Séminaire de topologie et géométrie différentielle

A. Bastiani

Polyèdres convexes dans les espaces vectoriels topologiques

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 1 (1957-1958), exp. nº 19, p. 1-46
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire de TOPOLOGIE
et de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
(C. EHRESMANN)

Année 1957/1958
-:-:-:-

3 et 10 juin 1958

POLYÈDRES CONVEXES DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par Mlle A. BASTIANI

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS.

1. Introduction.

Soit E un espace vectoriel sur R. Nous savons que, sur un tel espace, on peut mettre diverses topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel c'est-à-dire telles que les applications :

$$(x , y) \to x + y \quad \text{et} \quad (m , x) \to mx$$

soient continues. Etudions certaines de ces topologies.

2. La topologie fine.

DÉFINITION. - E étant un espace vectoriel, la topologie fine ou topologie $\mathcal{T}_F$ est la topologie localement convexe la plus fine compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

Un ouvert convexe pour cette topologie est un ensemble dont la trace sur tout sous-espace de dimension finie est un ouvert convexe de ce sous-espace, qui a une topologie bien déterminée. Les ouverts convexes forment une base pour cette topologie. De plus, un système fondamental de voisinages de l'origine est formé des parties convexes, symétriques, absorbantes de E.

Ainsi un voisinage convexe quelconque de 0 est un ensemble convexe dont l'intersection avec toute droite passant par 0 est un segment contenant 0 comme point intérieur car l'intersection d'un tel ensemble avec son symétrique possède les propriétés précédentes. Il en résulte qu'un ouvert convexe de $\mathcal{T}_F$ est un ensemble dont l'intersection avec toute droite est un segment ouvert. Rappelons que $\mathcal{T}_F$ est séparée.

REMARQUE 1. - $\mathcal{T}_F$ est limite inductive localement convexe de la famille des sous-espaces de dimension finie de E (BOURBAKI [3] et [4]).

REMARQUE 2. - Si E est somme directe de sous-espaces vectoriels E_i de dimension finie, E muni de la topologie $\mathcal{T}_F$ est évidemment la somme topologique directe des E_i.

REMARQUE 3. - On pourrait penser que la topologie fine est identique à la topologie dont les ouverts sont les ensembles dont la trace sur toute droite est ouverte ; il n'en est rien en effet : considérons dans l'espace R^2 l'ensemble obtenu en supprimant du plan la portion de parabole :

$$y = x^2 , \quad x > 0 ;$$

l'ensemble qui reste a son intersection avec toute droite qui est un ouvert de la droite et pourtant cet ensemble n'est pas ouvert pour la topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de R^2.

THÉORÈME. - <u>Toute forme linéaire sur l'espace</u> E <u>muni de la topologie</u> $\mathcal{T}_F$ <u>est continue</u> ; <u>tout sous-espace vectoriel de</u> E <u>est fermé</u> ; <u>toute base algébrique est une base topologique</u> (c'est-à-dire un système total topologiquement libre) <u>et réciproquement</u>.

DÉMONSTRATION. - Soient f une forme linéaire sur E, U un intervalle ouvert de R ; $f^{-1}(U)$ a pour trace, sur tout sous-espace de dimension finie, un ouvert convexe de ce sous-espace, c'est-à-dire $f^{-1}(U)$ est ouvert. Il en résulte que tout hyperplan est fermé et tout sous-espace vectoriel est fermé comme intersection d'hyperplans.

Caractérisons les ensembles fermés convexes pour la topologie $\mathcal{T}_F$. Si un ensemble est fermé et convexe pour cette topologie, son intersection avec tout sous-espace de dimension finie est fermée et convexe dans ce sous-espace. Inversement, soit F un ensemble dont l'intersection avec tout sous-espace de dimension finie soit fermée et convexe dans ce sous-espace. F est convexe, car si x et y appartiennent à F, l'intersection de F avec le sous-espace à une dimension qui passe par ces deux points sera convexe, donc contiendra le segment $[x , y]$, ce segment tout entier appartient à F, ce qui prouve que F est convexe. De plus si E possède une base dénombrable, F est fermé dans E pour la topologie $\mathcal{T}_F$.

