Charles Ehresmann

Espèces de structures locales

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 4, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
1961

ESPECES DE STRUCTURES LOCALES

par Charles EHRESMANN

(Traduction de l'article : *Gattungen von lokalen Strukturen,* Jahresberichte der Deutschen Math. Vereinigung, 60, 1957) *

Dans cette étude[1] on développera la notion générale d'une espèce de structures mathématiques basée sur les notions de catégorie et de foncteur introduites par Eilen--berg-Mac Lane. Ceci conduit en particulier à une théorie des espèces de structures locales[2]. Les variétés de la catégorie $\mathcal{C}^r$, les produits locaux, les feuilletages et les fibrations forment d'importantes espèces de cette sorte. Les démonstrations sont simple--ment indiquées brièvement, puisqu'elles peuvent être facilement complétées. Les structures fondamentales de la géométrie différentielle seront traitées dans un article faisant suite à ce travail.

Nous distinguons entre ensembles et classes : un ensemble est aussi une classe. La classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble. Nous admettons pour les classes les mêmes opérations que pour les ensembles. Ainsi nous n'évitons pas la formation de certaines classes de sous-classes d'une classe.

Si des paradoxes devaient apparaître en introduisant ces notions, il serait tou--jours possible d'introduire des restrictions pour rester dans le cadre de la théorie des ensembles ; mais de cette façon la théorie deviendrait plus compliquée.

1) Ce travail est la reproduction de la première partie de ma conférence sur les "Notions fonda--mentales de la Géométrie différentielle", faite à la réunion de l'Association des Mathématiciens Allemands à Würzburg (septembre 1956). -La deuxième partie de cet exposé donnait une définition des structures fondamentales de la géométrie différentielle. Elle sera publiée dans un travail ultérieur.

2) J'ai déjà indiqué brièvement les idées fondamentales de cette théorie dans des publications antérieures (3) et depuis 1952 je les ai exposées en détail avec des applications dans différents cours et conferences (par exemple à Rio de Janeiro, Princeton, Yale, Bombay, Paris).

3) a) Structures locales et structures infinitésimales (Comptes-Rendus Académie des Sciences de Paris 234, 1952, p. 587)
b) Structures locales (Annali di matematica 1954 p. 133)
c) Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie (Colloque international de Géométrie différentielle de Strasbourg. C.N.R.S. 1953).

*) La théorie esquissée ici a été développée dans mes cours depuis 1957 comme base de la théo--rie des espaces fibrés et feuilletés et de la géométrie différentielle. Un exposé détaillé, dont une partie est publiée sous forme provisoire, va paraître prochainement.

1. Catégories et catégories d'opérateurs.

DEFINITION. *Une catégorie est une classe* $\mathcal{C}$ *d'éléments dans laquelle est définie une multiplication* $(f, g) \to fg$ *pour certains couples* (f, g) *d'éléments de* $\mathcal{C}$, *multiplication qui vérifie les axiomes suivants :*

1) Si $h(fg)$ *ou* $(hf)g$ *est défini, alors les deux éléments sont définis et:* $h(fg) = (hf)g$.

2) Si hf *et* fg *sont définis, alors* $h(fg)$ *est défini.*

Un élément e *de* $\mathcal{C}$ *est appelé unité si* $fe = f$ *et* $eg = g$ *pour tous les éléments* f *et* g *de* $\mathcal{C}$ *pour lesquels* fe *et* eg *sont définis.*

3) Pour tout $f \in \mathcal{C}$ *il existe deux unités* $\alpha(f)$ *et* $\beta(g)$ *telles que* $f\alpha(f)$ *et* $\beta(f)f$ *soient définis.*

CONSEQUENCES: Les éléments $\alpha(f)$ et $\beta(g)$ sont uniques et seront appelés unité à droite et unité à gauche de f. fg est défini si et seulement si $\alpha(f) = \beta(g)$.

Les éléments de $\mathcal{C}$ sont généralement appelés morphismes. Si on s'est donné une application bi-univoque de la classe des unités de $\mathcal{C}$ sur une classe $\mathcal{C}_o$, alors $\mathcal{C}_o$ sera souvent appelée une classe d'*objets* pour $\mathcal{C}$.

En ce cas nous désignons aussi par $\alpha(f)$ l'objet E qui correspond à l'unité $\alpha(f)$ et nous l'appelons source de f.

L'objet E' qui correspond à $\beta(f)$ est aussi désigné par $\beta(f)$ et sera appelé but de f. On dira que f est un morphisme de E sur ou vers E'. Si aucune classe parti--culière d'objets n'est indiquée, alors $\mathcal{C}_o$ est simplement la classe des unités de $\mathcal{C}$.

Un élément f de $\mathcal{C}$ est inversible s'il existe un élément f' dans $\mathcal{C}$ tel que $f'f = \alpha(f)$ et $ff' = \beta(f)$. Dans ce cas l'élément f' est unique et sera appelé l'*inverse* f^{-1} de f.

DEFINITION. *Un groupoïde est une catégorie* $\mathcal{C}$ *dont les éléments sont tous inversibles. Un groupoïde est dit transitif si à chaque couple* (e', e) *d'unités correspond au moins un morphisme de* e *vers* e'.

Les groupoïdes transitifs sont les groupoïdes au sens de Brandt, du moins si on se restreint aux ensembles.

PROPOSITION. *Les éléments inversibles d'une catégorie forment un groupoïde.*

DEFINITION. *Une sous-catégorie* $\mathcal{C}'$ *de* $\mathcal{C}$ *est une sous-classe de* $\mathcal{C}$ *ayant les pro--priétés suivantes :*

1) Si $f \in \mathcal{C}'$ *et* $g \in \mathcal{C}'$ *et si* fg *est défini, alors on a* $fg \in \mathcal{C}'$.

2) Si $f \in \mathcal{C}'$, *alors on a aussi* $\alpha(f) \in \mathcal{C}'$ *et* $\beta(f) \in \mathcal{C}'$.

$\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie *pleine* lorsque $\mathcal{C}'$ contient tout élément f de $\mathcal{C}$ pour lequel $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ appartiennent à $\mathcal{C}'$.

Un sous-groupoïde d'un groupoïde $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ ayant la propriété suivante : si $f \in \mathcal{C}'$, alors on a aussi $f^{-1} \in \mathcal{C}'$.

DEFINITION. *Un foncteur covariant (resp. contravariant) d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$ est une application Φ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ possédant les propriétés suivantes :*

1) Si $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$ et si fg est défini, alors

$\Phi(fg) = \Phi(f)\,\Phi(g)$ *(resp.* $\Phi(fg) = \Phi(g)\,\Phi(f)$*).*

2) Si e est une unité de $\mathcal{C}$ alors $\Phi(e)$ est une unité de $\mathcal{C}'$.

DEFINITION. *Un foncteur covariant généralisé d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$ est une fonction Φ qui associe à chaque $f \in \mathcal{C}$ une classe $\Phi(f)$ d'éléments de $\mathcal{C}'$ possédant les propriétés suivantes :*

1) Si $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$ et si fg est défini, alors on a $\Phi(fg) = \Phi(f)\,\Phi(g)$, où $\Phi(f)\,\Phi(g)$ désigne la classe des produits $f'g'$ tels que $f' \in \Phi(f)$, $g' \in \Phi(g)$.

2) Si e est une unité de $\mathcal{C}$, alors $\Phi(e)$ est une classe d'unités de $\mathcal{C}'$.

EXEMPLE : Soit $\mathfrak{S}$ la classe de toutes les applications bi-univoques d'un ensemble quelconque sur un ensemble quelconque, et soit $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ la classe de toutes les applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque. Avec la définition usuelle du produit fg de deux applications f et g, $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ est une catégorie. Une unité de $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ est l'application identique d'un ensemble E. Si f est une application de E dans E', alors $\alpha(f)$ est l'application identique de E, $\beta(f)$ l'application identique de E'. La classe de tous les ensembles est une classe $\mathfrak{S}_o$ d'objets pour $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$. $\mathfrak{S}$ est le groupoïde de tous les éléments inversibles de $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$. Une autre sous-catégorie de $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ est la classe de toutes les applications d'un ensemble quelconque sur un ensemble quelconque.

DEFINITION : *Une catégorie d'opérateurs sur une classe $\mathcal{S}_o$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une multiplication $(f, z) \to fz$ définie pour certains couples (f, z), où $f \in \mathcal{C}$, $z \in \mathcal{S}_o$, $fz \in \mathcal{S}_o$ et qui satisfait aux axiomes suivants :*

1) Si $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $g(fz) = (gf)z$.

2) Si gf et fz sont définis, alors $g(fz)$ est aussi défini.

3) Si e est une unité de $\mathcal{C}$ et si ez est défini, alors $ez = z$.

4) Pour tout $f \in \mathcal{C}$, il existe un $z \in \mathcal{S}_o$ tel que fz soit défini et pour chaque $z \in \mathcal{S}_o$ il existe un $f \in \mathcal{C}$, tel que fz soit défini.

REMARQUE : Si seulement les axiomes 1), 2), 3) sont satisfaits, soit alors $\mathcal{C}'$ la classe des éléments $f \in \mathcal{C}$ pour lesquels fz est défini pour au moins un z de $\mathcal{S}_o$ et soit $\mathcal{S}_o$ la classe des éléments $z \in \mathcal{S}_o$ pour lesquels fz soit défini pour au moins un $f \in \mathcal{C}$; alors $\mathcal{C}'$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$.

Si dans l'axiome 1) l'égalité $g(fz) = (gf)z$ est remplacée par $g(f.z) = (fg)z$, alors $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs à droite sur $\mathcal{S}_o$. Dans ce cas, au lieu de fz on écrit habituellement zf.

PROPOSITION : *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$, alors à chaque $z \in \mathcal{S}_o$ correspond une seule unité $e \in \mathcal{C}'$ pour laquelle ez soit défini. Nous désignons cette unité par $p(z)$.*

Pour $z \in \mathcal{S}_o$ il existe un $f \in \mathcal{C}$ tel que fz soit défini.
Dans ce cas, on a: $fz = (f\alpha(f))z = f(\alpha(f)z)$. Par conséquent $\alpha(f)z$ est défini. Si e et e' sont deux unités pour lesquelles ez et $e'z$ sont définis, alors: $ez = e(e'z) = (ee')z$. Donc ee' est défini, d'où $ee' = e = e'$.

On a ainsi défini une projection p de $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{C}_o$: fz est défini si et seulement si $\alpha(f) = p(z)$. Si fz est défini, alors on a $p(fz) = \beta(f)$.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$, nous désignons par $\Phi(f)$ l'application $z \to fz$ de $\bar{p}^{1}(\alpha(f))$ dans $\bar{p}^{1}(\beta(f))$. Les applications $\Phi(f)$ forment une catégorie $\Phi(\mathcal{C})$ et Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ sur $\Phi(\mathcal{C})$. Si f est inversible, $\Phi(f)$ l'est aussi.

Soit Φ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\tilde{\mathcal{E}}$ qui satisfait à la condition suivante : en désignant par $\bar{p}^{1}(e)$ l'ensemble dont $\Phi(e)$ est l'application identique, où e est une unité de $\mathcal{C}$, alors $\bar{p}^{1}(e) \cap \bar{p}^{1}(e') = \emptyset$ (ensemble vide), si $e \neq e'$.

Soit $\mathcal{S}_o$ la classe de tous les éléments z qui appartiennent à un ensemble $p'(e)$, et définissons fz comme étant l'image de z par $\Phi(f)$. Alors $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$.

