξ, η de champs de vecteurs tangents à P est donnée par la formule de structure ([13], pp. 34-35)

$$\Omega(\xi, \eta) = d\omega(\xi, \eta) + 1/2 \,.\, [\,\omega(\xi), \omega(\eta)\,].$$

Par conséquent la composante de type $(1, 1)$ de Ω est donnée localement par

$$\bar{\partial}\omega_i = Z_i^{-1} s_i Z_i.$$

On appellera brièvement s *la forme de courbure* de la métrique $h(u, w)$ sur les fibres de E.

1.4. Introduisons une métrique hermitienne C^∞, définie positive, sur la variété complexe X (c'est-à-dire sur les fibres du fibré holomorphe tangent à X). Cette métrique définit un isomorphisme

$$* : C^{p,q}(X, E) \xrightarrow{\sim} C^{n-q, n-p}(X, E)$$

tel que

$$** \varphi = (-1)^{p+q} \varphi \qquad (\varphi \in C^{p,q}(X, E)).$$

Cet isomorphisme commute avec $\#$, au sens que

$$\#(* \varphi) = *(\# \varphi);$$

ainsi l'antiisomorphisme

$$\varphi \to * \# \varphi$$

de $C^{p,q}(X, E)$ sur $C^{n-p, n-q}(X, E^*)$ est bien défini; si $\varphi \in \mathfrak{D}^{p,q}(X, E)$, $* \# \varphi \in \mathfrak{D}^{n-p, n-q}(X, E^*)$.

Si $\varphi, \psi \in C^{p,q}(X, E)$, ${}^t\varphi \wedge * \# \psi$ est une (n, n)-forme scalaire sur X, que l'on notera par $A(\varphi, \psi)\, dX$, dX étant l'élément de volume de la métrique hermitienne sur X; $A(\varphi, \psi)$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive non dégénérée. On appellera $A(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ la *longueur* de φ. Si φ et ψ sont à support compact,

$$\left| \int_X A(\varphi, \psi)\, dX \right| < +\infty.$$

La forme sesquilinéaire hermitienne positive non dégénérée

$$(\varphi, \psi) = \int_X A(\varphi, \psi)\, dX \qquad (\varphi, \psi \in \mathfrak{D}^{p,q}(X, E))$$

définit sur $\mathfrak{D}^{p,q}(X, E)$ une structure d'espace préhilbertien complexe.

1.5. Soient

$$\bar\theta : C^{p,q}(X,E) \to C^{p-1,q}(X,E),$$
$$\theta : C^{p,q}(X,E) \to C^{p,q-1}(X,E)$$

les opérateurs définis par

$$\bar\theta = -*\bar\partial*, \qquad \theta = -*\tilde\partial*.$$

On a $\bar\theta\bar\theta = 0$, $\theta\,\theta = 0$, et

$$\bar\theta(\mathfrak{D}^{p,q}(X,E)) \subset \mathfrak{D}^{p-1,q}(X,E),$$
$$\theta(\mathfrak{D}^{p,q}(X,E)) \subset \mathfrak{D}^{p,q-1}(X,E).$$

Les opérateurs $\bar\partial$ et $\bar\theta$ ne dépendent pas de la métrique qu'on choisit sur les fibres de E. Il résulte de (4) que

$$\bar\theta\,\#\,\varphi = \#\,\theta\,\varphi \qquad (\varphi \in C^{p,q}(X,E)).$$

On vérifie que, si $\varphi \in C^{p,q}(X,E)$, $\varphi \in C^{p,q+1}(X,E)$, $\chi \in C^{p+1,q}(X,E)$ on a

$${}^t\bar\partial\varphi \wedge *\#\psi - {}^t\varphi \wedge *\#\,\theta\psi = d({}^t\varphi \wedge *\#\psi)$$
$${}^t\tilde\partial\varphi \wedge *\#\chi - {}^t\varphi \wedge *\#\bar\theta\,\chi = d({}^t\#\varphi \wedge * \bar\chi).$$

Il résulte de la formule de Stokes que, si φ, ψ et χ sont à support compact, on a

$$(\bar\partial\varphi, \psi) = (\varphi, \theta\psi), \quad (\tilde\partial\varphi, \chi) = (\varphi, \bar\theta\chi). \tag{9}$$

Considérons les opérateurs différentiels du second ordre

$$\Box' = \bar\partial\theta + \theta\bar\partial : C^{p,q}(X,E) \to C^{p,q}(X,E),$$
$$\Box'' = \tilde\partial\bar\theta + \bar\theta\tilde\partial : C^{p,q}(X,E) \to C^{p,q}(X,E).$$

Il résulte de (9) que, si φ_1 et $\varphi_2 \in \mathfrak{D}^{p,q}(X,E)$,

$$\begin{aligned} (\Box'\varphi_1, \varphi_2) &= (\varphi_1, \Box'\varphi_2) = (\bar\partial\varphi_1, \bar\partial\varphi_2) + (\theta\varphi_1, \theta\varphi_2), \\ (\Box''\varphi_1, \varphi_2) &= (\varphi_1, \Box''\varphi_2) = (\tilde\partial\varphi_1, \tilde\partial\varphi_2) + (\bar\theta\varphi_1, \bar\theta\varphi_2). \end{aligned} \tag{10}$$

1.6. Introduisons dans $\mathfrak{D}^{p,q}(X,E)$ les formes sesquilinéaires hermitiennes positives non dégénérées (φ, ψ) et

$$a(\varphi,\psi) = (\varphi,\psi) + (\bar\partial\varphi, \bar\partial\psi) + (\theta\varphi, \theta\psi) \quad (\varphi, \psi \in \mathfrak{D}^{p,q}(X,E)).$$

Soient $L^{p,q}(X,E)$ et $W^{p,q}(X,E)$ les espaces hilbertiens complexes obtenus par complétion de $\mathfrak{D}^{p,q}(X,E)$ par rapport aux deux normes $\|\varphi\| = (\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}}$ et

$N(\varphi) = a(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$.

Il existe une application injective canonique

$$W^{p,q}(X, E) \to L^{p,q}(X, E);$$

$W^{p,q}(X, E)$ peut être considéré comme le sous-espace de $L^{p,q}(X, E)$ constitué des éléments de $L^{p,q}(X, E)$ qui admettent "simultanément" un $\overline{\partial}$ et un θ généralisés au sens fort de Friedrichs ("Simultanément" signifie que, si $\varphi \in W^{p,q}(X, E)$, $\overline{\partial}\varphi$ et $\theta\varphi$ sont des éléments de $L^{p,q+1}(X, E)$ et $L^{p,q-1}(X, E)$ qui peuvent être approchés par les $\overline{\partial}$ et le θ des éléments d'une suite de Cauchy convenable de $\mathfrak{D}^{p,q}(X, E)$ qui converge vers φ en norme $\| \quad \|$; cf. [1], pp. 288 - 289).

Considérons dans $W^{p,q}(X, E)$ la forme sesquilinéaire hermitienne

$$\underline{d}(\varphi, \psi) = (\overline{\partial}\varphi, \overline{\partial}\psi) + (\theta\varphi, \theta\psi) \qquad (\varphi, \psi \in W^{p,q}(X, E));$$

$\underline{d}(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ est une seminorme dans $W^{p,q}(X, E)$, mais en général ce n'est pas une norme.

DEFINITION. *Le fibré E est dit W-elliptique dans le degré (p, q), ou brièvement $W^{p,q}$-elliptique, s'il existe une constante $c > 0$, une métrique hermitienne C^∞ définie positive sur X et une métrique sur les fibres de E, telles que pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}^{p,q}(X, E)$ on ait*

$$(\varphi, \varphi) \leq c\,\underline{d}(\varphi, \varphi).$$

Si E est $W^{p,q}$-elliptique, $\underline{d}(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ devient une norme sur $W^{p,q}(X,E)$, qui définit sur $W^{p,q}(X, E)$ la même topologie que la norme N.

Il résulte de là, à l'aide de (10) et du théorème de représentation de Riesz, le

THEOREME. *Si E est $W^{p,q}$-elliptique, pour chaque forme $\tau \in L^{p,q}(X, E)$ il existe une forme $\lambda \in W^{p,q}(X, E)$, qui est une solution faible de l'équation*

$$\Box' \lambda = \tau,$$

(i.e. λ est telle que

$$(\lambda, \Box' u) = (\tau, u)$$

pour chaque forme $u \in \mathfrak{D}^{p,q}(X, E)$.

Par le théorème de régularisation, si $\tau \in C^{p,q}(X, E) \cap L^{p,q}(X, E)$ alors $\lambda \in C^{p,q}(X, E) \cap W^{p,q}(X, E)$ est solution de

$$\Box' \lambda = \tau$$

au sens fort.

1.7. Supposons que la métrique hermitienne choisie sur X soit complète. Soit O un point de X et soit $B(c)$ la boule ouverte de centre O et de rayon c par rapport à la fonction distance définie par la métrique hermitienne considérée.

LEMME. *Il existe une constante $A > 0$ telle que - si on se donne arbitrairement trois nombres réels positifs R, r et σ, $0 < r < R$ - pour chaque forme $\varphi \in C^{p,q}(X, E)$ on a*

$$\|\bar\partial\varphi\|^2_{B(r)} + \|\theta\varphi\|^2_{B(r)} \leq \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{A}{(R-r)^2}\right)\|\varphi\|^2_{B(R)} + \sigma\|\Box'\varphi\|^2_{B(R)}.$$

Ce lemme a été démontré dans [1] (pp. 293-296) dans le cas où la dimension de la fibre est $m = 1$. La démonstration se généralise sans aucune difficulté au cas où m est quelconque.