En effet E est alors limite inductive stricte des sous-espaces vectoriels E'_p engendrés par $(e_1 , e_2 , \ldots , e_p)$ où les e_i sont les vecteurs de la base de E ; ces sous-espaces sont tels que :

$$E'_1 \subset E'_2 \subset \ldots \subset E'_n \subset \ldots ;$$

soient F_1 , F_2 , ... , F_n , ... les intersections de F avec chacun de ces sous-espaces; soient $x \notin F$, $x \in E'_p$, $x \notin E'_{p-1}$; F_p étant fermé dans E'_p , il existe un voisinage convexe V_p de x dans E'_p qui ne rencontrera pas F_p ; supposons que nous ayons défini, pour tout $k \leq i - 1$ un voisinage V_k de x dans E'_k avec les propriétés :

$$V_p \subset V_{p+1} \subset V_{p+2} \subset \cdots \subset V_{i-1}$$

$$V_k = V_{k+1} \cap E'_k \quad : \quad p \leq k \leq i - 1$$

$$V_k \cap F_k = \emptyset$$

Définissons alors un voisinage de x dans E'_i avec les mêmes propriétés. E'_{i-1} est un hyperplan de E'_i , donc on peut contraire un voisinage convexe de x , V'_i , dans E'_i dont la trace sur E'_{i-1} est V_{i-1} . Il existe un hyperplan H_i de E'_i qui sépare l'ensemble convexe V_{i-1} de l'intérieur de F_i et par suite F_i est contenu dans la fermeture de l'un des demi-espaces déterminés par H_i . L'intersection de V'_i avec l'autre demi-espace ouvert déterminé H_i sera un voisinage convexe de x qui ne coupe pas F_i et dont l'intersection avec E'_{i-1} est V_{i-1} ; soit V_i le voisinage de x dans E'_i ainsi construit.

Considérons les suites de voisinages V_p , V_{p+1} , ... , V_i , ... où $p \leq i$ (i fini ou infini) telles que :

$$V_k \subset V_{k+1} , \quad V_k = V_{k+1} \cap E'_k , \quad V_k \cap F_k = \emptyset$$

L'ensemble de ces suites est inductif et par suite il existe une suite maximale nécessairement infinie. Soit (V_j) une telle suite et

$$V = \cup V_j \qquad j \in N ,$$

V a son intersection avec tout E'_i qui est un voisinage de x dans cet E'_i , donc V est un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}_F$ et

$$V \cap F = \emptyset$$

par suite F est fermé pour $\mathcal{T}_F$. D'où :

THÉORÈME. - L'intersection de tout ensemble fermé convexe pour la topologie localement convexe la plus fine sur un espace vectoriel topologique, avec tout sous-espace de dimension finie est fermée convexe dans ce sous-espacace. Inversement, si E a une base dénombrable, tout ensemble tel que son intersection avec tout sous-espace de dimension finie soit fermée et convexe dans ce sous-espace,

<u>est fermé pour la topologie</u> $\mathcal{C}_F$.

LEMME. - Soient E un espace vectoriel, H un hyperplan affine, B un fermé contenu dans H ; le cône de sommet 0 engendré par les demi-droites s'appuyant sur B est fermé dans le demi-espace ouvert contenant H .

DÉMONSTRATION. - Désignons par $[0\ ,\ x \rightarrow)$ la demi-droite d'origine 0 passant par $x \in E$, soient $x' = [0\ ,\ x \rightarrow) \cap H$, f l'application $x \rightarrow x'$, E_0 le demi-espace ouvert contenant H ; f est une application continue de E_+ sur H : en effet soit $H = \{x : \lambda(x) = 1\}$; pour tout $x \in E_+$ on a $x' = \frac{1}{\lambda(x)}\, x$ ce qui prouve que x' est fonction continue de x . Alors $f^{-1}(B)$ est un fermé de E_+ . En général $f^{-1}(B)$, complété par 0 , ne sera pas fermé dans E (en particulier si $H = B$). Toutefois, ce lemme reste vrai si on suppose de plus B borné.