PROPOSITION. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$, Désignons par $\mathcal{S}$ la classe des couples (f, z), où $f \in \mathcal{C}$, $z \in \mathcal{S}_o$, et tels que fz soit défini. $\mathcal{S}$ est alors une catégorie munie de la multiplication suivante : $(f', z')(f, z) = (f'f, z)$, si et seulement si $z' = fz$. Les unités de cette catégorie sont les couples (e, z) pour lesquels ez est défini. $\mathcal{S}_o$ est une classe d'objets pour $\mathcal{S}$ par rapport à l'application biunivoque $(e, z) \to z$. Si f est inversible, (f, z) l'est aussi et l'élément inverse est (f^{-1}, fz). Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, alors $\mathcal{S}$ est aussi un groupoïde. L'application $(f, z) \to f$ est un foncteur p de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$.*

La relation entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ peut aussi être caractérisée de la manière suivante: Soient deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ et un foncteur covariant p de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$ possédant les propriétés suivantes :

1°) En désignant par $\bar{p}^1(f)$ la classe des éléments $g \in \mathcal{S}$ pour lesquels $p(g)=f$, alors $\bar{p}^1$ est un foncteur généralisé de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{S}$.

2°) Deux éléments de $\bar{p}^1(f)$ qui ont la même unité à droite sont identiques.

3°) $\bar{p}^1(\alpha(f))=\alpha(\bar{p}^1(f))=$ classe des éléments $\alpha(g)$ pour tout $g \in \bar{p}^1(f)$.

Soit $\mathcal{S}'$ la catégorie des couples (f, z), où $f \in \mathcal{C}$, $z \in \mathcal{S}_o$, $p(z)=\alpha(f)$, munie de la multiplication suivante : $(f', z')(f, z)=(f'f, z)$ si et seulement si $f=p(g)$, $z=\alpha(g)$ et $z'=\beta(g)$. L'application $g \to (f, z)$, où $g \in \mathcal{S}$, $z=\alpha(g)$, $f=p(g)$, est alors foncteur biunivo--que, c'est-à-dire une équivalence de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$ pour la multiplication : $fz=\beta(g)$.

2. Espèces de structures et groupoïdes d'isomorphismes.

DEFINITION : *Soit $\mathcal{C}$ un groupoïde d'opérateurs sur une classe $\mathcal{S}_o$ et soit $\mathcal{S}$ le groupoï--de correspondant des couples (f, S), où $S \in \mathcal{S}_o$, $f \in \mathcal{C}$, pour lesquels fS est défini; p désignera la projection de $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{C}_o$ ainsi que le foncteur projection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{S}_o$ est appelé espèce de structures sur $\mathcal{C}$. Un élément S de $\mathcal{S}_o$ est appelé struc--ture sur $p(S) \in \mathcal{C}_o$; $(f, S) \in \mathcal{S}$ est appelé isomorphisme de S sur fS; $\mathcal{S}$ est appelé groupoïde des isomorphismes. Un isomorphisme (f, S) de S sur S est appelé un auto--morphisme de S. La classe des automorphismes de S forme un sous-groupe de $\mathcal{S}$ qui sera appelé groupe des automorphismes de S. La projection p applique celui-ci d'une façon biunivoque sur un sous-groupe de $\mathcal{C}$ qui est souvent appelé aussi groupe des automorphismes de S.*

Nous désignons de nouveau par $\Phi(f)$ l'application biunivoque $S \to fS$. Les applications $\Phi(f)$ forment un groupoïde $\Phi(\mathcal{C})$ et Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ sur $\Phi(\mathcal{C})$. Soit $\mathcal{C}'$ la classe des éléments f de $\mathcal{C}$ pour lesquels $\Phi(f)$ est une unité. Alors $\mathcal{C}'$ est un sous-groupoïde distingué de $\mathcal{C}$ et $\Phi(\mathcal{C})$ est équivalent au groupoïde quotient $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$. La classe $\mathcal{S}_o$ peut aussi être considérée comme une espèce de structures sur $\Phi(\mathcal{C})$ ou sur $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$.

Si la classe des structures sur une unité de $\mathcal{C}$ forme un ensemble, alors l'espèce de structures $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{C}$ peut être définie par un foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$ satisfaisant aux conditions suivantes:
Désignons par $\Phi_o(e)$ l'ensemble dont $\Phi(e)$ est l'application identique, où $e \in \mathcal{C}_o$. Alors $\Phi_o(e) \neq \emptyset$ et $\Phi_o(e) \cap \Phi_o(e') = \emptyset$ si $e \neq e'$. Un élément S de $\Phi_o(e)$ est alors une structure sur e et fS est l'image de S par $\Phi(f)$.

Un foncteur covariant quelconque de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ détermine aussi une espèce de structures de la manière suivante: Les unités e de $\mathcal{C}$ pour lesquelles $\Phi_o(e) \neq \emptyset$ déter--minent un sous-groupoïde complet $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{C}_1$, $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = e'$. Dési--gnons par $\Phi'(f)$ l'application $(e, z) \to (e', \Phi(f)(z))$ de $\{e\} \times \Phi_o(e)$ sur $\{e'\} \times \Phi_o(e')$, où $z \in \Phi(e)$. Alors Φ' est un foncteur de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{E}$ qui satisfait aux conditions ci-dessus et par conséquent détermine une espèce de structures sur $\mathcal{C}_1$. Une structure sur e est un couple (e, z), où $z \in \Phi_o(e)$.

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur un sous-groupoïde $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$. Chaque structure $\mathcal{S}$ est alors une structure sur un ensemble $E = p(S)$ qui correspond à une unité e de $\mathcal{C}$ pour laquelle eS est défini. Le couple (E, S), ou $E \times \{S\}$, sera alors aussi appelé un *espace* de l'espèce $\mathcal{S}_o$. A l'isomorphisme (f, S) correspond l'application biunivoque $(x, S) \to (f(x), fS)$ de l'espace $E \times \{S\}$ sur l'espace $E' \times \{S'\}$, où $S' = fS$, $E' = p(S')$. Le groupoïde $\mathcal{S}$ est équivalent au groupoïde $\overline{\mathcal{S}}$ de ces applications ; $\overline{\mathcal{S}}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$.

La classe $\mathcal{C}_o$ des unités ou des objets du groupoïde $\mathcal{C}$ est l'espèce la plus simple de structures sur $\mathcal{C}$, avec la multiplication suivante : $f \in \mathcal{C}$, $S = \alpha(f) \in \mathcal{C}_o$, $f.S = S' = \beta(f)$. (Il faut distinguer entre $f.S$ et $fS = f$ si S est considéré comme une unité de $\mathcal{C}$).

L'isomorphisme (f, S) peut être identifié avec f, c'est-à-dire $\mathcal{C}$ est le groupoïde correspondant des isomorphismes.

SOUS-ESPECE DE STRUCTURES

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}$. Une *sous-espèce* est une sous-classe $\mathcal{S}'_o$ de $\mathcal{S}_o$ sur laquelle opère un sous-groupoïde de $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$. Si $S \in \mathcal{S}'_o$, $f \in \mathcal{C}'$, $p(S) = \alpha(f)$, alors $fS \in \mathcal{S}'_o$, $p(\mathcal{S}'_o) = \mathcal{C}'_o$.

Le groupoïde correspondant des isomorphismes $\mathcal{S}'$ sera appelé *sous-groupoïde d'isomorphismes* de $\mathcal{S}$.

Si un groupoïde $\mathcal{C}$ opère sur $\mathcal{S}_o$, la classe des éléments fS s'appellera la *classe d'intransitivité* de $S \in \mathcal{S}_o$. Une sous-classe $\mathcal{S}'_o$ de $\mathcal{S}_o$ est dite *saturée* par rapport à $\mathcal{C}$ si $fS \in \mathcal{S}'_o$ pour tout S de $\mathcal{S}'_o$ et tout $f \in \mathcal{C}$. Alors $\mathcal{S}'_o$ est une *sous-espèce saturée* sur $\mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}'$ est un sous-groupoïde plein et saturé de $\mathcal{C}$; c'est-à-dire la classe $\mathcal{C}'_o$ est saturée relarivement à $\mathcal{C}$.

ESPECE SOUS-JACENTE DE STRUCTURES

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}'_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}$ un sous-groupoïde de $\mathcal{C}'$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ les groupoïdes correspondants des isomorphismes, p et p' les foncteurs projection correspondants. Une application φ_o de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$ est appelée *application covariante* si φ_o est permutable avec tous les opérateurs $f \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire si $f\varphi_o(S) = \varphi_o(fS)$, si fS est défini. Il s'ensuit que $p(S) = p'(\varphi_o(S))$. L'application covariante φ_o détermine un foncteur φ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ qui est défini par $\varphi(f, S) = (f, \varphi_o(S))$. Ce foncteur a la propriété suivante : $p'\varphi = p$.

Inversement :

Tout foncteur covariant φ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ ayant la propriété $p'\varphi = p$ détermine une application covariante φ_o de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$; φ_o est la restriction de φ à $\mathcal{S}_o$.

Nous appelons $\mathcal{S}'_o$ une *espèce de structures sous-jacente* à $\mathcal{S}_o$, si on a défini une application covariante φ_o de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$ ou un foncteur covariant φ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ ayant la propriété $p'\varphi = p$. La structure $\varphi_o(S)$ s'appellera la *structure sous-jacente* à $S \in \mathcal{S}_o$. Nous appelons $\mathcal{S}'$ groupoïde d'isomorphismes sous-jacent à $\mathcal{S}$. On voit facilement que $\varphi_o(\mathcal{S}_o)$ est une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}'_o$ et $\varphi(\mathcal{S})$ un sous-groupoïde d'isomorphismes de $\mathcal{S}$. L'application covariante φ_o s'appelle une *équivalence* de $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{S}'_o$ quand φ_o est une application biunivoque de $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{S}'_o$. Le foncteur correspondant φ est dit une *équivalence* de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}'$.

Plus généralement, soient $\mathcal{S}_o$ et $\mathcal{S}'_o$ deux espèces de structures quelconques, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ les groupoïdes d'isomorphismes correspondants et φ un foncteur covariant de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$. L'application φ_o correspondante de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$ sera alors encore appelée *application covariante* et $\varphi_o(S)$ sera dit *covariant* de $S \in \mathcal{S}_o$.

ESPECE DE SUPERSTRUCTURES

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ le groupoïde correspondant des isomorphismes, $\overline{\mathcal{S}}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{S}}$ le groupoïde correspondant des isomorphismes. Alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ sera appelé une *espèce de superstructures* sur $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$.

PROPOSITION: *Si $\overline{\mathcal{S}}_o$ est une espèce de superstructures sur $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, alors $\mathcal{C}$ est aussi un groupoïde d'opérateurs sur $\overline{\mathcal{S}}_o$, et par conséquent $\overline{\mathcal{S}}_o$ est aussi une espèce de structures sur $\mathcal{C}$. Les groupoïdes correspondants des isomorphismes sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ peuvent être identifiés de manière covariante.*

Soient $f \in \mathcal{C}$, $(f, S) \in \mathcal{S}$, $\overline{S} \in \overline{\mathcal{S}}_o$, $\overline{p}(\overline{S}) = S$, $\overline{p}$= foncteur de projection de $\overline{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{S}$. Alors $(f, S)\overline{S}$ est défini et dépend seulement de (f, S). Posons $f\overline{S} = (f, S)\overline{S}$; de cette façon $\mathcal{C}$ sera défini comme groupoïde d'opérateurs sur $\overline{\mathcal{S}}_o$. En outre on peut identifier $((f, S), \overline{S}) \in \overline{\mathcal{S}}$ avec $(f, \overline{S})$.