En posant $R = 2r$ et en faisant tendre r et σ vers l'infini, on obtient le

COROLLAIRE. *Si la métrique hermitienne choisie sur X est complète, et si $\varphi \in C^{p,q}(X, E) \cap L^{p,q}(X, E)$ est telle que $\Box'\varphi = 0$, on a*

$$\bar\partial\varphi = 0, \quad \theta\varphi = 0.$$

PROPOSITION. *Si E est $W^{p,q}$-elliptique par rapport à (une métrique sur les fibres de E et à) une métrique hermitienne complète sur X, pour chaque forme $\varphi \in C^{p,q}(X, E) \cap L^{p,q}(X, E)$ telle que $q > 0$ et $\bar\partial\varphi = 0$, il existe une forme $\psi \in C^{p,q-1}(X, E) \cap L^{p,q-1}(X, E)$ pour laquelle on a*

$$\varphi = \bar\partial\psi.$$

PREUVE. Puisque E est $W^{p,q}$- elliptique il existe une forme $\lambda \in C^{p,q}(X,E) \cap W^{p,q}(X, E)$ telle que

$$\Box'\lambda = (\bar\partial\theta + \theta\bar\partial)\lambda = \varphi .$$

Puisque $\lambda \in W^{p,q}(X, E) \cap C^{p,q}(X, E)$ on a

$$\bar\partial\lambda \in C^{p,q+1}(X, E) \cap L^{p,q+1}(X, E).$$

D'ailleurs

$$\Box'\bar\partial\lambda = \bar\partial\Box'\lambda = \bar\partial\varphi = 0 .$$

D'après le corollaire ci-dessus on a

$$\theta\bar\partial\lambda = 0,$$

ainsi que

$$\varphi = \bar\partial\theta\lambda = \bar\partial\psi$$

avec

$$\psi = \theta\lambda \in C^{p,q-1}(X, E) \cap L^{p,q-1}(X,E).$$

C. Q. F. D.

Puisque $\mathfrak{D}^{p,q}(X,E) \subset L^{p,q}(X,E)$ on déduit de la Proposition précédente, à l'aide de l'isomorphisme de Dolbeault (n.1.1) :

THEOREME. *Si E est $W^{p,q}$-elliptique par rapport à (une métrique sur les fibres de E et à) une métrique hermitienne complète sur X, l'homomorphisme canonique*

$$H_k^q(X, \Omega^p(E)) \to H^q(X, \Omega^p(E))$$

de la cohomologie à supports compacts dans la cohomologie à supports fermés est l'homomorphisme nul.

2. Conditions suffisantes pour la W-ellipticité.

2.1. On supposera dans les paragraphes 2-3 que la métrique hermitienne choisie dans X soit kählérienne. La forme fondamentale

$$\omega = \sqrt{-1}\, g_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z^\beta}$$

de la métrique définit les deux opérateurs

$$L : C^{p,q}(X,E) \to C^{p+1,q+1}(X,E)$$

$$\Lambda : C^{p,q}(X,E) \to C^{p-1,q-1}(X,E)$$

par les formules

$$L\varphi = \omega \wedge \varphi, \Lambda\varphi = (-1)^{p+q} * L * \varphi \qquad (\varphi \in C^{p,q}(X,E)).$$

Ces deux opérateurs transforment formes à support compact en formes à support compact. Ils sont liés par les identités

$$(L\Lambda - \Lambda L)\varphi = (p+q-n)\varphi, \ A(L\varphi, \psi) = A(\varphi, \Lambda\psi)$$

$$(\varphi \in C^{p,q}(X,E), \psi \in C^{p+1,q+1}(X,E)).$$

Il résulte de la condition de Kähler que

$$\sqrt{-1}\,(\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda) = \overline{\theta}\,^{(1)}.$$

En appliquant cette identité à $\# \varphi$ on obtient

$$\sqrt{-1}\,(\tilde{\partial}\Lambda - \Lambda\tilde{\partial}) = \theta.$$

Par conséquent on a pour $\square'$ et $\square''$ les expressions suivantes

$$\square' = \sqrt{-1}\,(\overline{\partial}\tilde{\partial}\Lambda - \Lambda\overline{\partial}\tilde{\partial} + \tilde{\partial}\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda\tilde{\partial})$$

$$\square'' = \sqrt{-1}\,(\tilde{\partial}\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda\tilde{\partial} + \Lambda\overline{\partial}\tilde{\partial} - \tilde{\partial}\overline{\partial}\Lambda)$$

---

(1) Cette formule, classique dans le cas où E est le fibré trivial (cf., par exemple, [14], p.44), est vérifiée pour tout E, puisque les deux opérateurs $\overline{\partial}$ et $\overline{\theta}$, ainsi que Λ, ne dépendent pas de la métrique sur les fibres de E.

et par la formule (8),

$$\square'' - \square' = \sqrt{-1}\,(\Lambda\, e(s) - e(s)\,\Lambda\,).\;^{(1)} \tag{11}$$

Puisque, si $\varphi \in \mathfrak{D}^{p,q}(X, E)$

$$(\square''\varphi, \varphi) = (\tilde{\partial}\varphi, \tilde{\partial}\varphi) + (\overline{\theta}\varphi, \overline{\theta}\varphi) \geq 0$$

on déduit de (11) le lemme suivant :

LEMME. *Si* $\varphi \in \mathfrak{D}^{p,q}(X, E)$ *on a*

$$\sqrt{-1}((e(s)\Lambda - \Lambda\; e(s))\varphi, \varphi) \leq (\overline{\partial}\varphi, \overline{\partial}\varphi) + (\theta\varphi, \theta\varphi).$$

2.2. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur X. F est défini par rapport à un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X par un système $\{f_{ij}\}$ de fonctions de transition *scalaires* holomorphes

$$f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbf{C}^*.$$

Une métrique sur les fibres de F sera donnée localement sur U_i par un produit scalaire

$$b_i\, \xi_i\, \overline{\eta}_i \qquad\qquad (\xi_i, \eta_i \in \mathbf{C})$$

dont le coefficient b_i est une fonction *scalaire* positive, C^∞ sur U_i.

La forme de courbure χ d'une telle métrique est donnée sur U_i par la (5) qui devient

$$\chi_i = \overline{\partial}\partial\; log\; b_i.$$

Il résulte de (7) que

$$\chi_i = \chi_j \qquad\qquad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

Puisque b_i est réel on a

$$\overline{\sqrt{-1}\,\chi} \quad = \quad \sqrt{-1}\,\chi\,.$$

Donc $\sqrt{-1}\,\chi$ est une forme réelle scalaire sur X, de type (1,1), de classe C^∞ et d-fermée.

DEFINITION. *On dira que le fibré* F *est positif (positif et complet) si on peut choisir la métrique sur les fibres de* F *de telle façon que si* χ *dénote la forme de courbure correspondante* $-\sqrt{-1}\,\chi$ *soit la forme fondamentale d'une métrique kählerienne (complète) sur* X. *Nous dirons parfois que* χ *est positive (resp. positive et complète).*

En posant

$$\omega = \sqrt{-1}\;\chi$$

---

(1) Cf. [2] , pp. 482-483.

on a

$$\sqrt{-1}\, e(\chi) = L .$$

Par conséquent :

(12) $\sqrt{-1}\,(e(\chi)\Lambda - \Lambda\, e(\chi))\,\varphi = (L\Lambda - \Lambda L)\,\varphi = (p+q-n)\,\varphi \qquad (\varphi \in C^{p,q}(X, F))$.

Il résulte du lemme précédent le

LEMME. *Si F est positif, F est $W^{p,q}$-elliptique lorsque $p+q>n$.*

2.3. Considérons le fibré $F^k \otimes E$, où k est un entier ≥ 0 et F^k est la puissance tensorielle k-ième de F. Les formes hermitiennes locales ${}^t\overline{\eta}_i(b_i^k \otimes h_i)\xi_i$ $(\xi_i, \eta_i \in \mathbf{C}^m)$ définissent une métrique sur les fibres de $F^k \otimes E$. La forme de courbure correspondante $t(k)$ est donnée par les formes locales

$$t_i(k) = k\chi_i \otimes I^m + s_i .$$

On déduit alors de cette formule, de la (12) et du lemme du n.2.1. le

LEMME. *Si F est positif par rapport à la métrique $\{b_i \zeta_i \overline{\zeta}_i\}$ et si on prend comme forme fondamentale de la métrique kählerienne sur X, la forme $\sqrt{-1}\,\chi = \{\sqrt{-1}\,\overline{\partial}\partial \log b_i\}$, on a pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}^{p,q}(X, F^k \otimes E)$*

(13) $k(p+q-n)(\varphi, \varphi) + \sqrt{-1}((e(s)\Lambda - \Lambda e(s))\varphi, \varphi) \leq (\overline{\partial}\varphi, \overline{\partial}\varphi) + (\theta\varphi, \theta\varphi)$.

2.4. Supposons que la variété complexe X soit un ouvert relativement compact d'une variété complexe M, et que le fibré E soit la restriction à X d'un fibré vectoriel holomorphe E' de rang m sur M. On supposera aussi que la métrique choisie sur les fibres de E soit la restriction à X d'une métrique sur les fibres de E'.

LEMME. *Il existe une constante réelle $l \leq 0$ telle que, pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}^{n,q}(X, F^k \otimes E)$ on ait :*

$$\sqrt{-1}\,(e(t(k)\,\varphi)\Lambda\,\varphi, \varphi) \geq l\,(\varphi, \varphi)$$

La constante l dépend, de la métrique kählerienne de X, des métriques choisies sur les fibres de F sur X, et de E' sur M.

PREUVE. Soit $A_{F^k \otimes E}(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ la *longueur* (n.1.4) de la forme $\varphi \in C^{p,q}(X, F^k \otimes E)$ au point $x \in X$.

Si $A_E(\psi, \psi)^{\frac{1}{2}}$ est la longueur, au point $x \in X$, de la forme $\psi \in C^{p,q}(X, E)$, on a alors, dans $U_i \cap X$,

$$A_{F^k \otimes E}(\varphi, \varphi) = b_i^k A_E(\varphi, \varphi) \qquad (\varphi \in C^{n,q}(X, F^k \otimes E).$$

$\overline{X}$ étant compact on peut supposer qu'un nombre fini d'ouverts U_i seulement ont une intersection non vide avec $\overline{X}$. Puisque la forme de courbure s est la restriction à X d'une forme définie sur M, il existe une constante $l_o > 0$ telle que pour tout $x \in X$ et pour chaque (p, q)-forme ψ on ait :

$$A_E(e(s)\psi, e(s)\psi) \leq l_o A_E(\psi, \psi).$$

Donc, on a pour chaque forme $\varphi \in C^{n,q}(X, F^k \otimes E)$

$$A_{F^k \otimes E}(e(s)\Lambda\varphi, e(s)\Lambda\varphi) \leq l_o A_{F^k \otimes E}(\Lambda\varphi, \Lambda\varphi) = l_o A_{F^k \otimes E}(L\Lambda\varphi, \varphi) =$$
$$= q\, l_o A_{F^k \otimes E}(\varphi, \varphi).$$

On conclut que, pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}^{n,q}(X, F^k \otimes E)$,

$$\sqrt{-1}(e(s)\Lambda\varphi, \varphi) \geq -|(e(s)\Lambda\varphi, \varphi)| \geq -\frac{1}{2}\|e(s)\Lambda\varphi\|^2 - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2$$
$$\geq -\frac{1}{2}(q\, l_o + 1)\|\varphi\|^2 = l\,\|\varphi\|^2$$

où

$$l = -2(q l_o + 1).$$ C.Q.F.D.

Supposons qu'il existe sur les fibres de F une métrique dont la forme de courbure χ soit positive et complète. En prenant $\sqrt{-1}\chi$ comme forme fondamentale d'une métrique kählérienne complète sur X, on déduit de la Proposition du n.1.7, en égard au lemme ci-dessous et à l'inégalité (13), la

PROPOSITION. *Si F est positif et complet sur l'ouvert $X \subset\subset M$ il existe un entier k_o tel que, tout $k \geq k_o$ et pour chaque forme $\overline{\partial}$-fermée*

$$\varphi \in C^{n,q}(X, F^k \otimes E) \cap L^{n,q}(X, F^k \otimes E)$$

avec $q > 0$, il existe une forme

$$\psi \in C^{n,q-1}(X, F^k \otimes E) \cap L^{n,q-1}(X, F^k \otimes E)$$

telle que

$$\varphi = \overline{\partial}\psi.$$

Le fibré T^p des p-covecteurs holomorphes sur X est la restriction à X du fibré des p-covecteurs holomorphes sur M.

On a l'isomorphisme canonique

$$\Omega^p(F^k \otimes E) \approx \Omega^n(F^k \otimes E \otimes T^p \otimes T^{n*})$$

En appliquant aux fibrés F et $E \otimes T^p \otimes T^{n*}$ la proposition ci-dessus on obtient le

THEOREME. *Si F est positif et complet sur l'ouvert $X \subset\subset M$, il existe un entier k_1 tel que pour tout entier $k \geq k_1$ et pour chaque forme $\bar\partial$-fermée*

$$\varphi \in C^{p,q}(X, F^k \otimes E) \cap L^{p,q}(X, F^k \otimes E)$$

avec $q > 0$, il existe une forme

$$\psi \in C^{p,q-1}(X, F^k \otimes E) \cap L^{p,q-1}(X, F^k \otimes E)$$

telle que

$$\varphi = \bar\partial \psi.$$

En particulier l'homomorphisme canonique

$$H^q_k(X, \Omega^p(F^k \otimes E)) \to H^q(X, \Omega^p(F^k \otimes E))$$

est l'homomorphisme nul pour $q = 1, 2, \dots, n = \dim_{\mathbf{C}} X$.

2.5. Si la variété X admet une métrique kählérienne avec un potentiel Φ global et C^∞,

$$ds^2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^\alpha \partial \overline{z^\beta}} dz^\alpha \overline{dz^\beta},$$

$e^{-\Phi}$ peut être envisagée comme une métrique sur les fibres du fibré trivial. On obtient alors le

COROLLAIRE. *Si l'ouvert $X \subset\subset M$ admet une métrique kählérienne complète avec un potentiel global C^∞, et si E est la restriction à X d'un fibré holomorphe de rang m sur M, pour chaque forme $\bar\partial$-fermée*

$$\varphi \in C^{p,q}(X, E) \cap L^{p,q}(X, E)$$

avec $q > 0$, il existe une forme

$$\psi \in C^{p,q-1}(X, E) \cap L^{p,q-1}(X, E)$$

telle que

$$\varphi = \bar\partial \psi.$$

En particulier l'homomorphisme naturel

$$H^q_k(X, \Omega^p(E)) \to H^q(X, \Omega^p(E))$$

est nul pour $q = 1, \dots, n$.

3. Résolution globale d'un faisceau analytique localement libre.

3.1. Soit U la boule unitaire de $\mathbf{C}^n$: $U = \{ z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbf{C}^n \mid \Sigma\, z^\alpha \overline{z^\alpha} < 1 \}$.

Considérons dans le produit $U \times P_{n-1}(\mathbf{C})$ la sous-variété

$$D = \{ (z, t) \in U \times P_{n-1}(\mathbf{C}) \mid z^\beta t^\alpha, \ (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \}$$

où $z = (z^1, \ldots, z^n)$, $t = (t^1, \ldots, t^n)$, $t^1, \ldots, t^n$ étant les coordonnées homogènes dans $P_{n-1}(\mathbf{C})$. D est une variété complexe régulièrement plongée dans $U \times P_{n-1}(\mathbf{C})$. D contient l'espace projectif $S = \{0\} \times P_{n-1}(\mathbf{C})$. La projection canonique $U \times P_{n-1}(\mathbf{C})$ induit une application holomorphe $\pi : D \to U$ qui est bi-holomorphe sur $U - \{0\}$ et telle que $\pi^{1}(0) = S$. S est un diviseur de D.

Soit $\{S\}$ le fibré holomorphe en droites complexes associé au diviseur S. Soit $c(\{S\}) \in H^2(D, \mathbf{Z})$ la classe de Chern de $\{S\}$ et $c_{\mathbf{R}}(\{S\}) \in H^2(D, \mathbf{R})$ l'image de $c(\{S\})$ par l'homomorphisme canonique $H^2(D, \mathbf{Z}) \to H^2(D, \mathbf{R})$.

LEMME. *Soit $\rho(r)$ une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$ telle que $\rho(r) = 1$ lorsque $r \leq \frac{1}{2}$, $1 \geq \rho(r) \geq 0$ pour $\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3}$ et $\rho(r) = 0$ lorsque $r \geq \frac{2}{3}$.*

Soit $|z| = (\Sigma z^\alpha \overline{z^\alpha})^{\frac{1}{2}}$. Considérons sur $U - \{0\}$ la forme

$$-\sigma_o = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \overline{\partial} (\rho(|z|) \log |z|^2).$$

La forme $-\tilde{\sigma}_o = -\pi^* \sigma_o$ prolongée par continuité à S est une forme C^∞ d-fermée à support compact, qui appartient à $c_{\mathbf{R}}(\{S\})$(1).

La restriction de $-\sqrt{-1}\, \tilde{\sigma}_o$ à S est la forme fondamentale de la métrique de Fubini.

3.2. Soit U un ouvert de coordonnées voisinage d'un point x de la variété complexe X. En remplaçant U par D et en identifiant $U - x$ à $D - S$ à l'aide de l'application $\pi : D \to U$ on déduit de X une variété $\tilde{X}$ pour laquelle il existe une application holomorphe $\pi : \tilde{X} \to X$ de $\tilde{X}$ sur X qui est biholomorphe sur $X - x$ et telle que $\pi^{1}(x) = S$.

L'application inverse

$$Q_x = \pi^{1}$$

s'appelle une *transformation quadratique* de centre x.

3.3. Reprenant les considérations des nn. 2.4-2.5 supposons que la variété X soit un ouvert relativement compact d'une variété complexe M. Soit E' un fibré vectoriel holomorphe, de rang m, sur M et soit E sa restriction à X. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur X. Le faisceau $\Omega(F^k \otimes E)$ des germes de sections holomorphes du fibré $F^k \otimes E$ est un faisceau analytique localement libre sur X. Soit $\Gamma(X, \Omega(F^k \otimes E))$ l'espace vectoriel des sections globales de $(F^k \otimes E))$. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X.

---

(1) Pour la démonstration cf. [1], Lemme 10, pp. 299-300.

Cf. aussi [11], pp. 31-32.

THEOREME. *Si F est positif et complet pour chaque point $x \in X$ il existe un entier $k_o = k_o(x)$ tel que si $k \geq k_o(x)$, la fibre $(F^k \otimes E)_x$ de $F^k \otimes E$ au point x soit engendrée par un nombre fini de sections de $\Gamma(X, \Omega(F^k \otimes E))$. En d'autres termes pour $k \geq k_o$, il existe un nombre fini d'éléments de $\Gamma(X, \Omega(F^k \otimes E))$ qui engendrent $\Omega_x(F^k \otimes E)$.*

PREUVE. Soit $\tilde{X} = Q_x(X)$ et $\tilde{M} = Q_x(M)$. $\tilde{X}$ est un ouvert relativement compact de $\tilde{M}$.

Si $\tilde{F} = \pi^* F$ et $\tilde{E} = \pi^* E$ sont les fibrés holomorphes induits par π sur $\tilde{X}$, $\tilde{E}$ est la restriction à $\tilde{X}$ du fibré $\pi^* E'$ induit par π sur $\tilde{M}$.

Considérons sur $\tilde{X}$ la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \Omega(\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1} \otimes \tilde{E}) \to \Omega(\tilde{F}^k \otimes \tilde{E}) \xrightarrow{r} \Omega(\tilde{F}^k \otimes E)|_S \to 0$$

où r est l'homorphisme de restriction et $S = \tilde{\pi}^1(x)$.