PROPOSITION : *Si $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures sous-jacente à $\overline{\mathcal{S}}_o$ et φ le foncteur correspondant de $\overline{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{S}$, alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ est aussi une espèce de structures sur $\varphi(\overline{\mathcal{S}})$, lorsqu'on pose $(f, S)\overline{S} = f\overline{S}$ pour $(f, S) \in \varphi(\overline{\mathcal{S}})$, $\varphi(\overline{S}) = S$.*

ELARGISSEMENT D'UNE ESPECE DE STRUCTURES

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ le groupoïde correspondant des isomorphismes. Si $\mathcal{C}$ est un sous-groupoïde du groupoïde $\tilde{\mathcal{C}}$, soit $\overline{\mathcal{C}}$ le sous-groupoïde plein saturé engendré par $\mathcal{C}$. Nous allons définir une espèce $\overline{\mathcal{S}}_o$ de structures sur $\overline{\mathcal{C}}$, qui sera appelée *élargissement de l'espèce* $\mathcal{S}_o$. Soit Σ la classe des couples (f, S), $f \in \overline{\mathcal{C}}$, $S \in \mathcal{S}_o$ pour lesquels $\alpha(f) = p(S)$. $\mathcal{S}$ opère alors à droite sur Σ de la manière suivante: $(f, S)(g, S_1) = (fg, S_1)$, $(g, S_1) \in \mathcal{S}$, $gS_1 = S$. La classe d'intransitivité de (f, S) relativement à $\mathcal{S}$ sera désignée par $(f, S)\mathcal{S}$. Soit $\overline{\mathcal{S}}_o$ la classe de toutes les classes d'intransitivité $(f, S)\mathcal{S}$. Alors $\overline{\mathcal{C}}$ opère sur $\overline{\mathcal{S}}_o$ de la façon suivante: $g((f, S)\mathcal{S}) = (gf, S)\mathcal{S}$, $g \in \overline{\mathcal{C}}$, si et seulement si gf est défini. Par conséquent $\overline{\mathcal{S}}_o$ est une espèce de structures sur $\overline{\mathcal{C}}$, $(f, S)\mathcal{S}$ est une structure sur $\beta(f)$. La structure $S \in \mathcal{S}_o$ sera identifiée avec $(e, S)\mathcal{S}$, où (e, S) est l'automorphisme identique de S. Ainsi $\mathcal{S}_o$ de-vient une sous-espèce de $\overline{\mathcal{S}}_o$ et $\mathcal{S}$ un sous-groupoïde de $\overline{\mathcal{S}}$, groupoïde des isomorphis-mes de $\overline{\mathcal{S}}_o$.

Soit $\mathcal{S}'$ un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ et soit Σ' la classe des couples (f, S), $f \in \overline{\mathcal{C}}$, $S \in \mathcal{S}'_o$, $\alpha(f) = p(S)$. Alors $\mathcal{S}'$ opère sur Σ' et nous considérons les classes d'intran-sitivité $(f, S)\mathcal{S}'$. Elles forment une espèce de structures $\overline{\mathcal{S}}'_o$ sur un sous-groupoïde de $\overline{\mathcal{C}}$: $g((f, S)\mathcal{S}') = (gf, S)\mathcal{S}'$, $g \in \overline{\mathcal{C}}$, si et seulement si gf est défini. $\overline{\mathcal{S}}_o$ est une espèce de structures sous-jacente à $\overline{\mathcal{S}}'_o$; l'application covariante φ_o de $\overline{\mathcal{S}}'_o$ dans $\overline{\mathcal{S}}_o$ sera définie par $\varphi_o((f, S)\mathcal{S}') = (f, S)\mathcal{S}$. Nous considérons le cas particulier suivant: $\mathcal{S}$ est identique à $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}'$ est un sous-groupoïde $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$. Nous obtenons alors l'espèce de structures dont les éléments sont les classes d'intransitivité $f\mathcal{C}'$; les opérateurs correspondants sont les éléments du sous-groupoïde plein saturé de $\tilde{\mathcal{C}}$, engendré par $\mathcal{C}'$.

CONSTRUCTION D'ESPECES DE STRUCTURES SUR DES ENSEMBLES

Les espèces habituelles de structures sont définies sur des sous-groupoïdes de $\mathcal{E}$ ou sur un groupoïde produit $\prod_i \mathcal{C}_i$, où $\mathcal{C}_i$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$. On construit un foncteur de $\prod_i \mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{E}$ en partant des deux foncteurs fondamentaux $\mathcal{P}$ et Π.

Etant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. A chaque application biunivoque f de E sur E' correspond une application biuni-voque $\mathcal{P}(f)$ de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}(E')$ et $\mathcal{P}$ est un foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui applique un sous-groupoïde $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ sur un sous-groupoïde $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{E}$. Le foncteur Π est un fonc-teur de $\prod_i \mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{E}$ qui est défini de la manière suivante : Un élément de $\prod_i \mathcal{C}_i$ est une famille (f_i), où $f_i \in \mathcal{C}_i$. Soit $(x_i) \in \prod_i E_i$, $x_i \in E_i$. Alors $\Pi(f_i)$ est l'application $(x_i) \to (f_i x_i)$, où $E_i = \alpha(f_i)$. A l'aide de $\mathcal{P}$ et Π on peut définir certains foncteurs Φ de $\prod_i \mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{E}$. Par Φ est alors définie une espèce de structures $\mathcal{S}_o$ sur $\prod_i \mathcal{C}_i$ d'un certain type. Une sous-espèce de $\mathcal{S}_o$, qui est d'ordinaire définie par un *système d'axio-mes*, est alors une espèce de structures au sens de Bourbaki. La construction de Φ peut être indiquée de la manière suivante:

Soit $\mathcal{C}_j = \mathcal{C} =$ sous-groupoïde de $\mathcal{E}$ pour $j \in \mathcal{J}$. Soit alors Δ le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\prod_j \mathcal{C}_j$ tel que $\Delta(f) = (f_j)_{j \in \mathcal{J}}$, où $f_j = f \in \mathcal{C}$. Alors $\Pi\Delta$ est un foncteur de $\mathcal{C}$ sur un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$ qui sera désigné par $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$. Si $\mathcal{I}$ est l'ensemble des nombres ordinaux $< i$, nous désignons $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ par $\mathcal{C}^{i}$. On définit aussi $\mathcal{P}^{i}(\mathcal{C})$, où i est un nombre ordinal quelconque: $\mathcal{P}^{\omega}(E)$ est défini comme limite inductive de la suite $\mathcal{P}^{1}(E)$, $\mathcal{P}^{2}(E), \ldots, \mathcal{P}^{n}(E)$. Soit μ une fonction définie sur un ensemble Λ de telle sorte que: $\mu(\lambda) = (i_\lambda, m_\lambda, n_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, $i_\lambda \in I$, m_λ et n_λ des nombres ordinaux quelconques. Soit $\mathcal{C}_i$, pour $i \in I$, un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$. Le groupoïde $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{P}^{m_\lambda}(\mathcal{C}_{i_\lambda}^{n_\lambda})$ est appliqué par Π sur un sous-groupoïde $\mathcal{C}_\mu$ de $\mathcal{E}$ et nous avons un foncteur Φ_μ de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_\mu$; par Φ_μ sera définie *l'espèce de structures de type* μ sur $\prod_i \mathcal{C}_i$. Sur une famille de groupoïdes $\mathcal{C}_\mu$ de type variable sur $\prod_i \mathcal{C}_i$ on peut de nouveau construire une catégorie $\mathcal{C}_\nu$ de type donné ν. De cette manière sera défini un foncteur Φ_ν de $\Pi\, \mathcal{C}_\mu$ sur $\mathcal{C}_\nu$ et par conséquent aussi un foncteur Φ'_ν de $\prod_i \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_\nu$. Un groupoïde que l'on engendre par itération de ce procédé sera appelé un *groupoïde d'un certain type* sur $\prod_i \mathcal{C}_i$. L'espèce correspondante de structures est appelée une *espèce de structures d'un type donné*.

CATEGORIES D'HOMOMORPHISMES

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ le groupoïde correspondant des isomorphismes, $\mathcal{H}$ une catégorie qui contient $\mathcal{S}$ comme sous-catégorie et pour laquelle la classe des unités (ou objets) est identique à $\mathcal{S}$. Alors $\mathcal{H}$ sera appelé une *catégorie de morphismes* relative à $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}_o$. Si en outre $\mathcal{S}$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ sera appelé une *catégorie d'homomorphismes* relative à $\mathcal{S}_o$ ou $\mathcal{S}$.

Soit $\hat{\mathcal{C}}$ une catégorie de morphismes (ou d'homomorphismes) relative à $\mathcal{C}$ et soit $\hat{p}$ un foncteur de $\mathcal{H}$ dans $\hat{\mathcal{C}}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ soit le foncteur projecteur p de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$. $\mathcal{H}$ sera appelé une *catégorie de morphismes (ou d'homomorphismes) sur* $\hat{\mathcal{C}}$ lorsque la condition suivante est satisfaite: deux éléments h et h' de $\mathcal{H}$ ayant la même unité à droite, la même unité à gauche et la même projection $\hat{p}(h) = \hat{p}(h')$ sont identiques. Chaque $h \in \mathcal{H}$ correspond ainsi biunivoquement à un triplet (S', f, S), $\alpha(h) = S$, $\beta(h) = S'$, $f = \hat{p}(h) \in \hat{\mathcal{C}}$, La classe de tous les triplets (S', f, S) pour lesquels $\alpha(f) = p(S)$, $\beta(f) = p(S')$, $S \in \mathcal{S}_o$, $S' \in \mathcal{S}_o$ forme une catégorie $\overline{\mathcal{H}}$ pour la multipli--cation suivante:

$$(S'', f', S')\,(S', f, S) = (S'', f'f, S).$$

L'application $h \to (\beta(h), \hat{p}(h), \alpha(h))$ est un foncteur biunivoque de $\mathcal{H}$ sur une sous-catégorie de $\overline{\mathcal{H}}$.

$\mathcal{H}$ peut être considéré de différentes manières comme une espèce de structures: sur $\mathcal{C}$, sur $\mathcal{S}$, sur un sous-groupoïde de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ou de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ qui opèrent sur $\mathcal{H}$ de la manière suivante: Etant donnés $h \in \mathcal{H}$, $\alpha(h) = S$, $\beta(h) = S'$, $(f, S) \in \mathcal{S}$, $(g, S') \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$, on a les produits suivants:

$$h f^{-1} = h(f, S)^{-1}, gh = (g, S')h, \ g h f^{-1} = (g, S')h(f, S)^{-1} \ .$$

Donc h peut être considéré comme une structure sur

$$p(S), \ S, \ p(S'), \ S', \ (p(S), p(S')) \text{ ou } (S, S').$$

Le foncteur $\hat{p}$ définit $\hat{\mathcal{C}}$ comme une espèce de structures sous-jacente à $\mathcal{H}$. Nous pouvons considérer plus généralement deux catégories d'isomorphismes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ et une espèce $\mathcal{H}$ de structures sur un sous-groupoïde plein saturé de $\mathcal{S}\times\mathcal{S}'$. Alors $\mathcal{H}$ est appelé une *classe de morphismes relative à* $(\mathcal{S}\times\mathcal{S}')$.

ELARGISSEMENT D'UNE CATEGORIE D'HOMOMORPHISMES

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{S}}_o$ l'élargissement défini ci-dessus de $\mathcal{S}_o$ relatif à $\overline{\mathcal{C}}$. Si $\mathcal{H}$ est une catégorie de morphismes (ou d'homomorphismes) relative à $\mathcal{S}_o$, alors la construction de l'élargissement peut aussi s'appliquer à $\mathcal{H}$, puisque $\mathcal{H}$ est une espèce de structures sur un sous-groupoïde plein saturé de $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$. L'élargissement $\overline{\mathcal{H}}$ est une catégorie de morphismes (ou d'homomorphismes) relative à $\overline{\mathcal{S}}_o$. Si $\mathcal{H}$ est une catégorie d'homomorphismes sur $\hat{\mathcal{C}}$, alors $\overline{\mathcal{H}}$ est une catégorie d'homomorphismes sur l'élargissement correspondant de $\hat{\mathcal{C}}$.

3. Catégories locales et espèces de structures locales.

1. Groupoïdes inductifs. Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde, $\mathcal{S}_o$ la classe correspondante d'unités ou d'objets. Nous considérons $\mathcal{S}_o$ comme une espèce de structures sur $\mathcal{S}$.