Dans la suite exacte de cohomologie

$$0 \to \Gamma(X, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1} \otimes \tilde{E})) \to \Gamma(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^k \otimes E)) \xrightarrow{r^*}$$
$$\to \Gamma(S, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \tilde{E})) \xrightarrow{\delta} H^1(\tilde{X}, \{S\}^{-1} \otimes \tilde{E}) \to ..$$

l'homomorphisme δ peut être factorisé comme produit de deux homomorphismes

$$\Gamma(S, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \tilde{E})) \to H^1_k(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1} \otimes \tilde{E})) \to H^1(\tilde{X}, \{s\}^{-1} \otimes \tilde{E})$$

dont le premier est l'homomorphisme cobord pour la cohomologie à supports compacts et le deuxième est l'application naturelle de la cohomologie à supports compacts dans la cohomologie à supports fermés.

On va démontrer que $\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1}$ est positif et complet lorsque $k >> 0$.

Si χ est la forme de courbure d'une métrique sur les fibres de F, on peut supposer que $\sqrt{-1}\,\chi$ soit la forme fondamentale d'une métrique kählérienne sur X. Si $\tilde{\chi} = \pi^* \chi$ est la forme induite par χ sur $\tilde{X}$, $k\tilde{\chi} + \tilde{\sigma}_x$ est la forme de courbure d'une métrique sur les fibres de $\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1}$.

Dans $D, \sqrt{-1}\,\tilde{\sigma}_x$ induit sur S la forme fondamentale de la métrique de Fubini. D'ailleurs, si $k > 0$, $\sqrt{-1}\,k\chi$ définit une métrique kählérienne dans U. Puisque D est régulièrement plongée dans $U \times P_{n-1}(\mathbf{C})$, $\sqrt{-1}(k\tilde{\chi} + \tilde{\sigma}_x)$ définit, pour $k >> 0$ une métrique kählérienne sur D.

Puisque $\tilde{\sigma}$ est à support compact, la métrique kählérienne définie par $\sqrt{-1}(k\chi + \tilde{\sigma}_x)$ sur $\tilde{X}$ est complète. Donc, d'après le théorème du n.2.4 il existe un entier $k_o = k_o(x)$ tel que, si $k \geq k_o(x)$ l'image de r est zéro.

Donc, si $k > k_o$ on a la suite exacte

$$0 \to \Gamma(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1} \otimes \tilde{E}) \to \Gamma(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \tilde{E})) \to \Gamma(S, \Omega_S(\tilde{F}^k \otimes \tilde{E})) \to 0$$

On peut choisir le voisinage U de x assez petit pour que $F^k \otimes E$ soit trivial sur U. Par conséquent

$$\Gamma(S, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \tilde{E})) \approx \mathbf{C}^m.$$

D'ailleurs $\pi: \tilde{X} \to X$ induit un isomorphisme

$$\Gamma(X, \Omega(F^k \otimes E)) \stackrel{\sim}{\to} \Gamma(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \tilde{E})).$$

Cela résulte (pour $n > 1$) du fait qu'une fonction holomorphe et continue en dehors d'un point est holomorphe sur ce point. La démonstration du théorème est achevée.

REMARQUES. La démonstration du théorème est copiée d'un morceau de la démonstration du théorème de Kodaira sur le plongement des variétés de Hodge dans un espace projectif (cf. [11], pp. 34-36).

On peut compléter l'analogie et démontrer, suivant les lignes de la démonstration de Kodaira (cf. aussi [1], pp. 299-304), que, si F est positif et complet sur l'ouvert $X \subset\subset M$, pour chaque partie $Y \subset\subset X$ il existe un entier $k \geq k_o(Y)$ tel que, si $k \geq k_o$, $F^k \otimes E$ soit induit sur Y par une application biholomorphe de Y sur un ensemble relativement compact de la grassmannienne complexe $G(m, N)$ des sous-espaces vectoriels complexes de dimension m d'un $\mathbf{C}^N$, avec $N >> 0$.

3.4. Soit $\mathcal{O}^d$ la somme directe de d exemplaires de $\mathcal{O}$.

Supposons qu'il existe sur X une métrique kählérienne complète avec un potentiel global. D'après le théorème du n.3.3, pour chaque partie $Y \subset\subset X$ il existe un entier positif d et, sur Y, un homomorphisme du faisceau $\mathcal{O}^d$ *sur* le faisceau $\Omega(E)$.

Il en résulte le

THEOREME. *S'il existe sur l'ouvert $X \subset\subset M$ une métrique kählérienne complète avec un potentiel global, pour chaque sous-ensemble $Y \subset\subset X$, $\Omega(E)$ admet sur Y une résolution*

$$\mathcal{O}^{d_{2n-1}} \to \mathcal{O}^{d_{2n-2}} \to \dots \to \mathcal{O}^{d_o} \to \Omega(E) \to 0.$$

4. Résolution d'un faisceau cohérent sur un cube fermé de $\mathbf{C}^n$.

4.1. Soient $z_\alpha = x_\alpha + i\, x_{n+\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq n$, les coordonnées dans $\mathbf{C}^n$.

Envisageons le cube fermé :

$$\hat{Q} = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid \ |x_\alpha| \leq A_\alpha > , 1 \leq \alpha \leq 2n \}.$$

D'après un lemme de Grothendieck [1] on sait que toute forme différentielle ω de type $(0, p)$ définie dans un voisinage de $\overline{Q}$ et $\overline{\partial}$ - fermée, $\overline{\partial}\omega = 0$, peut s'écrire sur un voisinage de $\overline{Q}$ comme le $\overline{\partial}$ d'une forme ρ de type $(0, p-1)$:

$$\omega = \overline{\partial}\rho \qquad\qquad (p > 0).$$

Du théorème de Dolbeault (n.1.1) on déduit que pour le faisceau $\mathcal{O}$ des germes des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ on a :

$$H^p(\overline{Q}, \mathcal{O}) = 0 \text{ si } p > 0.$$

Soit E un fibré vectoriel holomorphe défini sur un voisinage U de $\overline{Q}$. On peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que le cube ouvert $Q_\varepsilon = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid |x_\alpha| < A_\alpha + \varepsilon,\ 1 \leq \alpha \leq 2n \}$ soit contenu et relativement compact dans U. Sur Q_ε on a une métrique kählérienne complète avec potentiel global, à savoir la métrique de Bergman [2]. D'après le théorème du n.3.4 on en déduit que sur un voisinage de $\overline{Q}$ on a une résolution du type :

$$\mathcal{O}^{d_{2n-1}} \xrightarrow{\alpha_{2n-1}} \ldots \to \mathcal{O}^{d_o} \xrightarrow{\alpha_o} \Omega(E) \to 0.$$

En particulier on en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION. *Pour tout fibré vectoriel holomorphe E défini sur un voisinage de $\overline{Q}$ on a :*

$$H^p(\overline{Q}, \Omega(E)) = 0 \quad si \quad p > 0.$$

PREUVE. Soit $\mathcal{G}_{i+1} = Ker\ \alpha_i$, $0 \leq i \leq 2n-1$, du fait que $H^p(\overline{Q}, \mathcal{O}) = 0$ si $p > 0$ on déduit :

$$H^p(\overline{Q}, \Omega(E)) \simeq H^{p+1}(\overline{Q}, \mathcal{G}_1) \simeq \ldots \simeq H^{p+2n}(\overline{Q}, \mathcal{G}_{2n}).$$

Ce dernier groupe est nul car la dimension de Lebesgue de $\overline{Q}$ est $= 2n$.

4.2. Nous voulons démontrer le théorème suivant :

THEOREME. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent défini sur un voisinage de $\overline{Q}$. Alors sur un voisinage convenable de $\overline{Q}$ on a une suite exacte du type*

$$\mathcal{O}^{d_{2n-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{d_o} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Donc, en particulier, on aura

$$H^p(\overline{Q}, \mathcal{F}) = 0 \text{ si } p > 0.$$

On démontre d'abord le lemme de recollement suivant :

LEMME. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur un voisinage de $\overline{Q}$.*

Posons, pour $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < a_1$:

---

[1] Voir pour la démonstration [6], Exposé 18 ou bien B. Malgrange [12] p. 54-57.

[2] Q_ε est analytiquement équivalent au polycylindre unité $P = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid |z_\alpha| < 1,\ 1 \leq \alpha \leq n^2 \}$. Sur P le potentiel de la métrique est donné par la fonction

$$log \prod_{\alpha=1}^{n} (1 - z_\alpha \overline{z}_\alpha)^{-1}.$$

$$\overline{Q}_1 = \{ z \in \overline{Q} \mid x_1 \leq \varepsilon \}$$
$$\overline{Q}_2 = \{ z \in \overline{Q} \mid x_1 \geq -\varepsilon \}$$

Supposons que sur un voisinage U_i *de* $\overline{Q}_i$, $i = 1, 2$, *on ait un homomorphisme surjectif* α_i :

$$\mathcal{O}^{p_i} \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{F}$$

de sorte que, pour $i = 1, 2$, *les homomorphismes*

$$\Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}^{p_i}) \to \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{F})$$

soient surjectifs.

Alors il existe un fibré vectoriel holomorphe E *sur un voisinage de* $\overline{Q}$ *et sur ce voisinage un homomorphisme surjectif*

$$\Omega(E) \to \mathcal{F}.$$

PREUVE. Soit s_j l'image par α_1 de la section $(0, \ldots, \underset{(j)}{1}, \ldots, 0)$ de $\mathcal{O}^{p_1}$, $1 \leq j \leq p_1$. De même soit t_k l'image de la section $(0, \ldots, \underset{(k)}{1}, \ldots, 0)$ de $\mathcal{O}^{p_2}$ par α_2, $1 \leq k \leq p_2$.

Sur $U_1 \cap U_2$ on aura, en vertu de l'hypothèse

$$s_j |_{U_1 \cap U_2} = \Sigma\, a_{jk}\, t_k |_{U_1 \cap U_2}$$
$$t_k |_{U_1 \cap U_2} = \Sigma\, b_{kj}\, s_j |_{U_1 \cap U_2}$$

avec des a_{jk}, b_{kj} holomorphes sur $U_1 \cap U_2$.

Soit $a = (a_{jk})$, $b = (b_{kj})$ et posons sur $U_1 \cap U_2$:

$$c = \begin{pmatrix} -I & a \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ b & I \end{pmatrix}$$

Si $s = {}^t(s_1, \ldots, s_{p_1})$, $t = {}^t(t_1, \ldots, t_{p_2})$ on aura sur $U_1 \cap U_2$:

$$c \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Considérons l'application holomorphe

$${}^tc^{-1} : U_1 \cap U_2 \to GL(p_1 + p_2, \mathbf{C})$$

comme fonction de transition d'un fibré holomorphe E de rang $p_1 + p_2$ sur $U_1 \cap U_2$. Le faisceau $\Omega(E)$ est alors obtenu par recollement des faisceaux $\mathcal{O}^{p_1 + p_2} |_{U_i}$ selon l'homomorphisme

$$\beta^{(i)} = {}^tc^{-1} \quad \beta^{(i)} ,$$

$\beta^{(i)} = {}^t(\beta^{(i)}_1, \ldots, \beta^{(i)}_{p_1 + p_2})$ étant un germe de section de $\mathcal{O}^{p_1 + p_2}|_{U_i}$. L'application $\mu_i : \mathcal{O}^{p_1 + p_2} |_{U_i} \to \mathcal{F}$ obtenue en composant la projection naturelle $\mathcal{O}^{p_1+p_2}_{|U_i} \to \mathcal{O}^{p_i}_{|U_i}$ avec l'homomorphisme α_i pour $i = 1, 2$ nous définit alors un homomorphisme surjectif de $\Omega(E)$ sur $\mathcal{F}$ dans $U_1 \cup U_2$.

DEMONSTRATION DU THEOREME. α) Remarquons d'abord que pour tout point x dans l'ouvert de définition de $\mathcal{F}$ on peut trouver un voisinage $U(x)$ sur lequel on ait une suite exacte

$$\mathcal{O}^{d_{2n}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{d_o} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Ceci découle de la définition de faisceau cohérent et du fait que le noyau d'un homomorphisme de faisceaux cohérents est cohérent.

Si $\mathcal{G}$ est le noyau de l'homomorphisme $\mathcal{O}^{d_o} \to \mathcal{F}$, pour tout cube fermé $\overline{P} \subset U(x)$ on aura $H^1(\overline{P}, \mathcal{G}) = 0$ (cf. le raisonnement de la proposition du n.4.1). Donc sur $\overline{P}$ on a un homomorphisme surjectif $\Gamma(\overline{P}, \mathcal{O}^{d_o}) \to \Gamma(\overline{P}, \mathcal{F})$.

β) Du lemme de Borel-Lebesgue et du lemme de recollement ci-dessus, on déduit alors en vertu de la remarque précédente l'énoncé suivant :

"Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent défini dans un voisinage U de l'intervalle fermé

$$|x_1| \leq a_1, \quad x_\alpha = 0 \text{ pour } 2 \leq \alpha \leq 2n.$$

On peut trouver un cube

$$\overline{Q}' = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |x_1| \leq a_1, |x_\alpha| \leq \varepsilon, 2 \leq \alpha \leq 2n\} \subset U,$$

un fibré vectoriel holomorphe E sur un voisinage de $\overline{Q}'$, et sur ce voisinage un homomorphisme surjectif

$$\sigma : \Omega(E) \to \mathcal{F} \text{."}$$

γ) Comme le noyau de σ est un faisceau cohérent, par application itérée de l'énoncé β) on obtient l'énoncé suivant :

"Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent défini dans un voisinage U de l'intervalle fermé

$$|x_1| \leq a_1, \; x_\alpha = 0 \text{ pour } 2 \leq \alpha \leq 2n.$$

On peut trouver un cube

$$\overline{Q}' = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |x_1| \leq a_1, |x_\alpha| \leq \varepsilon, 2 \leq \alpha \leq 2n\} \subset U,$$

une suite $E_o, \ldots, E_{2n}$ de fibrés vectoriels holomorphes sur un voisinage de $\overline{Q}'$ et, sur ce voisinage une suite exacte d'homomorphismes :

$$\Omega(E_{2n}) \to \Omega(E_{2n-1}) \to \ldots \to \Omega(E_o) \to \mathcal{F} \to 0."$$

En particulier, en vertu de la proposition 4.1, pour tout cube fermé $\overline{P}$ contenu dans un voisinage convenable de $\overline{Q}'$ on aura un homomorphisme surjectif $\Gamma(\overline{P},\Omega(E_o)) \to \Gamma(\overline{P},\mathcal{F})$. Finalement, par application du théorème 3.4, on peut trouver un entier d_o et un homomorphisme surjectif

$$\mathcal{O}^{d_o} \to \mathcal{F}$$

sur un voisinage convenable de $\overline{Q}'$ tel que, pour tout cube fermé $\overline{P}$ contenu dans le voisinage envisagé de $\overline{Q}'$, l'homomorphisme $\Gamma(\overline{P},\mathcal{O}^{d_o}) \to \Gamma(\overline{P},\mathcal{F})$ soit surjectif.

δ) Du lemme de Borel-Lebesgue et du lemme de recollement on déduit alors l'énoncé suivant :

"Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent défini dans un voisinage U du carré fermé

$$|x_1| \leq a_1, \ |x_2| \leq a_2, \ x_\alpha = 0 \ \text{pour} \ 3 \leq \alpha \leq 2n.$$

On peut trouver un cube

$$\overline{Q}'' = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |x_1| \leq a_1, \ |x_2| \leq a_2, \ |x_\alpha| \leq \varepsilon, \ 3 \leq \alpha \leq 2n\} \subset U,$$

une suite $E_o, \ldots, E_{2n}$ de fibrés vectoriels holomorphes sur un voisinage de $\overline{Q}''$ et, sur ce voisinage, une suite exacte d'homomorphismes

$$\Omega(E_{2n}) \to \Omega(E_{2n-1}) \to \ldots \to \Omega(E_o) \to \mathcal{F} \to 0."$$

Comme tout à l'heure, on peut trouver un entier d_o et un homomorphisme surjectif

$$\mathcal{O}^{d_o} \to \mathcal{F}$$

sur un voisinage convenable de $\overline{Q}''$ tel que pour tout cube fermé $\overline{P}$ contenu dans ce voisinage de $\overline{Q}''$ l'homomorphisme $\Gamma(\overline{P},\mathcal{O}^{d_o}) \to \Gamma(\overline{P},\mathcal{F})$ soit surjectif.

L'itération de ce procédé $2n$ fois nous démontre que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ défini sur un voisinage de $\overline{Q}$ on peut trouver un entier d_o et un homomorphisme surjectif

$$\mathcal{O}^{d_o} \to \mathcal{F}$$

sur un voisinage de $\overline{Q}$. De là résulte aisément le théorème.

5. Les théorèmes A et B pour les espaces holomorphiquement complets.

5.1. a) Soit X un espace topologique paracompact. Soit $\{B_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ une suite d'ouverts (ou de fermés) de X tels que

$$B_\nu \subset \overset{o}{B}_{\nu+1}, \quad X = \cup B_\nu,$$

PROPOSITION. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et supposons que pour tout entier ν on ait:*

$$H^q(B_\nu, \mathcal{F}) = 0, \quad H^{q+1}(B_\nu, \mathcal{F}) = 0$$

pour un certain $q \geq 1$. *Alors on a*

$$H^{q+1}(X, \mathcal{F}) = 0.$$

PREUVE. Envisageons une résolution flasque de $\mathcal{F}$ sur X ([8], p. 147-149, 167-168)

$$0 \to \mathcal{F} \to C^o \overset{\delta}{\to} C^1 \overset{\delta}{\to} C^2 \to \dots$$

de sorte que pour tout sous-espace ouvert ou fermé $Y \subset X$ la cohomologie de Y à valeurs dans $\mathcal{F}$ s'identifie à celle du complexe $(\bigoplus_{q=o}^{\infty} \Gamma(Y, C^q), \delta_*)$.

Soit $\xi \in H^{q+1}(X, \mathcal{F})$. Représentons ξ par un élément $z \in \Gamma(X, C^{q+1})$, $\delta_* z = 0$. Comme $H^{q+1}(B_\nu, \mathcal{F}) = 0$, pour chaque entier $\nu > 0$, il existe un élément $\eta_\nu \in \Gamma(B_\nu, C^q)$ tel que

$$z|B_\nu = \delta_* \eta_\nu.$$

Sur $B_{\nu-1}$, si $\nu \geq 2$, on aura $\delta_*(\eta_\nu - \eta_{\nu-1})|B_{\nu-1} = 0$ et comme $H^q(B_{\nu-1}, \mathcal{F}) = 0$ on peut trouver un élément $\gamma_{\nu-1} \in \Gamma(B_{\nu-1}, C^{q-1})$ tel que

$$\eta_\nu|B_{\nu-1} - \eta_{\nu-1} = \delta_* \gamma_{\nu-1}.$$

Comme le faisceau C^{q-1} est flasque, il existe un élément $\hat{\gamma}_\nu \in \Gamma(B_\nu, C^{q-1})$ tel que $\hat{\gamma}_\nu|B_{\nu-1} = \gamma_{\nu-1}$. L'élément $\eta'_\nu = \eta_\nu - \delta_* \hat{\gamma}_\nu \in \Gamma(B_\nu, C^{q-1})$ satisfait donc aux conditions :

$$z|B_\nu = \delta_* \eta'_\nu, \quad \eta'_\nu|B_{\nu-1} = \eta_{\nu-1}.$$

On peut donc choisir de proche en proche les éléments η_ν, $\nu = 1, 2, \dots$, de sorte que

$$z|B_\nu = \delta_* \eta_\nu, \quad \eta_{\nu+1}|B_\nu = \eta_\nu.$$

La collection de ces η_ν définit une section $\eta \in \Gamma(X, C^q)$ pour laquelle $z = \delta_* \eta$.