DEFINITION. *Le groupoïde $\mathcal{S}$ sera appelé groupoïde inductif (d'isomorphismes), si on s'est donné un foncteur généralisé Φ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}$, appelé foncteur d'induction, vérifiant les axiomes suivants :*

1) Soit $f \in \mathcal{S}$, $S = \alpha(f)$, alors $\Phi(S)$ est la classe des unités à droite des éléments de $\Phi(f)$, c'est-à-dire $\Phi(\alpha(f)) = \alpha(\Phi(f))$. (En réalité cette propriété est une conséquence du fait que Φ est un foncteur généralisé défini sur un groupoïde).

2) Pour tout $s \in \Phi(\alpha(f))$ il n'y a qu'un seul élément $g \in \Phi(f)$ tel que $s = \alpha(g)$: g est appelé l'élément induit par f sur s. (Même remarque que dans 1).

3) Pour tout $g \in \Phi(f)$ on a $\Phi(g) \subset \Phi(f)$.

4) Si $\Phi(f) = \Phi(f')$, alors $f = f'$.

5) Pour toute classe A de $\Phi(f)$ il existe un $g \in \mathcal{S}$ ayant la propriété suivante: $A \subset \Phi(g)$ et $g \in \Phi(f')$ pour tout f' tel que $A \subset \Phi(f')$.

L'élément g de l'axiome 5) est alors déterminé de façon unique et sera appelé *l'agrégat* de A. Nous le désignons par $\cup A$. L'agrégat de g et g' sera désigné par $g \cup g'$. L'agrégat d'une classe d'unités est une unité. L'unité à droite (ou à gauche) de $\cup A$ est l'agrégat des unités à droite (ou à gauche) de A, c'est-à-dire: $\alpha(\cup A) = \cup\alpha(A)$, $\beta(\cup A) = \cup\beta(A)$. L'agrégat de $\Phi(f)$ est f, par conséquent $f \in \Phi(f)$.

Soit $f \in \mathcal{S}$ un isomorphisme de S sur S'. Il correspond alors à f une application biunivoque $\overline{\Phi}(f)$ de $\Phi(S)$ sur $\Phi(S')$ qui applique l'unité à droite s de $g \in \Phi(f)$ sur l'unité à gauche s' de g. $\overline{\Phi}$ est un foncteur.

La relation $g \in \Phi(f)$ *est une relation d'ordre* et peut être désignée par $g < f$. De $g < f$ résulte $\alpha(g) < \alpha(f)$ et $\beta(g) < \beta(f)$.

L'agrégat d'une classe majorée A est la borne superieure de A. L'agrégat de $\Phi(g) \cap \Phi(g')$ sera appelé *l'intersection* de g et g' et désigné par $g \cap g'$. Si $\Phi(g) \cap \Phi(g')$ est vide, nous posons $g \cap g' = 0$ en adjoignant* à $\mathcal{S}$ un petit élément 0. L'intersection d'une classe (g_i) d'éléments est l'agrégat de l'intersection des classes $\Phi(g_i)$. La multiplication dans $\mathcal{S}$ peut être étendue à tous les couples (f', f) de la manière suivante: Soit $s = \alpha(f') \cap \beta(f)$, g l'élément induit de f, tel que $s = \beta(g)$, g' l'élément induit de f' tel que $s = \alpha(g')$. Nous posons alors $f'f = g'g$. Pour cette multiplication étendue, $\mathcal{S}$ n'est pas une catégorie, mais *cette multiplication est associa--tive*.

CATEGORIE DES ISOMORPHISMES LOCAUX

Un *isomorphisme local* de S sur S' est un triplet (S', f, S), où $S \in \mathcal{S}_o$, $S' \in \mathcal{S}_o$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha(f) < S$, $\beta(f) < S'$. La classe $\mathcal{S}^\ell$ de ces triplets est la *catégorie des isomorphis--mes locaux* déduite de $\mathcal{S}$, munie de la multiplication suivante: $(S'', f', S')(S', f, S) = (S'', f'f, S)$. L'unité à droite de (S', f, S) est (S, S, S); l'unité à gauche est (S', S', S'). $\mathcal{S}$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{S}^\ell$: ainsi $\mathcal{S}^\ell$ est aussi une catégorie d'homomorphismes relative à $\mathcal{S}$. Si la multiplication est restreinte aux couples tels que $\alpha(f') = \beta(f)$, alors $\mathcal{S}^\ell$ est un groupoïde. L'unité à droite de (S', f, S) est alors : $(S, \alpha(f), S)$, l'unité à gauche est $(S', \beta(f), S')$.

$\mathcal{S}^\ell$ est aussi une catégorie inductive, pour la relation d'ordre $(S', g, S) < (S', f, S)$, équivalente à $g < f$.

Une sous-classe Γ de $\mathcal{S}^\ell$ est appelée *pseudo-groupe d'isomorphismes locaux* si les conditions suivantes sont vérifiées:

1) Γ est une sous-catégorie de $\mathcal{S}^\ell$.

2) Γ est un sous-groupoïde de $\mathcal{S}^\ell$ pour la multiplication restreinte.

3) L'agrégat d'une classe d'éléments de Γ appattient à Γ.

Les conditions 1) et 2) sont équivalentes à:

$(S', f, S) \in \Gamma$ et $(S'', f', S') \in \Gamma$ entraînent: $(S'', f'f, S) \in \Gamma$, $(S, S, S) \in \Gamma$ et $(S, f^{-1}, S') \in \Gamma$.

* L'existence du plus petit élément 0 est une conséquence de l'axiome 5 appliqué à la sous--classe vide.

Un pseudo-groupe $\Gamma \subset \mathcal{S}^{\ell}$ peut aussi être défini comme un sous-groupoïde Γ de $\mathcal{S}^{\ell}$ qui est saturé relativement à l'intersection de deux unités et à l'agrégation quelcon--que et qui vérifie la condition supplémentaire:

Soit $\varphi \in \Gamma$ et $\varphi' < \varphi$; si l'unité à droite de φ' appartient à Γ, alors φ' appartient aussi à Γ.

L'intersection d'une famille de sous-pseudogroupes de Γ est un sous-pseudo--groupe de Γ. Chaque sous-classe de Γ engendre ainsi un sous-pseudogroupe de Γ.

DEFINITION : *Un groupoïde inductif d'isomorphismes $\mathcal{S}$ sera appelé un groupoïde local (d'isomorphismes) si, outre les axiomes de 1) à 5), les axiomes suivants sont vérifiés :*

6) $(\cup A) \cap s' = \bigcup_{s \in A} (s \cap s')$ si $A \subset \Phi(S)$ et si S et s' sont des unités de $\mathcal{S}$ (Axiome de distributivité).

7) $\Phi(S)$ est un ensemble. (En réalité, on pourrait supprimer cet axiome 7).

EXEMPLE 1: Le groupoïde $\mathcal{E}$ est un groupoïde local d'isomorphismes. Les éléments induits de l'application f de E sur E' sont les restrictions de f aux sous-ensembles de E.

EXEMPLE 2: Une classe $\mathcal{S}_o$ peut être appelée *classe locale* quand on s'est donné dans $\mathcal{S}_o$ une relation d'ordre vérifiant les propriétés suivantes:

1)Chaque sous-classe majorée a une borne supérieure qui sera appelée l'agrégat de A.

2)L'axiome de distributivité 6) est vérifié.

3)Les éléments $s < S$ forment un ensemble $\Phi(S)$. (Cet axiome peut aussi être supprimé).

Soit f un isomorphisme de l'ensemble ordonné $\Phi(S)$ sur l'ensemble ordonné $\Phi(S')$. Les restrictions de f aux ensembles $\Phi(s)$, où $s < S$, forment un ensemble $\Phi(f)$ d'isomorphismes. Soit $\mathcal{S}$ la classe de tous les isomorphismes f. Alors $\mathcal{S}$ est une caté--gorie locale d'isomorphismes avec le foncteur-induction Φ.

EXEMPLE 3: Soit Ω_o la classe des couples (x, M), où $x \in M$ et où M est un ensemble ordonné ayant les propriétés suivantes: Tout sous-ensemble majoré de M a une borne supérieure dans M (agrégat); l'axiome de distributivité est vérifié dans M. On introduit dans Ω_o la relation d'ordre: $(x, M) < (x', M)$, équivalente à $x < x'$ dans M. Ω_o est alors une classe locale, de laquelle on déduira comme ci-dessus une catégorie locale d'isomorphismes Ω.

3-2. Espèce de structures locales sur un groupoïde local.

DEFINITION : *Soit $\mathcal{C}$ un sous-groupoïde du groupoïde local $\overline{\mathcal{C}}$ avec le foncteur d'induc--tion Φ, et soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ le groupoïde des isomorphismes correspondant avec le foncteur projection p sur $\mathcal{C}$. Nous dirons que $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}$ (et $\mathcal{S}$ un groupoïde local d'isomorphismes sur $\mathcal{C}$), si on* *s'est donné dans* $\mathcal{S}$ *un foncteur d'induction* Ψ *vérifiant les axiomes suivants :*

a) Soit $(f, S) \in \mathcal{S}$, $p(f, S) = f \in \mathcal{C}$. *Alors* $\Psi(f, S)$ *est appliqué biunivoquement par* p *sur un sous-ensemble de* $\Phi(f)$; *en particulier* $\Psi(S)$ *sera appliqué biunivoquement par* p *sur un sous-ensemble de* $\Phi(E)$, *où* $E = p(S)$.

b) Si $s \in \Psi(S)$, $s' \in \Psi(S)$, *alors :* $p(s \cap s') = p(s) \cap p(s')$,

c) Si $A \subset \Psi(S)$, *alors il existe un* $\sigma \in \Psi(S)$ *tel que* $p(\sigma) = \cup\, p(A)$. *Il en résulte* $\sigma = \cup A$, *ainsi que* $p(\cup A) = \cup\, p(A)$.

De a), b), c), résulte que $\mathcal{S}$ *est un groupoïde local relativement à* Ψ.

Une famille (f_i, s_i) d'éléments de $\mathcal{S}$ sera dite *compatible* si les conditions sui--vantes sont vérifiées : $p(s_i \cap s_j) = p(s_i) \cap p(s_j)$; $\alpha(f_i \cap f_j) = p(s_i \cap s_j)$; la famille (f_i) a un agrégat $f \in \overline{\mathcal{C}}$. Pour une famille (s_i) d'unités, ces conditions deviennent : $p(s_i \cap s_j) = p(s_i) \cap p(s_j)$; la famille $(p(s_i))$ a un agrégat.

DEFINITION : *Nous dirons que* $\mathcal{S}_o$ *est une espèce de structures locales complète sur* $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$, *si a), b), c) et l'axiome d) suivant sont satisfaits :*

d) Toute famille compatible (f_i, s_i) *d'éléments de* $\mathcal{S}$ *a un agrégat* (f, S).

On déduit de là que f est l'agrégat de (f_i), S l'agrégat de (s_i). Nous verrons qu'une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}$ peut toujours être complétée.

REMARQUE : Le foncteur Ψ est déjà déterminé par Ψ_o, p *et* Φ, où Ψ_o désigne la restriction de Ψ à $\mathcal{S}_o$. Les axiomes peuvent facilement s'exprimer à l'aide de Ψ_o, p et Φ. Ψ_o sera appelée *loi d'induction* dans $\mathcal{S}_o$.

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}$. Si $S \in \mathcal{S}_o$, $E = p(S)$, alors désignons par $\tau(S)$ l'ensemble des éléments $p(s)$ pour tous les $s < S$. Alors $\tau(S)$ est un sous-ensemble de $\Phi(E)$ ayant les propriétés suivantes : $\tau(S)$ est saturé par rapport à l'intersection finie et l'agrégation quelconque ; en outre E et o appartiennent à $\tau(S)$. Donc $\tau(S)$ est une paratopologie sur E conformément à la définition suivante :

DEFINITION : *Une paratopologie sur* E *est un sous-ensemble quelconque* T *de* $\Phi(E)$, *saturé relativement à l'intersection finie et à l'agrégation quelconque et qui contient* E *et* o.