La proposition précédente ne donne aucune information sur le groupe $H^1(X, \mathcal{F})$. Pour cela on recourt à la proposition suivante :

PROPOSITION 2. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau de groupes abéliens sur* X. *Supposons qu'on puisse définir sur les espaces* $H^o(\overset{o}{B}_\nu, \mathcal{F})$ *des structures d'espaces vectoriels topologiques métrisables complets de sorte que les homomorphismes de restriction*

$$r_\nu : H^o(\overset{o}{B}_{\nu+1}, \mathcal{F}) \to H^o(\overset{o}{B}_\nu, \mathcal{F})$$

soient continus.

Alors si pour tout $\nu > 0$ *les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

α) $H^1(B_\nu, \mathcal{F}) = 0$,

β) *l'image de* r_ν *est dense dans* $H^o(\overset{o}{B}_\nu, \mathcal{F})$, *on a aussi*

$$H^1(X,\mathfrak{F})=0 .$$

PREUVE. Désignons par d une distance invariante par translations sur $H^o(\overset{o}{B}_\nu,\mathfrak{F})$, y définissant la topologie d'espace vectoriel métrisable complet envisagée.

Avec les mêmes notations que dans la proposition 1, soit $z\in\Gamma(X,C^1)$, $\delta_* z=0$ un représentant d'une classe de cohomologie $\xi\in H^1(X,\mathfrak{F})$. De l'hypothèse $H^1(\overset{o}{B}_\nu,\mathfrak{F})=0$ on déduit l'existence d'éléments $\eta_\nu\in\Gamma(\overset{o}{B}_\nu,C^o)$ tels que

$$z|\overset{o}{B}_\nu=\delta_*\eta_\nu ;$$

η_ν peut être altérée par l'addition d'une section de $\Gamma(\overset{o}{B}_\nu,\mathfrak{F})$. Comme $\delta_*(\eta_2-\eta_1)|\overset{o}{B}_1=0$ on aura $(\eta_2-\eta_1)|\overset{o}{B}_1\in\Gamma(\overset{o}{B}_1,\mathfrak{F})$. En vertu de l'hypothèse (β) on peut choisir η_2 de sorte que

$$d_1((\eta_2-\eta_1)|\overset{o}{B}_1)<1 .$$

Comme $\delta_*(\eta_3-\eta_2)|\overset{o}{B}_2=0$ on a $(\eta_3-\eta_2)|\overset{o}{B}_2\in\Gamma(\overset{o}{B}_2,\mathfrak{F})$ et on peut choisir η_3 de sorte que

$$d_2((\eta_3-\eta_2)|\overset{o}{B}_2)<1,\ d_1((\eta_3-\eta_2)|\overset{o}{B}_1)<\frac{1}{2} .$$

Comme $\delta_*(\eta_4-\eta_3)|\overset{o}{B}_3=0$ on a $(\eta_4-\eta_3)|\overset{o}{B}_3\in\Gamma(\overset{o}{B}_3,\mathfrak{F})$ et on peut choisir η_4 de sorte que

$$d_3((\eta_4-\eta_3)|\overset{o}{B}_3)<1,\ d_2((\eta_4-\eta_3)|\overset{o}{B}_2)<\frac{1}{2},\ d_1((\eta_4-\eta_3)|\overset{o}{B}_1)<\frac{1}{2^2}$$

Ainsi de suite on choisit les η_ν de proche en proche de sorte qu'on ait

$$d_h((\eta_{\nu-1}-\eta_\nu)|\overset{o}{B}_h)<\frac{1}{2^{\nu-h}}$$

pour $h\le\nu$.

Considérons sur $\overset{o}{B}_\nu$ la série :

$$(\eta_{\nu+1}-\eta_\nu)|\overset{o}{B}_\nu+(\eta_{\nu+2}-\eta_{\nu+1})|\overset{o}{B}_\nu+\ldots$$

dont chaque élément est une section de $\Gamma(\overset{o}{B}_\nu,\mathfrak{F})$. Cette série converge en distance dans $\Gamma(\overset{o}{B}_\nu,\mathfrak{F})$. Donc comme $\Gamma(\overset{o}{B}_\nu,\mathfrak{F})$ est complet elle définit une section $s_\nu\in\Gamma(\overset{o}{B}_\nu,\mathfrak{F})$.

Posons

$$\beta_\nu=\eta_\nu+s_\nu .$$

On aura

$$\beta_{\nu+1}|\overset{o}{B}_\nu=\beta_\nu$$

donc la collection des β_ν définit une section $\beta \in \Gamma(X, C^o)$. De plus comme l'homomorphisme δ_* commute avec les restrictions a $(\delta_* \beta)|\overset{o}{B}_\nu = z|\overset{o}{B}_\nu$ pour tout ν. De là on conclut que $\delta_* \beta = z$ sur X. Ceci achève la démonstration.

b) En particulier soit X le polycylindre ouvert

$$P = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid |z_\alpha| < 1,\ 1 \leq \alpha \leq n \}$$

et soit

$$P_\nu = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid |z_\alpha| < 1 - \frac{1}{\nu},\ 1 \leq \alpha \leq n \}.$$

Du lemme de Grothendieck on déduit que $H^q(\overline{P}_\nu, \mathcal{O}) = 0$ pour tout $\nu > 0$ et de plus les espaces $H^o(P_\nu, \mathcal{O})$, $H^o(P, \mathcal{O})$ munis de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts sont bien des espaces de Fréchet pour lequels les hypothèses de la proposition 2 sont vérifiées. On en conclut que $H^q(P, \mathcal{O}) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Du théorème du n.4.2 découle alors la

PROPOSITION 3. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent défini dans un voisinage U du polycylindre fermé $\overline{P}$. Alors on a sur le polycylindre ouvert P :*

$$H^q(P, \mathcal{F}) = 0 \text{ pour tout } q \geq 1 .$$

5.2. Soit X un espace complexe et Π un ouvert relativement compact dans X. On dira que Π est un *polyèdre analytique* s'il existe un voisinage U de $\overline{\Pi}$ dans X et un nombre fini de fonctions holomorphes f_i, $1 \leq i \leq k$, sur X tels que

$$\Pi = \{ x \in U \mid |f_i(x)| < 1 \}.$$

LEMME. *Si l'algèbre $\mathcal{H}(X)$ des fonctions holomorphes sur X sépare les points de X et donne des coordonnées locales en chaque point de X*[1], *alors pour tout polyèdre analytique Π dans X il existe un voisinage V de Π dans X et une application holomorphe $\varphi : X \to \mathbf{C}^N$ tels que*

i) φ applique isomorphiquement V sur un sous-ensemble analytique $\varphi(V)$ contenu dans un voisinage de la fermeture $\overline{P}$ du polycylindre

$$P = \{ z \in \mathbf{C}^N \mid |z_\alpha| < 1,\ 1 \leq \alpha \leq N \}$$

ii) $(\varphi|_V)^{-1}(P) = \Pi$.

PROPOSITION 4. *Si l'algèbre $\mathcal{H}(X)$ sépare les points et donne des coordonnées locales alors pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout polyèdre analytique Π dans X on a :*

$$H^q(\Pi, \mathcal{F}) = 0 \text{ pour } q \geq 1 .$$

---

[1] C'est-à-dire pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage $U(x)$ de x dans X et un nombre fini de fonctions $f_i \in \mathcal{H}(X)$, $1 \leq i \leq h_x$, telles que l'application de X dans $\mathbf{C}^{h_x}$ définie par les f_i donne un isomorphisme de $U(x)$ sur un ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbf{C}^{h_x}$

PREUVE. En vertu du lemme on peut supposer que Π soit la partie d'un sous-ensemble analytique A défini sur un voisinage U de $\overline{P}$ contenue dans P ; $\Pi = A \cap P$. Le faisceau $\hat{\mathfrak{F}}$, défini sur U par extension triviale de $\mathfrak{F}$ en dehors de A, est cohérent. Il suffit alors d'appliquer à $\hat{\mathfrak{F}}$ et P la proposition 3.

On appelle espace *holomorphiquement complet* (ou *espace de Stein*) un espace complexe X qui jouit des propriétés suivantes :

i) L'algèbre $\mathfrak{H}(X)$ sépare les points de X et donne des coordonnées locales en chaque point de X.

ii) L'espace X est holomorphiquement convexe i.e. pour tout compact $K \subset X$ l'enveloppe

$$\hat{K} = \{ x \in X \mid |f(x)| \leq \sup_{k \in K} |f(k)| \ \text{pour tout } f \in \mathfrak{H}(X) \}$$

est un ensemble compact.

Pour un espace complexe holomorphiquement convexe on établit le

LEMME. *Tout espace holomorphiquement convexe est réunion d'une suite* $\{\Pi_\nu\}_{\nu=1,2,..}$ *de polyèdres analytiques tels que* $\overline{\Pi}_\nu \subset \Pi_{\nu+1}$.

En particulier si X est holomorphiquement complet on aura pour les Π_ν

$$H^q(\Pi_\nu, \mathfrak{F}) = 0 \ \text{ si } q \geq 1$$

$\mathfrak{F}$ étant un faisceau analytique cohérent sur X. De la proposition 1 découle alors que l'on aura aussi

$$H^q(X, \mathfrak{F}) = 0 \ \text{ si } q \geq 2.$$

Le but de ce § est de démontrer le théorème suivant de H. Cartan et J.P. Serre:

THEOREME. *Pour tout espace holomorphiquement complet X et tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur X on a*

$$H^q(X, \mathfrak{F}) = 0 \qquad \text{pour } q \geq 1.$$

Pour cela il suffira de démontrer que pour la suite $\{\Pi_r\}$ de polyèdres analytiques du lemme précédent on peut introduire sur les espaces $H^o(\Pi_\nu, \mathfrak{F})$ des structures d'espaces vectoriels topologiques de façon à se placer dans les conditions de la proposition 2. Ce programme sera développé au § suivant où l'on établira d'abord l'existence d'une structure d'espace de Fréchet sur les groupes $H^o(\Pi_\nu, \mathfrak{F})$ et où l'on démontrera le théorème d'approximation correspondant à l'hypothèse β) de la proposition 2.

6. Le théorème d'approximation.

6.1. *Les espaces $\Gamma(\Pi, \mathcal{O})$ comme espaces vectoriels topologiques.*

a) Soit X un espace complexe sur lequel l'algèbre $\mathcal{H}(X)$ des fonctions holomorphes sépare les points et donne des coordonnées locales.

Soit Π un polyèdre analytique dans X et $\varphi: \Pi \to \mathbf{C}^N$ un plongement de Π comme sous-ensemble analytique d'un polycylindre P d'un espace numérique $\mathbf{C}^N$.

Soit $A = \varphi(\Pi)$ et soit $\mathcal{I}_A$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur P nulles sur A. $\mathcal{I}_A$ est un sous-faisceau d'idéaux du faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur P et le quotient $\mathcal{O}/\mathcal{I}_A$ s'identifie au faisceau $\mathcal{O}_A$ des germes de fonctions holomorphes sur A.

De la suite exacte de faisceaux cohérents sur P (1)

$$0 \to \mathcal{I}_A \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_A \to 0$$

en vertu de la proposition 4 on déduit la suite exacte

$$0 \to \Gamma(P, \mathcal{I}_A) \to \Gamma(P, \mathcal{O}) \to \Gamma(\Pi, \mathcal{O}) \to 0$$

car $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}) \simeq \Gamma(P, \mathcal{O}_A)$.

L'espace $\Gamma(P, \mathcal{O})$ des fonctions holomorphes sur P, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, est un espace de Fréchet. L'espace $\Gamma(P, \mathcal{I}_A)$ est un sous-espace vectoriel du précédent. En vertu d'un théorème de H. Cartan (2) ([4], Appendice I, 190-195) ce sous-espace est un sous-espace fermé de

---

(1) Le faisceau $\mathcal{I}_A$ est cohérent en vertu d'un théorème de H. Cartan [5], Théor. 2, p. 42-45; [6], Exposé XVI).

(2) Le théorème de H. Cartan dit ceci :
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ sur lequel on s'est donné un nombre fini de fonctions holomorphes $f^{(i)} : \Omega \to \mathbf{C}^p$. Pour tout point $x \in \Omega$ il existe un système fondamental de voisinages polycylindriques et compacts $\{W\}$ dans Ω tels que

i) Si $g : W \to \mathbf{C}^p$ est holomorphe et si pour les germes g_x, $f_x^{(i)}$ de g et $f^{(i)}$ en x on a:

$$g_x = \Sigma\, \alpha_x^{(i)} f_x^{(i)}, \qquad \alpha_x^{(i)} \in \mathcal{O}_x$$

alors il existe des $\alpha^{(i)} \in \Gamma(W, \mathcal{O})$ tels que

$$g = \Sigma\, \alpha^{(i)} f^{(i)} \quad \text{sur } W.$$

ii) Si $g_n : W \to \mathbf{C}^p$ est une suite de fonctions holomorphes qui convergent uniformément sur un voisinage de W vers $g : W \to \mathbf{C}^p$ et si

$$g_n \in \Sigma\, \Gamma(W, \mathcal{O}) f^{(i)} \text{ alors } g \in \Sigma(W, \mathcal{O}) f^{(i)}.$$

$\Gamma(P,\mathcal{O})$. Il en résulte que l'espace quotient $\Gamma(P,\mathcal{O})/\Gamma(P,\mathcal{I}_A)$ est muni d'une structure naturelle d'espace de Fréchet. Nous identifierons l'espace $\Gamma(\Pi,\mathcal{O})$ à l'espace topologique vectoriel $\Gamma(P,\mathcal{O})/\Gamma(P,\mathcal{I}_A)$.

Cette topologie dépend "a priori" du plongement φ; nous désignerons par $\Gamma(\Pi,\mathcal{O};\varphi)$ l'espace vectoriel topologique défini au moyen de ce plongement

Comme l'application naturelle $\Gamma(P,\mathcal{O})\to\Gamma(\Pi,\mathcal{O};\varphi)$ est continue et surjective, du théorème de Banach il découle qu'une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Gamma(\Pi,\mathcal{O},\varphi)$ converge vers zéro si et seulement si on peut trouver une suite $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Gamma(P,\mathcal{O})$ convergente vers zéro et telle que $f_n = F_n\circ\varphi$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

b) Soient Π,Π' deux polyèdres analytiques de X dont on s'est donné deux plongements φ,φ' dans deux polycylindre P, P'.

LEMME. *Soit $\Pi\subset\Pi'$ et supposons qu'il existe une application biholomorphe ψ de P sur un sous-ensemble fermé de P' de sorte que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{i} & \Pi' \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ P & \xrightarrow{\psi} & P' \end{array}$$

soit commutatif, i étant l'injection naturelle de Π dans Π'.

Alors l'application transposée

$$\Gamma(\Pi',\mathcal{O},\varphi')\xrightarrow{i^*}\Gamma(\Pi,\mathcal{O},\varphi)$$

est continue.

PREUVE. En effet on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(P',\mathcal{O}) & \xrightarrow{\psi^*} & \Gamma(P,\mathcal{O}) \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi'^*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^*} \\ \Gamma(\Pi',\mathcal{O},\varphi') & \xrightarrow{i^*} & \Gamma(\Pi,\mathcal{O},\varphi) \end{array}$$

où φ^*, φ'^* sont continus et ouverts et où ψ^* est continu. Si U est un ouvert de $\Gamma(\Pi,\mathcal{O},\varphi)$ alors $i^{*-1}(U) = \varphi'^*\circ(\psi^*)^{-1}\circ(\varphi^*)^{-1}(U)$ est un ouvert de $\Gamma(\Pi',\mathcal{O},\varphi')$. Ceci démontre que i^* est continu. Nous exprimerons brièvement les hypothèses du lemme en disant que "le plongement φ' peut se factoriser à travers le plongement φ".

c) Nous ferons d'abord les remarques suivantes :

α) Pour tout point x d'un espace complexe X il existe un voisinage $U(x)$ et un plongement isomorphe φ de $U(x)$ sur un sous-ensemble analytique d'un voisinage de l'origine 0 de l'espace tangent de Zariski $\mathcal{T}_x$ en x tel que $\varphi(x)=0$.

Si φ_x est le germe de plongement défini par φ en x, tout autre germe de plongement ψ_x d'un voisinage de x dans X dans un espace numérique se factorise à travers φ_x.

β) Si l'algèbre $\mathcal{H}(X)$ des fonctions holomorphes sur X sépare les points, tout point $x \in X$ possède un système fondamental de voisinages formés de polyèdres analytiques.

Soit X un espace complexe dont l'algèbre $\mathcal{H}(X)$ sépare les points et donne des coordonnées locales. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement dénombrable localement fini de X formé de polyèdres analytiques U_i pour chacun desquels on a choisi un plongement φ_i sur un sous-ensemble analytique dans un polycylindre P_i d'un espace numérique. Envisageons le groupe des 0-cochaînes sur $\mathfrak{U}$:

$$C^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O}; \{\varphi_i\}) = \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}, \varphi_i)$$

muni de la topologie du produit. Cet espace vectoriel est un espace de Fréchet car $\mathfrak{U}$ est dénombrable.

Soit $\delta : C^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ l'application cobord. Il est clair que $Ker\ \delta = Z^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{H}(X)$.

PROPOSITION 1. *L'espace $Z^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ est un sous-espace fermé de $C^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O}; \{\varphi_i\})$.*

PREUVE. En vertu des remarques α) et β) pour chaque $x \in U_i \cap U_j$ on peut choisir un voisinage polyédrique $W_{ij}(x)$ et un plongement φ_{ij} de celui-ci dans un polycylindre de l'espace tangent de Zariski $\mathcal{T}_x$ de sorte que les plongements φ_i, φ_j de U_i, U_j respectivement puissent se factoriser à travers φ_{ij}.

Avec une infinité dénombrable de tels ensembles $W_{ij}(x)$ on peut construire un recouvrement $\mathfrak{W}_{ij} = \{W_{ij}(x_\alpha)\}_{\alpha \in A_{ij}}$ localement fini et dénombrable de $U_i \cap U_j$. Désignons par $\varphi_{ij\,\alpha}$ les plongements relatifs aux polyèdres $W_{ij}(x_\alpha)$.

Considérons l'espace de Fréchet $\prod_{ij} C^o(\mathfrak{W}_{ij}, \mathcal{O}, \{\varphi_{ij\,\alpha}\})$ et l'application de restriction

$$r : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to \prod_{ij} C^o(\mathfrak{W}_{ij}, \mathcal{O}, \{\varphi_{ij\,\alpha}\}).$$

L'application r est injective. Donc le noyau de δ est le même que le noyau de $r \circ \delta$. Mais cette application est une application linéaire d'espaces de Fréchet et continue en vertu du lemme.