Les paratopologies sur les objets de $\overline{\mathcal{C}}$ forment une espèce de structures $\mathcal{T}_o(\overline{\mathcal{C}})$ sur $\overline{\mathcal{C}}$. Soit T une paratopologie sur E, $f \in \mathcal{C}$, $\alpha(f) = E$, $\beta(f) = E'$. Alors $f\,\mathrm{T}$ est l'ensemble image de T dans $\Phi(E')$ par l'isomorphisme $\overline{\Phi}(f)$ de $\Phi(E)$ sur $\Phi(E')$. Nous désignons par $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{C}})$ le groupoïde d'isomorphismes correspondant. $\mathcal{T}_o(\overline{\mathcal{C}})$ *est une espèce de structures locales complète sur* $\overline{\mathcal{C}}$. Le foncteur d'induction Φ' dans $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{C}})$ sera défini comme suit : Pour chaque $e \in \mathrm{T}$, $\Phi(e) \cap \mathrm{T}$ est une paratopologie t sur e qui est la paratopologie induite par T sur e. Chaque élément $e \in \mathrm{T}$ est appelé élément ouvert pour T. L'isomorphisme induit par $(f, \mathbb{T})$ sur t est (g, t), où g est l'élément induit par f sur e. Si $\overline{\mathcal{C}}$ est le groupoïde $\mathfrak{S}$, $\mathcal{T}_0(\mathfrak{S})$ est alors l'espèce $\mathcal{T}_0$ de toutes les topologies et $\mathcal{T}(\mathfrak{S})$ le groupoïde $\mathcal{T}$ de tous les homéomorphismes.

PROPOSITION : *La classe des paratopologies $\tau(S)$ pour $S \in \mathcal{S}_0$ est une espèce de structures $\tau(\mathcal{S}_0)$ sur $\mathcal{C}$ qui est sous-jacente à l'espèce de structures $\mathcal{S}_0$; ainsi $\pi(S)$ est la paratopologie sous-jacente à S.*

Si (f, S) est un isomorphisme de S sur S', nous désignons par $f\pi(S)$ l'ensemble image de $\pi(S)$ par $\overline{\Phi}(f)$. L'application τ est permutable avec $\mathcal{C}$; $f\pi(S) = \pi(fS)$. Donc $\mathcal{T}_0(\overline{\mathcal{C}})$ ainsi que $\pi(\mathcal{S}_0)$ est une espèce de structures sous-jacente à $\mathcal{S}_0$. Nous désignons aussi par τ le foncteur correspondant de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{C}})$: $\pi(f, S) = (f, \pi(S))$. Pour le foncteur p on a la décomposition canonique $p = q\tau$, où q est le foncteur projection de $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{C}})$ sur $\overline{\mathcal{C}}$. Ainsi $\pi(\mathcal{S})$ est un groupoïde d'isomorphismes sous-jacent à $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}_0$ est une espèce de structures locales sur $\pi(\mathcal{S})$ et $\pi(\mathcal{S}_0)$ est une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}$: *Si $\mathcal{S}_0$ est une espèce de structures locales complète sur $\mathcal{C}$, alors $\pi(\mathcal{S}_0)$ n'est pas toujours complète sur $\mathcal{C}$, mais $\mathcal{S}_0$ est une espèce complète sur $\pi(\mathcal{S})$.*

REMARQUE : La plupart des notions qui sont définies pour les topologies ont aussi un sens pour les paratopologies : par exemple les notions "connexe", "localement connexe" "compact", ainsi que les groupes de cohomologie de Cech.

Soit $\mathcal{S}_0$ une classe locale quelconque, $E \in \mathcal{S}_0$, T une paratopologie sur E, $\mathcal{S}$ le groupoïde local correspondant. Sur chaque élément $e < E$ la paratopologie T détermine une paratopologie induite t, qui est définie par l'ensemble des intersections de e avec les éléments de T. On en déduit un foncteur d'induction généralisé; mais celui-ci ne satisfait plus aux axiomes d'un groupoïde inductif.

Un isomorphisme de T sur T' (paratopologie sur $E' \in \mathcal{S}_0$) est un couple (f, T), où f est un isomorphisme de $\Phi(E)$ sur $\Phi(E')$ qui applique T sur T'. La classe des isomorphismes est un groupoïde local $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ d'isomorphismes sur le groupoïde local $\mathcal{S}$. On définit une catégorie d'homomorphismes relative à $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ de la manière suivante: Soit $\tilde{\mathcal{S}}$ la classe des applications h de $\Phi(E)$ dans $\Phi(E')$ ayant les propriétés suivantes: Soit $\alpha_i \in \Phi(E)$. Si $\alpha_1 < \alpha_2$, alors $h(\alpha_1) < h(\alpha_2)$; $h(\cup \alpha_i) = \cup(h(\alpha_i))$; de $h(\alpha) = 0$ résulte $\alpha = 0$. *$\tilde{\mathcal{S}}$ est une catégorie d'homomorphismes relative à $\mathcal{S}$; h* est un homomorphisme de E vers E'.

A l'homomorphisme $h \in \tilde{\mathcal{S}}$ correspond une application h^* de $\Phi(E')$ dans $\Phi(E)$: $h^*(\alpha')$ est l'agrégat des éléments α de $\Phi(E)$ pour lesquels $h(\alpha) < \alpha'$, $\alpha' \in \Phi(E)$. De $\alpha'_1 < \alpha'_2$ il résulte $h^*(\alpha'_1) < h^*(\alpha'_2)$, $h^*(0) = 0$, $h^*(E') = E$.

Un triplet (T', h, T) est un homomorphisme de T dans T' si $h \in \tilde{\mathcal{S}}$, $\alpha(h) = E$, $\beta(h) = E'$ et si $h^*(e')$ est un élément ouvert pour T pour tout élément e' ouvert pour T'. *La classe des homomorphismes (T', h, T) est une catégorie d'homomorphismes* *sur* $\tilde{\mathcal{S}}$. Si $\mathcal{S}_o = \mathcal{E}_o$, alors $\tilde{\mathcal{S}}$ est équivalent à la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}$ des applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque et la catégorie correspondante d'homomorphismes de topologies est la catégorie des applications continues.

REMARQUE : Plus généralement, on a la notion d'une espèce inductive de structures $\mathcal{S}_o$ et d'un groupoïde inductif d'isomorphismes $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est un sous-groupoïde d'un groupoïde inductif $\overline{\mathcal{C}}$ qui ne vérifie pas forcément les axiomes 6) et 7). La notion est définie comme ci-dessus par les axiomes a), b), c). Si on adjoint d), alors $\mathcal{S}_o$ ou $\mathcal{S}$ est encore dit complet. Cependant beaucoup de résultats de la théorie des structures locales dépendent de l'axiome de distributivité 6).

ESPECE DE STRUCTURES LOCALES SOUS-JACENTE

Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}'_o$ une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}'$, où : $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \subset \overline{\mathcal{C}}$. Nous désignons par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ les groupoïdes des isomorphismes correspondants, par p et p' les foncteurs projection sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, par Ψ et Ψ' les foncteurs d'induction dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Nous dirons que $\mathcal{S}'_o$ est une *espèce de structures locales sous-jacente à* $\mathcal{S}_o$, s'il existe un foncteur q de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$, avec les propriétés suivantes : $p'q = p$, $q(\Psi(f)) \subset \Psi'(q(f))$. Alors $\mathcal{S}_o$ est aussi une espèce de structures locales sur $q(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}'$.

ESPECE DE SUPERSTRUCTURES LOCALES

Une espèce $\overline{\mathcal{S}}_o$ de structures locales sur $\mathcal{S}$ est aussi une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}$ et nous appellerons $\overline{\mathcal{S}}_o$ une *espèce de superstructures locales sur* $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$.

3-3. Catégories inductives d'homomorphismes.

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes inductifs d'isomorphismes. L*e produit* $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ *est alors un groupoïde inductif pour le foncteur d'induction* Θ *suivant :* Pour $(u, v) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}'$, $\Theta(u, v)$ est la classe des couples (u', v') ayant la propriété : $u' < u$, $v' < v$. L'agrégat d'une famille d'éléments (u_i, v_i) est $(\cup u_i, \cup v_i)$; l'intersection est : $(\cap u_i, \cap v_i)$. Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde inductif d'isomorphismes sur $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{S}'$ un groupoïde inductif d'isomorphismes sur $\mathcal{C}' \subset \overline{\mathcal{C}}'$. Les groupoïdes $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}'$ sont des groupoïdes inductifs et par conséquent aussi $\overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{C}}'$. Ainsi $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ est un groupoïde inductif d'isomorphismes sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \subset \overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{C}}'$.

Soit $\mathcal{H}$ une catégorie d'homomorphismes (ou plus généralement de morphismes) relative à $\mathcal{S}$. Alors $\mathcal{H}$ est une espèce de structures sur $\mathcal{S}$ ou sur un sous-groupoïde Π de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Nous appellerons $\mathcal{H}$ une *catégorie inductive d'homomorphismes* (ou de morphismes) si une loi d'induction I est donnée dans $\mathcal{H}$ telle que $\mathcal{H}$ soit une espèce de structures inductives sur $\mathcal{S}$ ou sur Π et telle que de plus les conditions suivantes soient vérifiées :

1) Si $I(h)$ désigne la classe des éléments induits par $h \in \mathcal{H}$, alors : $I(h'h) = I(h')\,I(h)$, si $h'h$ est défini.

2) Si $h \in \mathcal{S}$ alors $\Psi(h) = I(h) \cap \mathcal{S}$, où Ψ est le foncteur d'induction dans $\mathcal{S}$.

Si l'axiome d'agrégation d) est vérifié, $\mathcal{H}$ sera dit *complet.*

Considérons $\mathcal{H}$ comme une espèce de structures inductives sur $\Pi \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Soit h un homomorphisme de S dans S', $S \in \mathcal{S}_o$, $S' \in \mathcal{S}_o$ et $h' < h$. Alors h' est un homomorphisme de s dans s' : $s < S$, $s' < S'$; à tout couple $(s, s') < (S, S')$ correspond au plus un élément h' ayant les propriétés suivantes : $h' < h$, $\alpha(h') = s$, $\beta(h') = s'$. Pour une famille d'éléments $h_i < h$ les relations suivantes sont vérifiées :

$$\alpha(\cup\, h_i) = \cup\,(\alpha(h_i)), \quad \beta(\cup\, h_i) = \cup\,(\beta(h_i)),$$
$$\alpha(h_i \cap h_j) = \alpha(h_i) \cap \alpha(h_j), \quad \beta(h_i) \cap \beta(h_j) = \beta(h_i \cap h_j).$$

On peut imposer à la loi d'induction dans $\mathcal{H}$ des conditions supplémentaires, par exemple les suivantes :

1) Pour tout $s < S$, il existe un élément $h_s \in I(h)$ pour lequel $\alpha(h_s) = s$, $\beta(h_s) = S'$.

2) Soit $h' \in \mathcal{H}$, $\alpha(h') = s$, $\beta(h') = s'$, $s' < S'$: alors il existe un élément et un seul $h \in \mathcal{H}$ pour lequel : $h' < h$, $\alpha(h) = s$, $\beta(h) = S'$.

3) De $\beta(h) = 0$ résulte $h = 0$, et par conséquent $\alpha(h) = 0$.

Ces conditions sont satisfaites dans le cas de la catégorie des applications continues.

Soit $h_{s'}$ l'agrégat des éléments $h' \in I(h)$, pour lesquels $\beta(h') = s'$. Alors on a $h_{s'} \in I(h)$. Si nous désignons par $h^*(s')$ l'élément $\alpha(h_{s'})$, alors h^* est une application de $\Psi(S')$ dans $\Psi(S)$: $h^*(S') = S$, $h^*(0) = 0$. *Les fonctions* $s \to h_s$ *et* $s' \to h_{s'}$ *définissent pour* $h \in \mathcal{H}$, *deux lois d'induction qui font de* $\mathcal{H}$ *une espèce de structures inductives sur* $\mathcal{S}$; dans le premier cas h sera considéré comme une structure sur $\alpha(h)$, dans le deuxième cas sur $\beta(h)$.

Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local d'isomorphismes sur $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{C}}$ une catégorie inductive d'homomorphismes pour $\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}$ une catégorie inductive d'homomorphismes pour $\mathcal{S}$ et $\tilde{p}$ un foncteur de $\mathcal{H}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$ ayant les propriétés suivantes :

1) La restriction de $\tilde{p}$ à $\mathcal{S}$ est le foncteur de projection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$.

2) Si nous considérons $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$ comme des espèces de structures inductives sur deux groupoïdes de $\overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{C}}$, alors $\tilde{\mathcal{C}}$ est une espèce de structures inductives sous-jacente à $\mathcal{H}$ pour $\tilde{p}$.

3) A tout $h \in \mathcal{H}$ correspond un triplet (S', f, S), où $S = \alpha(h)$, $S' = \beta(h)$, $f = \tilde{p}(h)$. L'application $h \to (S', f, S)$ est biunivoque. $\mathcal{H}$ sera alors appelé une *catégorie d'homomorphismes inductive sur* $\tilde{\mathcal{C}}$. Nous pouvons représenter chaque $h \in \mathcal{H}$ par un triplet (S', f, S) ; les éléments induits de h sont représentés par certains triplets :

$$(s', g, s), \text{ où } s' < S', \quad s < S, \quad g < f.$$

CATEGORIE DES HOMOMORPHISMES LOCAUX

Une catégorie inductive $\mathcal{H}$ d'homomorphismes pour $\mathcal{S}$ peut être plongée dans une catégorie $\mathcal{H}^{\ell}$ de la manière suivante : un homomorphisme local de S dans S' est un triplet (S', h, S), où $h \in \mathcal{H}$, $\alpha(h) = s < S$, $\beta(h) = S'$. La catégorie $\mathcal{H}^{\ell}$ est la classe de ces triplets munie de la multiplication suivante : $(S'', h', S')\ (S', h, S) = (S'', h'h, S)$, où $h'h$ est défini par $h'h_{s'}, h_{s'}$ étant l'élément considéré ci-dessus induit par h sur $s' = \alpha(h')$. La catégorie $\mathcal{S}^{\ell}$ des isomorphismes locaux s'identifie avec une sous-caté-gorie de $\mathcal{H}^{\ell}$ en identifiant un isomorphisme g de s sur $s' < S'$ avec l'homomorphisme bien déterminé h correspondant de s dans S' pour lequel $h_s = g$.

Si $\mathcal{H}$ est une catégorie inductive d'homomorphismes sur $\tilde{\mathcal{C}}$, alors l'homomorphisme local (S', h, S) peut aussi être représenté par (S', f, S), $f = \tilde{p}(h)$.

3-4. Structures localement isomorphes.

Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local d'isomorphismes et A une classe d'isomorphismes locaux (S', f_i, S_i). Si S' est l'agrégat des éléments $\beta(f_i)$, A sera appelé *un atlas de* $\mathcal{S}_o$ *sur* S'. Si, en outre, tous les S_i sont identiques à S, A sera appelé un *atlas de* S *sur* S'. Nous disons que S' est *localement isomorphe* à S, s'il existe un atlas A de S sur S'. Soit $\mathcal{A}$ la classe de tous les atlas de S sur S', où S et S' sont des éléments quelconques de $\mathcal{S}_o$. $\mathcal{A}$ est *une catégorie d'homomorphismes relative à* $\mathcal{S}$ avec la multipli-cation suivante: soit A un atlas de S sur S', A' un atlas de S' sur S'', alors $A'A$ est la classe de tous les produits $\varphi'\varphi$, $\varphi \in A$, $\varphi' \in A'$. L'unité à droite de A est l'atlas représenté par (S, S, S) et qui sera identifié avec S.

Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local d'isomorphismes sur $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$. Le foncteur projection p de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$ peut être étendu à $\mathcal{S}^{\ell}$: $p(S', f, S) = (p(S'), p(f), p(S)) \in \overline{\mathcal{C}}^{\ell}$. Si S, S' et $(E', g, E) \in \overline{\mathcal{C}}^{\ell}$ sont donnés, alors il y a au plus un $(S', f, S) \in \mathcal{S}^{\ell}$ tel que $p(S', f, S) = (E', g, E)$. Nous disons que (E', g, E) *détermine un isomorphisme local* de S sur S' si $(E', g, E) = p(S', f, S)$ et nous désignons alors (S', f, S) aussi par (S', g, S). Si A est un atlas de S sur S', alors $p(A)$ est un atlas de $p(S)$ sur $p(S')$. Si $\Gamma(S)$ désigne le pseudo-groupe de tous les automorphismes locaux de S, alors $p(\Gamma(S))$ est un sous-pseudogroupe de $\Gamma(E)$, $E = p(S)$. L'atlas $p(A)$ est compatible avec $p(\Gamma(S))$ confor-mément à la définition suivante:

DEFINITION : *Un atlas B de E sur $E' \in \mathcal{C}_o$ est dit compatible avec un sous-pseudo-groupe Γ' de $\Gamma(E)$ si $(E, g_j^{-1} g_i, E) \in \Gamma'$ pour tout couple d'éléments (E', g_i, E) et (E', g_j, E) de B.*

Soit $\mathcal{B}$ la classe de tous les atlas B qui vérifient les conditions suivantes: B est un atlas de $E \in \mathcal{C}_o$ sur $E' \in \mathcal{C}_o$; si $(E', g, E) \in B$, alors $g \in \mathcal{C}$.

PROPOSITION : *Si* $\mathcal{S}$ *est un groupoïde local d'isomorphismes complet sur* $\mathcal{C}$, *alors tout atlas* $B \in \mathcal{B}$ *compatible avec* $p(\Gamma(S))$ *détermine un atlas* $A \in \mathcal{A}$ *tel que* $\alpha(A) = S \in \mathcal{S}_0$ *et* $p(A) = B$. *Ainsi* $S' = \beta(A)$ *est aussi déterminé; nous posons* $S' = B.S$ *et nous disons que* B *transporte la structure* S *sur* E *en la structure* S' *sur* E'.

Soit $(E', g, E) \in B$, $\alpha(g) = p(S)$, $s < S$, $gs = s'$. Les structures s' forment alors une famille compatible sur E et ont un agrégat S'. Les triplets (S', g, S) forment l'atlas A et $S' = B.S$. Les couples (B, S) pour lesquels B est compatible avec $p(\Gamma(S))$ forment une catégorie qui est équivalente à $\mathcal{A}$.

REMARQUE : Mentionnons ici brièvement une autre catégorie importante d'homomorphismes relative à $\mathcal{S}$. Soit φ une classe d'isomorphismes locaux $(S', f_i, S) \in \mathcal{S}^\ell$ ayant les propriétés suivantes : S est l'agrégat des éléments $\alpha(f_i)$; $\alpha(f_i \cap f_j) = \alpha(f_i) \cap \alpha(f_j)$; φ est saturé relativement à l'induction et à l'agrégation. Alors nous appelons φ un *étalement* de S dans S'. (S, φ) est une structure étalée dans S'. *Les étalements forment une catégorie d'homomorphismes relative à* $\mathcal{S}$; *cette catégorie, comme la catégorie* $\mathcal{A}$, *est une catégorie inductive d'homomorphismes relative à* $\mathcal{S}$.

3-5. Elargissement d'une espèce de structures locales.

Soit $\mathcal{S}_0$ une espèce de structures locales sur $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$. Alors $\mathcal{S}_0$ peut être élargi en une espèce $\mathcal{S}'_0$ de structures locales sur $\mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}'$ est un sous-groupoïde plein saturé de $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$.

Une *carte locale* de $\mathcal{S}_0$ sur $E' \in \overline{\mathcal{C}}_0$ est un triplet (E', f, S) tel que $f \in \mathcal{C}$, $S \in \mathcal{S}_0$, $\alpha(f) = p(s)$, $s < S$, $\beta(f) < E'$.

Un *atlas* de $\mathcal{S}_0$ sur E' est une classe A de cartes locales (E', f_i, S_i) ayant les propriétés suivantes : E' est l'agrégat des éléments $\beta(f_i)$; si $(E', f_i, S_i) \in A$, et $(E', f_j, S_j) \in A$, alors $(S_j, f_j^{-1} f_i, S_i) \in \mathcal{S}^\ell$.

$\mathcal{S}^\ell$ opère sur la classe Σ de toutes les cartes (E', f, S) de la manière suivante: $(E', f, S)(S, g, S_1) = (E', fg, S_1)$, où $(S, g, S_1) \in \mathcal{S}^\ell$, $g \in \mathcal{C}$. L'agrégat d'une classe de cartes (E', f_i, S) est (E', f, S), où $f = \cup f_i$. Un atlas A de $\mathcal{S}_0$ sur E' est dit *complet* lorsqu'il est saturé par rapport à $\mathcal{S}^\ell$ et à l'agrégation. En saturant un atlas quelconque A tout d'abord par rapport à $\mathcal{S}^\ell$ et ensuite par rapport à l'agrégation, on obtient un atlas complet $\overline{A}$; chaque atlas complet qui contient A est identique à $\overline{A}$. Soit $\mathcal{S}'_0$ la classe de tous les atlas complets de $\mathcal{S}_0$ sur les éléments de $\overline{\mathcal{C}}_0$. Ces éléments déterminent un sous-groupoïde $\mathcal{C}'$ de $\overline{\mathcal{C}}$, plein et saturé. Le groupoïde $\mathcal{C}'$ opère sur $\mathcal{S}'_0$ de la manière suivante : soit A un atlas complet sur E', $f \in \mathcal{C}'$, $\alpha(f) = E'$: alors fA est un atlas complet sur $E'' = \beta(f)$. Ainsi $\mathcal{S}'_0$ est une espèce de structures sur $\mathcal{C}'$; nous désignons par $\mathcal{S}'$ le groupoïde d'isomorphismes correspondant.

PROPOSITION : *$\mathcal{S}'_o$ une espèce de structures locales complète sur $\mathcal{C}'$.*

Si A est un atlas complet de $\mathcal{S}_o$ sur E', alors A détermine sur E' une paratopo--logie $\mathcal{T}(A)$; un élément e' de $\mathcal{T}(A)$ est l'agrégat d'un ensemble quelconque d'éléments $\beta(f_i)$, où f_i correspond à une carte $(E', f_i, S_i) \in A$. A la carte $(E', f_i, S_i) \in A$ corres--pond la carte (e', f_i, S_i), où $\beta(f_i) < e'$. La classe de ces cartes (e', f_i, S_i) est un atlas complet $A_{e'}$ de $\mathcal{S}_o$ sur e', Soit $A_{e'}$ l'atlas induit par A sur e'. On définit ainsi une loi d'induction dans $\mathcal{S}'_o$, de sorte que $\mathcal{S}'_o$ est une espèce de structures locales sur $\mathcal{C}'$. On démontre facilement que l'axiome d'agrégation est satisfait. $\mathcal{S}_o$ sera identifié à une sous-espèce de $\mathcal{S}'_o$ en identifiant $S \in \mathcal{S}_o$ à l'atlas complet qui est engendré par la carte : $(p(S), p(S), S)$.

Nous appelons $\mathcal{S}'_o$ l'élargissement complet de $\mathcal{S}_o$ et $\mathcal{S}'$ l'élargissement complet de $\mathcal{S}$. On montre que $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde plein de $\mathcal{S}'$.

Soit $\mathcal{S}''_o$ une espèce de structures locales complète sur $\mathcal{C}'$, telle que $\mathcal{S}_o \subset \mathcal{S}''_o$ et que chaque structure $S'' \in \mathcal{S}''_o$ soit un agrégat de structures s''_i, où tout s''_i est isomorphe à une structure $s_i \in \mathcal{S}_o$. Si de plus $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde plein de $\mathcal{S}'$, alors $\mathcal{S}''_o$ est équivalent à $\mathcal{S}'_o$.