COROLLAIRE 1. *Soit Π un polyèdre analytique de X; pour n'importe quel plongement de Π dans un polycylindre d'un espace numérique on obtient toujours la même topologie sur $\Gamma(\Pi, \mathcal{O})$.*

PREUVE. Soient φ_1, φ_2 deux tels plongements. On peut choisir un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de Π, dénombrable, localement fini par des polyèdres U_i qu'on peut plonger par des plongements φ_i dans des polycylindres. On peut supposer que φ_1 comme φ_2 peuvent se factoriser à travers tous les ψ_i. Les applications naturelles:

$$\Gamma(\Pi, \mathcal{O}, \varphi_1) \xrightarrow{r_1} C^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O}, \{\psi_i\})$$

$$\Gamma(\Pi, \mathcal{O}, \varphi_2) \xrightarrow{r_2} C^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O}, \{\psi_i\})$$

sont injectives et continues. Elles appliquent les deux espaces sur l'espace $Z^o(\mathfrak{U},\mathcal{O})$. Celui-ci étant fermé il en résulte (théorème de Banach) que r_1 et r_2 sont des isomorphismes topologiques de $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}, \varphi_1)$ et $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}, \varphi_2)$ sur $Z^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

COROLLAIRE 2. *Soient* Π, Π' *deux polyèdres analytiques de* X, $\Pi \subset \Pi'$. *Soient* $\Gamma(\Pi, \mathcal{O})$, $\Gamma(\Pi', \mathcal{O})$ *les espaces de Fréchet des fonctions holomorphes sur* Π, Π' *respectivement et soit*

$$r : \Gamma(\Pi', \mathcal{O}) \to \Gamma(\Pi, \mathcal{O})$$

l'application de restriction. Cette application est continue.

PREUVE. Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de Π comme tout à l'heure et soit φ' un plongement de Π' qui permet de définir la topologie de $\Gamma(\Pi', \mathcal{O})$. Si $\mathfrak{U}$ est suffisamment fin φ' peut se factoriser à travers les ψ_i de sorte que l'application naturelle

$$\Gamma(\Pi', \mathcal{O}) \to Z^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$$

soit continue. Comme $Z^o(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ s'identifie à $\Gamma(\Pi, \mathcal{O})$ on a la conclusion.

6.2. *Le théorème de Oka-Weil.*

THEOREME. *Soit* X *un espace complexe dont l'algèbre* $\mathfrak{H}(X)$ *sépare les points et donne des coordonnées locales. Soit* Π *un polyèdre analytique de* X. *Alors l'application de restriction*

$$r : \Gamma(X, \mathcal{O}) \to \Gamma(\Pi, \mathcal{O})$$

a une image dense dans $\Gamma(\Pi, \mathcal{O})$.

PREUVE. Soit $\varphi : X \to \mathbf{C}^k$ une application holomorphe qui applique isomorphiquement Π sur un sous-ensemble analytique A du polycylindre unité $P = \{z \in \mathbf{C}^N \mid |z_\alpha| < 1, 1 \leq \alpha \leq k\}$.

Soit $g \in \Gamma(\Pi, \mathcal{O})$ et soit $g' = g \circ \varphi^{-1}$ la fonction holomorphe définie par g sur A. En vertu de la proposition 4 du §5 il existe une fonction holomorphe G sur P telle que $G_{|A} = g'$.

Soit $G = \sum_{n \in \mathbf{N}^k} a_n z^n$ le développement de Taylor de G. On sait que $F_\nu = \sum_{|n| \leq \nu} a_n z^n$ est une suite de fonctions holomorphes sur P telles que $F_\nu \to G$ dans $\Gamma(P, \mathcal{O})$ pour $\nu \to +\infty$.

Soit $f = (f_1, \ldots, f_k)$ les fonctions qui donnent le plongement. Alors les fonctions $g_\nu = \sum_{|n| \leq \nu} a_n f^n$ sont des fonctions holomorphes sur X et leurs restrictions à Π convergent dans $\Gamma(\Pi, \mathcal{O})$ vers g.

6.3. *Transport aux faisceaux cohérents.* Soit X un espace complexe dont l'algèbre $\mathcal{H}(X)$ sépare les points et donne des coordonnées locales. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et Π un polyèdre analytique dans X. Il existe sur Π une résolution du type :

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0 . \tag{1}$$

On en déduit en vertu de la proposition 4 du § 5 la suite exacte

$$\Gamma(\Pi, \mathcal{O}^p) \xrightarrow{\alpha^*} \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q) \xrightarrow{\beta^*} \Gamma(\Pi, \mathcal{F}) \to 0 .$$

L'image de α^* est fermée dans $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q)$ donc on peut munir $\Gamma(\Pi, \mathcal{F})$ d'une structure d'espace de Fréchet en l'identifiant à l'espace quotient $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q) / \mathit{Im}\, \alpha^*$. De plus la topologie de $\Gamma(\Pi, \mathcal{F})$ ne dépend pas de la résolution (1) choisie.

En effet si l'on suppose Π plongé dans un polycylindre P de $\mathbf{C}^N$ tout homomorphisme

$$\alpha_\pi : \mathcal{O}^p_\pi \to \mathcal{O}^q_\pi \text{ sur } \Pi$$

est la restriction à Π d'un homomorphisme

$$\alpha : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q \text{ sur } P .$$

L'application du lemme de Cartan cité ci-dessus permet alors de démontrer les assertions précédentes (1) .

---

(1) Voici les détails des démonstrations.

(a) L'image de $\alpha^*_\pi : \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^p) \to \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q)$ est fermée. En effet on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \Gamma(P, \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}^q) \\ & & \downarrow \\ \Gamma(P, \mathcal{O}^p) & \xrightarrow{\alpha^*} & \Gamma(P, \mathcal{O}^q) \\ \downarrow r_1 & & \downarrow r_2 \\ \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^p) & \xrightarrow{\alpha^*_\pi} & \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q) \end{array}$$

où $\mathcal{I}$ est le faisceau d'idéaux défini par Π dans P.

On peut alors démontrer la proposition suivante

PROPOSITION. *Soit X un espace complexe dont l'algèbre* $\mathcal{H}(X)$ *sépare les points et donne des coordonnées locales. Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur X et soient* $\Pi \subset \Pi'$ *deux polyèdres analytiques de X. Alors l'homomorphisme de restriction*

$$r : \Gamma(\Pi', \mathcal{F}) \to \Gamma(\Pi, \mathcal{F})$$

est continu et à image dense.

PREUVE. Soit $\mathcal{O}^q \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0$ une résolution de $\mathcal{F}$ sur Π'.

On a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Pi', \mathcal{O}^q) & \xrightarrow{\beta_1^*} & \Gamma(\Pi', \mathcal{F}) \to 0 \\ \downarrow r_1 & & \downarrow r \\ \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q) & \xrightarrow{\beta_2^*} & \Gamma(\Pi, \mathcal{F}) \to 0 \end{array}$$

Comme β_1^* est ouverte et r_1, β_2^* sont continues, il résulte que r est continue. Mais l'image de r_1 est dense donc l'image de r est aussi dense.

.../...

Par définition r_1 et r_2 sont des applications surjectives ouvertes. Donc $\mathrm{Im}\,\alpha_\pi^* = r_2\,\mathrm{Im}\,\alpha^*$. Soit $\mathcal{G}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}^q$ sur P engendré par $\mathrm{Im}\,\alpha$ et $\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}^q$; on aura alors aussi $\mathrm{Im}\,\alpha_\pi^* = r_2\,\Gamma(P, \mathcal{G})$. Mais $\Gamma(P, \mathcal{G})$ est un sous-espace fermé de $\Gamma(P, \mathcal{O}^q)$ (en vertu du théorème cité de H. Cartan) et saturé pour la relation d'équivalence définie par l'application r_2. Comme r_2 est ouverte on a la conclusion.

β) La topologie définie sur $\Gamma(\Pi, \mathcal{F})$ est indépendante de la résolution choisie sur Π pour $\mathcal{F}$. En effet si

$$(1_1) \qquad \mathcal{O}^{p_1} \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}^{q_1} \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{F} \to 0$$

est une autre telle résolution, on peut trouver un homomorphisme $\sigma : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^{q_1}$ sur Π de sorte que $\beta = \beta_1 \circ \sigma$. De là on déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(P, \mathcal{O}^q) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "\sigma^*"] & \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q) \arrow[d, "\sigma_\pi^*"] \arrow[dr, "\beta^*"] & \\ \Gamma(P, \mathcal{O}^{q_1}) \arrow[r, "r_2"'] & \Gamma(\Pi, \mathcal{O}^{q_1}) \arrow[r, "\beta_1^*"'] & \Gamma(\Pi, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Dire que $A \subset \Gamma(\Pi, \mathcal{F})$ est ouvert pour la topologie définie par (1_1) signifie que $(\beta_1^*)^{-1}(A)$ est ouvert dans $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}^{q_1})$. Comme r_1, r_2 σ^* sont continues et r_1 ouverte on déduit que $r_1(\sigma^*)^{-1}\, r_1^{-1}(\beta_2^*)^{-1}(A)$ est ouvert dans $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q)$ c'est-à-dire que $(\beta^*)^{-1}(A)$ est ouvert dans $\Gamma(\Pi, \mathcal{O}^q)$ et donc que A est aussi un ouvert pour la topologie définie par (1). En échangeant les rôles de (1) et (1_1) on voit que les deux topologies sont les mêmes.

Bibliographie.

[1] A. ANDREOTTI - E. VESENTINI. Sopra un teorema di Kodaira, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, (3) 15 (1961), 283-309.

[2] E. CALABI - E. VESENTINI. On compact, locally symmetric Kähler manifolds, Ann. of Math., 71 (1960), 472-507.

[3] H. CARTAN. Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, Journal de Math. pures et appl., 19 (1940), 1-26.

[4] H. CARTAN. Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. Sci. Ecole Normale Sup., 61 (1944), 149-197.

[5] H. CARTAN. Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), 28-64.

[6] H. CARTAN. Séminaire E.N.S. 1951-52.

[7] H. CARTAN. Séminaire E.N.S. 1953-54.

[8] R. GODEMENT. Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[9] H. GRAUERT - R. REMMERT. Complexe Räume, Math. Annalen, 136 (1958), 245-318.

[10] F. HIRZEBRUCH. Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer-Verlag, 1956.

[11] K. KODAIRA. On Kähler varieties of restricted type, Ann. of Math., 60 (1954), 28-48.

[12] B. MALGRANGE. Lectures on the Theory of Functions of Several Complexe Variables, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1958.

[13] K. NOMIZU. Lie Groups and differential geometry, Publications of the Mathematical Society of Japan, 1956.

[14] A. WEIL. Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann, Paris, 1958.