Si $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures locales incomplète sur $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{S}_o$ peut toujours être élargi en une espèce complète $\tilde{\mathcal{S}}_o$ de structures locales sur $\mathcal{C}$. Une struc--ture de l'espèce $\tilde{\mathcal{S}}_o$ peut être définie comme un ensemble de structures compatibles s_i sur $E \in \mathcal{C}_o$, c'est-à-dire $p(s_j) < E$ et $p(s_i \cap s_j) = p(s_i) \cap p(s_j)$, qui est en outre saturé par rapport à l'induction et à l'agrégation dans $\mathcal{S}_o$.

L'élargissement complet $\mathcal{S}'_o$ de $\mathcal{S}_o$ peut aussi être défini de la manière sui--vante : nous considérons maintenant seulement les cartes (E', f, S) pour lesquelles $\alpha(f) = p(S)$ et les atlas de $\mathcal{S}_o$ sur E' qui sont formés de telles cartes. Le groupoïde $\mathcal{S}$ opère sur la classe de toutes les cartes de la manière suivante : $(E', f, S)(g, S_1) = (E', fg, S_1)$ si $(g, S_1) \in \mathcal{S}$, $gS_1 = S$. Un atlas A de $\mathcal{S}_o$ sur E' sera maintenant dit *complet* s'il est saturé relativement à $\mathcal{S}$, à l'induction et à l'agrégation : une carte induite de (E', f, S) est (E', g, S), où $g < f$, $s < S$, $\alpha(g) = p(s)$. L'agrégat d'une classe de cartes (E', f_i, S_i) est $(E', \cup f_i, \cup S_i)$. Chaque atlas A donne par saturation relativement à $\mathcal{S}$, induction et agrégation un atlas complet $\overline{A}$. *La classe $\mathcal{S}''_o$ des atlas complets de $\mathcal{S}_o$ sur des éléments de $\overline{\mathcal{C}}_o$ est une espèce de structures locales sur le groupoïde $\mathcal{C}'$ précédemment défini et $\mathcal{S}''_o$ est équivalent à $\mathcal{S}'_o$.* Une structure induite de $A \in \mathcal{S}''_o$ est ici simplement un $A' \in \mathcal{S}''_o$ tel que $A' \subset A$.

ELARGISSEMENT D'UN SPEUDOGROUPE

Soit Γ un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}^{\ell}$. Nous associons à Γ une catégorie locale complète d'isomorphismes $\mathcal{S}(\Gamma)$. Soit A un atlas de $\mathcal{S}$ sur E' : les éléments de A sont de nouveau des cartes locales (E', f_i, S_i), où $f_i \in \overline{\mathcal{C}}$, $\alpha(f_i) = p(s_i)$, $s_i < S_i$, $\beta(f_i) < E'$. Nous disons que A est *compatible* avec Γ si $(S_j, f_j^{-1} f_i, S_i) \in \Gamma$ pour tout couple de cartes (E', f_i, S_i) et (E', f_j, S_j) de A. Il en résulte: $(S_i, f_i^{-1} f_i, S_i) \in \Gamma$, c'est-à-dire: $(S_i, \alpha(f_i), S_i) \in \Gamma$.

Un atlas A compatible avec Γ est dit *complet* quand il est saturé relativement à Γ et à l'agrégation. Soit $\mathcal{S}_o(\Gamma)$ la classe des atlas complets compatibles avec Γ. Alors $\mathcal{S}_o(\Gamma)$ *forme une espèce de structures locales complète sur un sous-groupoïde* $\mathcal{C}''$ *de* $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}'$. Puisque chaque atlas $A \in \mathcal{S}_o(\Gamma)$ détermine un atlas complet $\bar{A}$ relativement à $\mathcal{S}^{\ell}$, $\mathcal{S}'_o$ est une espèce de structures locales sous-jacente à $\mathcal{S}_o(\Gamma)$. Nous appelons $\mathcal{S}_o(\Gamma)$ *l'espèce de structures associée à* Γ.

Soit S, identifié à (S, S, S), une unité de Γ. Alors $(p(S), p(S), S)$ est un atlas sur $p(S)$ compatible avec Γ; celui-ci détermine sur $p(S)$ une structure $\bar{S} \in \mathcal{S}_o(\Gamma)$ pour laquelle S est la structure sous-jacente. Le pseudogroupe $\bar{\Gamma}$ des isomorphismes locaux pour la classe des structures $\bar{S}$ ainsi associées aux structures $S \in \mathcal{S}_o$ se pro-jette biunivoquement sur Γ. Nous pouvons identifier Γ à $\bar{\Gamma}$ et *le pseudogroupe des isomorphismes locaux de* $\mathcal{S}_o(\Gamma)$ *est un élargissement de* $\bar{\Gamma}$. La carte (E', f, S) de $A \in \mathcal{S}_o(\Gamma)$ détermine l'isomorphisme local $(A, f, \bar{S})$.

EXEMPLES: La construction de $\mathcal{S}_o(\Gamma)$ conduit à d'importantes espèces de structures locales. Dans l'espace numérique R^n, soit Λ_n^r le pseudogroupe des homéomorphismes locaux (R^n, f, R^n) de la classe r, c'est-à-dire dans $\alpha(f)$ l'homéomorphisme f a des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre r et le déterminant fonctionnel est différent de 0 en chaque point de $\alpha(f)$. Ici r peut prendre les valeurs entières de 0 à ∞; si de plus f est analytique, on a le pseudogroupe Λ_n^{ω}. Nous pouvons identifier (R^n, f, R^n) à f. Alors Λ_n^r est un groupoïde local d'isomorphismes: $\Lambda_n^r \subset \Lambda_n^k \subset \Lambda_n^o \subset \mathfrak{S}$, où $k < r$. Soit C_n^r l'élargissement complet de Λ_n^r relativement à $\mathfrak{S}$. Le groupoïde C_n^k, pour $k < r$, est un groupoïde local d'isomorphismes sous-jacent à C_n^r. On définit C^r comme la som-me des catégories C_n^r, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Les structures de l'espèce* $(C^r)_o$ *seront appelées variétés (différentiables) de la catégorie* C^r. (Autres exemples dans IV).

ELARGISSEMENT D'UNE CATEGORIE INDUCTIVE D'HOMOMORPHISMES

Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local d'isomorphismes, $\mathcal{S}'$ un élargissement de $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ une catégorie inductive d'homomorphismes relative à $\mathcal{S}$. *La construction de l'élargissement d'une espèce de structures locales conduit alors aussi à un élargissement* $\mathcal{H}'$ *de* $\mathcal{H}$ *tel que* $\mathcal{H}'$ *soit une catégorie inductive d'homomorphismes relative à* $\mathcal{S}'$.

Soit en outre $\mathcal{S}$ un groupoïde local d'isomorphismes sur $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{C}}$ une catégorie inductive d'homomorphismes relative à $\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}$ une catégorie inductive d'homomorphismes relative à $\mathcal{S}$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$. Alors *l'élargissement* $\mathcal{H}'$ *de* $\mathcal{H}$ *est aussi une catégorie inductive* *d'homomorphismes sur* $\tilde{\mathcal{C}}$. Un élément $h' \in \mathcal{H}'$ s'identifie à un triplet (S', g, S) ayant les propriétés: $S \in \mathcal{S}'_o$, $S' \in \mathcal{S}'_o$, $g \in \tilde{\mathcal{C}}$, $(S'_1, f'^{-1} g f, S_1) \in \mathcal{H}$ si $(S, f, S_1) \in \mathcal{S}'^{\ell}$, $(S', f', S'_1) \in \mathcal{S}'^{\ell}$ et $S_1 \in \mathcal{S}_o$, $S'_1 \in \mathcal{S}_o$.

4. Produits locaux, feuilletages, fibrations.

1. Produits locaux. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux sous-groupoïdes de $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ un groupoïde local d'isomorphismes sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ un groupoïde local d'isomorphismes sur $\mathcal{C}'$, p et p' les foncteurs projection correspondants. Nous avons déjà indiqué les foncteurs d'induction dans $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ et $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ devienne un groupoïde d'isomorphismes sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \subset \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Si $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ est identifié par le foncteur Π à un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$, alors nous aurons aussi à considérer le foncteur d'induction dans $\mathcal{E}$. Nous pouvons élargir $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ en un groupoïde local d'isomorphismes sur un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$.

Soit $S_i \in \mathcal{B}_o$, $p(S_i) = B_i$, $S'_i \in \mathcal{F}_o$, $p'(S'_i) = F_i$. Le couple (S_i, S'_i) sera considéré comme une structure $S_i \times S'_i$ sur $B_i \times F_i$. L'ensemble $B_i \times F_i$ est muni de la topologie produit $\tau(S_i) \times \tau(S'_i)$. Soit : $s_i < S_i$, $s'_i < S'_i$, $g \in \mathcal{C}, g' \in \mathcal{C}'$, $(g, s_1) \in \mathcal{B}$, $(g', s'_1) \in \mathcal{F}$, $g s_1 = s_2$, $g' s'_1 = s'_2$. Alors $p(s_i) \times p'(s'_i)$ est un ensemble ouvert de $B_i \times F_i$ et $g \times g'$ est un homéomorphisme de $p(s_1) \times p'(s'_1)$ sur $p(s_2) \times p'(s'_2)$. Soit $f \in \mathcal{E}$ l'agrégat d'un ensemble d'applications $g \times g'$ pour des structures données S_i et S'_i, $i = 1, 2$. Alors f est un homéomorphisme d'un ensemble ouvert de $B_1 \times F_1$ sur un ensemble ouvert de $B_2 \times F_2$. Le triplet $(S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1)$ sera appelé *isomorphisme local* de $S_1 \times S'_1$ sur $S_2 \times S'_2$. La classe Γ de ces triplets est une catégorie pour la multiplication suivante:

$$(S_3 \times S'_3, f', S_2 \times S'_2)\ (S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1) = (S_3 \times S'_3, f' f, S_1 \times S'_1).$$

Les triplets $(S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1) \in \Gamma$ pour lesquels $\alpha(f) = p(S_1) \times p'(S'_1)$, $\beta(f) = p(S_2) \times p'(S'_2)$ forment un groupoïde Γ' qui contient $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ comme sous-groupoïde. Sur tout ensemble $\mathcal{U}$ de $B_1 \times F_1$ ouvert par rapport à $\tau(S_1) \times \tau(S'_1)$ en définit facilement une structure $(S_1 \times S'_1)_U$ induite par $S_1 \times S'_1$. Cette structure induite $(S_1 \times S'_1)_U$ est la classe des triplets $(U, f, S \times S')$ tels que $(S_1 \times S'_1, f, S \times S') \in \Gamma$, $\beta(f) \subset U$, $\alpha(f) = p(S) \times p(S')$. La sous-classe $(U, f, S \times S')\ \Gamma'$ pourrait s'appeler une *structure produit admissible contenue dans* U; $(S_1 \times S'_1)_U$ est alors la classe des structures produits admissibles contenues dans U. Nous identifierons $S_1 \times S'_1$ avec la structure induite de ce genre sur $p(S_1) \times p'(S'_1)$. Si $(S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1) \in \Gamma$, $\alpha(f) = U_1$, $\beta(f) = U_2$, alors $(f, (S_1 \times S'_1)_{U_1})$ est un isomorphisme de $(S_1 \times S'_1)_{U_1}$ sur $(S_2 \times S'_2)_{U_2}$. Ces isomorphismes forment un groupoïde local et Γ *est le pseudogroupe des isomorphismes locaux entre structures de la classe* $\mathcal{B}_o \times \mathcal{F}_o$.

Soit $\mathcal{L}_o(\mathcal{B} \times \mathcal{F})$ l'élargissement de $\mathcal{B}_o \times \mathcal{F}_o$ relatif à Γ, $\mathcal{L}(\mathcal{B} \times \mathcal{F})$ le groupoïde correspondant des isomorphismes. Une structure $A \in \mathcal{L}_o(\mathcal{B} \times \mathcal{F})$ est donc un atlas complet compatible avec Γ sur un ensemble E. Une carte locale appartenant à A est un triplet

$(E, f_i, S_i \times S'_i)$, $S_i \in \mathfrak{B}_o$, $S'_i \in \mathfrak{F}_o$, $f_i \in \mathfrak{S}$, $\alpha(f_i)$ = ensemble ouvert de $p(S_i) \times p'(S'_i)$ relativement à $\tau(S_i) \times \tau(S'_i)$, $\beta(f_i) \subset E$. La structure définie par A est aussi détermi-née par la sous-classe de A formée des éléments $(E, f_i, S_i \times S'_i)$ pour lesquels $\alpha(f_i) = p(S_i) \times p'(S'_i)$; une telle carte peut s'appeler une *carte élémentaire*: la classe $(E, f_i, S_i \times S'_i)\,\Gamma'$ définit alors sur $\beta(f_i)$ une *structure produit*. La structure A sur E est donc aussi une classe complète de structures-produits compatibles, sur des sous-ensembles e_i de $E = \cup\, e_i$. On identifie de nouveau $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ à un sous-groupoïde de $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ et nous appelons $\mathfrak{L}_o(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ *l'espèce des produits locaux associée à* $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$.

4-2. Feuilletages.

Le pseudogroupe Γ du précédent numéro peut être élargi de la manière suivante : soit $s_1 < S_1$, $s'_1 < S'_1$, et soit φ un homéomorphisme de $p(s_1) \times p(s'_1)$ sur un ensemble de $B_2 \times F_2$, ouvert pour $\tau(S_1) \times \tau(S'_1)$, qui s'écrit $(x, y) \to (g(x), \psi(x, y))$, où $x \in p(s_1)$, $y \in p'(s'_1)$, $(g, s_1) \in \mathfrak{B}$, $g s_1 < S_2$, $\psi(x, y) \in p(S'_2)$, de telle sorte que, de plus, la condition suivante soit vérifiée: si g'_x désigne l'application $y \to \psi(x, y)$, alors (g'_x, s'_1) est un isomorphisme de s'_1 sur $s'_2(x) < S'_2$.

Soit f un homéomorphisme d'un ensemble ouvert pour $\tau(S_1) \times \tau(S'_1)$ sur un ensemble ouvert pour $\tau(S_2) \times \tau(S'_2)$, qui soit un agrégat de tels homéomorphismes φ. Alors $(S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1)$ sera appelé un *isomorphisme local* de $(S_1 \times S'_1)$ sur $(S_2 \times S'_2)$. *La classe de ces isomorphismes locaux est un pseudogroupe* $\tilde{\Gamma}$ *d'isomorphismes locaux.* On définit comme ci-dessus la structure induite $(S_1 \times S'_1)_U$; c'est-à-dire $(S_1 \times S'_1)_U$ est de nouveau la classe des structures produits admissibles contenues dans l'ensemble ouvert $U \subset B_1 \times F_1$, une telle structure produit admissible étant encore définie par une classe $(U, f, S \times S')\,\tilde{\Gamma}'$ où $\tilde{\Gamma}'$ est le groupoïde des triplets $(S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1) \in \tilde{\Gamma}$ tels que $\alpha(f) = p(S_1) \times p'(S'_1)$, $\beta(f) = p(S_2) \times p'(S'_2)$.

Soit $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ l'élargissement de $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ relatif à $\tilde{\Gamma}$. Une structure de l'espèce $\tilde{\mathfrak{L}}_o(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ s'appelle un *feuilletage* sur un ensemble E. Elle est définie par un atlas complet A sur E, compatible avec $\tilde{\Gamma}$. Une *carte élémentaire* est de nouveau $(E, f, S \times S') \in A$ telle que $\alpha(f) = p(S) \times p'(S')$; le feuilletage induit sur $\beta(f)$ est un *feuilletage élémentaire*. La structure A peut aussi être définie par une classe complète, compatible, de feuilletages élémentaires sur les ensembles e_i dont E est l'agrégat.

Soit $(E, f, S \times S')$ une carte élémentaire appartenant à A. Nous désignons par f'_x l'application $y \to f(x, y)$, $x \in p(S)$, $y \in p'(S')$, $f(x, y) \in E$. La classe de toutes les applications f_x qui appartiennent à n'importe quelle carte élémentaire de A forme un atlas A' de $\mathfrak{F}$ sur E. Ainsi on a aussi défini sur E une structure de l'élargissement complet $\mathfrak{F}'_o$ de l'espèce $\mathfrak{F}_o$. Il y a donc sur E deux topologies $\tau(A)$ et $\tau(A')$ sous-jacentes à A et A'. Si $\tau(A')$ est localement connexe, alors chaque composante connexe relativement à $\tau(A')$ est munie d'une structure de l'espèce $\mathcal{F}'_o$. La compo--sante connexe munie de cette structure est appelée une *feuille* du feuilletage.

Si A est un feuilletage sur E, alors on définit des homomorphismes locaux dis--tingués de A dans les structures de l'espèce $\mathcal{B}_o$. Soit $(E, f, S\times S') \in A$ et soit h le produit de f^{-1} avec la projection de $p(S)\times p'(S)$ sur $p(S)$. Alors (S, h, A) sera appe--lé un *homomorphisme local* de A dans S. Si (S_1, h_1, A) et (S_2, h_2, A) sont deux triplets de cette sorte, alors pour $x \in \alpha(h_1) \cap \alpha(h_2)$ il existe un isomorphisme local (S_2, g, S_1) tel que $gh_1 < h_2$.

Ceci mène à une autre espèce de feuilletages. Soit $\mathcal{Z}$ un groupoïde local d'iso--morphismes sur $\mathcal{C}_1 \subset \mathfrak{S}$ avec le foncteur projection p_1 et soit $\mathcal{H}^\ell$ une catégorie d'homo--morphismes locaux de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{B}$ tel que $h \in \mathcal{H}^\ell$ soit un triplet (S, f, Z), $Z \in \mathcal{Z}_o$, $f \in \tilde{\mathfrak{S}}$, $\alpha(f) = p_1(z)$, $z < Z$, $\beta(f) \subset p(S)$. Nous définissons maintenant un feuilletage de Z par une classe A d'homomorphismes locaux $(S_i, f_i, Z) \in \mathcal{H}^\ell$ ayant les propriétés suivantes :

1) Pour $x \in \alpha(f_i) \cap \alpha(f_j)$ il existe un isomorphisme local (S_j, g, S_i) tel que $gf_i < f_j$.
2) La classe A est saturée par rapport à l'induction, l'agrégation et $\mathcal{B}^\ell$ qui opère sur $\mathcal{H}^\ell$ de la manière suivante :

$$(S_j, g, S_i)(S_i, f, Z) = (S_j, gf, Z).$$

L'espèce des feuilletages de cette sorte que nous appellerons feuilletages de 2e espèce, est une espèce de structures locales sur $\mathcal{Z}_o$. *Une espèce de feuilletages de seconde espèce est sous-jacente à une espèce de feuilletages de première espèce.*

Souvent on se donne un sous-groupoïde $\tilde{\Gamma}''$ de $\tilde{\Gamma}$. Soit $\tilde{\mathcal{L}}''(\mathcal{B}\times\mathcal{F})$ l'élargisse--ment de $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ relatif à $\tilde{\Gamma}''$. Les structures de l'espèce correspondante seront encore appelées des feuilletages. On obtient ainsi par exemple les *feuilletages de la classe r ou les feuilletages analytiques,* selon que $\mathcal{B} = \mathcal{F} = C^r$ ou C^ω.

REMARQUE : *Un produit local correspond à un feuilletage double.*

4-3. Fibrations.

Soit $\mathcal{F}$ un groupoïde d'isomorphismes sur $\mathcal{C} \subset \mathfrak{S}$ pour lequel le foncteur d'induc--tion est le foncteur identique; soit de nouveau $\mathcal{B}$ un groupoïde local d'isomorphismes sur $\mathcal{C}' \subset \mathfrak{S}$. Nous considérons dans ce cas particulier les pseudogroupes $\tilde{\Gamma}$ définis ci--dessus. Un élément de $\tilde{\Gamma}$ est un triplet : $(S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1)$ pour lequel $\alpha(f) =$ $= p(s_1)\times p'(S'_1)$, $s_1 < S_1$, $\beta(f) = p(s_2)\times p'(S'_2)$, $s_2 < S_2$. L'homéomorphisme f est représenté par $(x, y) \to (g(x), \psi(x, y))$, (g, s_1) est un isomorphisme de s_1 sur s_2; $y \to \psi(x, y)$ est, pour chaque x de $p(s_1)$, une application $g'_x \in \mathcal{C}'$ telle que (g'_x, S'_1) soit un isomorphisme de S'_1 sur S'_2. On peut astreindre f à certaines conditions supplémentaires. Par exemple, supposons donnée une topologie $T(S')$ sur $p'(S')$ sous-jacente à S' pour tout $S' \in \mathcal{F}_o$. Alors nous avons les topologies produit $T(S_i) \times T(S'_i)$ et nous supposons que f est un homéomorphisme pour ces topologies produit. Ainsi on définit un sous-pseudogroupe $\tilde{\Gamma}'$ de $\tilde{\Gamma}$. Dans d'autres cas on suppose que f est analyti--que ou de classe r. L'élargissement de $\mathcal{B}_o \times \mathcal{F}_o$, relatif à $\tilde{\Gamma}$ ou $\tilde{\Gamma}'$ est *l'espèce des fibrations*.

Les *fibres* sont définies comme les feuilles ci-dessus. Toute fibre est munie d'une structure qui est isomorphe à une structure $S \in \mathcal{F}_o$ dans l'élargissement complet de $\mathcal{F}$. Les fibres d'une fibration sur E forment une partition de E et l'espace quotient B de cette partition est muni d'une structure qui appartient à l'élargissement complet de $\mathcal{B}_o$; si la fibration est définie par un atlas de $\mathcal{B}_o \times \mathcal{F}_o$ sur E compatible avec $\tilde{\Gamma}$, alors on déduit par passage aux quotients un atlas de $\mathcal{B}$ sur B. *Si la topologie sur B sous--jacente à cet atlas est localement connexe, alors toutes les fibres de la fibration sont isomorphes à une structure $S \in \mathcal{F}_o$.*

REMARQUE 1 : Etant donnée l'espèce $\mathcal{B}_o \times \mathcal{F}_o$ élargie par l'adjonction des structures induites considérées ci-dessus (suivant les trois cas : produits locaux, feuilletages, fibrations), toute catégorie d'homomorphismes locaux définie pour cette espèce élargie conduit par le procédé général d'élargissement à des catégories d'homomorphismes locaux pour les espèces élargies formées par les produits locaux, les feuilletages ou les fibrations.

REMARQUE 2 : On peut partir de deux groupoïdes locaux d'isomorphismes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$, où $\mathcal{B}$ est défini sur $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}' \subset \overline{\mathcal{C}}'$: $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}'$ sont maintenant des groupoïdes locaux quelconques d'isomorphismes. Par une généralisation naturelle on peut de nouveau définir les produits locaux, les feuilletages, et les fibrations. On doit tout d'abord éten--dre $\overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{C}}'$ en un autre groupoïde local, à savoir le groupoïde local qu'on appellera *pro--duit tensoriel* $\overline{\mathcal{C}} \otimes \overline{\mathcal{C}}'$: un objet de $\overline{\mathcal{C}} \otimes \overline{\mathcal{C}}'$ est un ensemble $\mathfrak{U}$ d'éléments $e \times e'$, $e < E$, $e' < E'$, ayant les propriétés suivantes :

1) Si $e \times e' \in \mathfrak{U}$ et $e_1 < e$, $e'_1 < e'$, alors $e_1 \times e'_1 \in \mathfrak{U}$.
2) $\mathfrak{U}$ est saturé par rapport à l'*agrégation verticale* $(\cup(e \times e'_1) = e \times (\cup e'_i))$ et *horizontale* $(\cup(e_i \times e') = (\cup e_i) \times e')$. On définit alors les pseudogroupes Γ et $\tilde{\Gamma}$ généralisant ceux qu'on a considérés plus haut.