THÉORÈME. - <u>Dans un espace à un nombre fini de dimensions, un ensemble</u> A , <u>dont l'intersection avec toute droite est fermée convexe, est fermé convexe.</u>

DÉMONSTRATION. - Le théorème est évident dans le cas $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour R^{n-1} , montrons qu'il l'est pour R^n . Soient $x \in \bar{A}$, $x \notin A$, H un hyperplan passant par x et tel qu'il existe y et $y' \in E$, de part et d'autre de H (ce qui est toujours possible si $\dim A > 1$) . $A \cap H$ est convexe fermé, donc les cônes C et C' de sommet y et y' , de base $A \cap H$, sont fermés dans les demi-espaces ouverts limités par les hyperplans parallèles à H et passant par y et y' , contenant H (lemme précédent); x est dans $\complement (C \cup C')$, donc il existe un voisinage de x dans l'intersection de ces demi-espaces ouverts et par suite dans E , qui ne rencontre pas C et C' ; ce voisinage contient au moins un point z de A $(z \notin H \cap A)$; un des segments $[z\ ,\ y]$ ou $[z'\ ,\ y']$ coupe H en un point non situé dans $H \cap A$ ce qui est contradictoire.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> E <u>a une base dénombrable, tout ensemble, dont l'intersection avec toute droite est un segment fermé, est fermé pour la topologie fine.</u>

DÉFINITION. - Soit M un ensemble convexe contenu dans un espace vectoriel E , $x \in M$. La <u>facette</u> $\mathcal{F}_x$ de x en M est la réunion des segments contenus dans M et dont x est point intérieur.

THÉORÈME. - <u>La facette</u> $\mathcal{F}_x$ <u>de</u> x <u>est un voisinage de</u> x <u>pour la topologie fine dans le sous-espace</u> E_x <u>engendré par</u> $\mathcal{F}_x$.

En effet $\mathcal{F}_x \cap D$ = segment ouvert contenant x, pour toute droite D, passant par x, située dans E_x.

Rappelons que si M est de dimension finie (c'est-à-dire engendre un sous-espace de dimension finie), il contient au moins un point intérieur dans le sous-espace engendré par M.

3. Ensembles bornés.

THÉORÈME. - Tout ensemble borné B pour $\mathcal{C}_F$ engendre un sous-espace de dimension finie.

DÉMONSTRATION. - Soit $0 \in B$. Supposons que B engendre un sous-espace de dimension infinie E_B. Prenons une base de E_B et complétons-la pour en faire une base de E. Choisissons une suite dénombrable (e_i) $i \in N$, de vecteurs de la base de E_B ; il existe un point $M_i \in B$ dont la coordonnée x_i par rapport à e_i est différente de 0 ; soit V un voisinage de 0, enveloppe des segments $[-\frac{x_i}{i} e_i , +\frac{x_i}{i} e_i]$ et de segments arbitraires sur les axes de la base, autres que les e_i. Pour que B soit borné, il faut qu'il existe λ tel que λV contienne B, c'est-à-dire que l'on ait en particulier :

$$\frac{\lambda |x_i|}{i} > |x_i| \quad \forall\, i \in I .$$

Il en résulte que $\lambda > i$, $\forall\, i \in I$, et B n'est pas borné.

Nous allons donc introduire, puisque seuls des ensembles contenus dans des sous-espaces de dimension finie pourront être bornés pour $\mathcal{C}_F$, une notion moins restrictive de "borné" qui sera suffisante pour les questions traitées dans la suite.

DÉFINITION. - Un ensemble contenu dans un espace vectoriel de dimension infinie sera <u>pseudo-borné</u> si son intersection avec tout sous-espace de dimension finie est borné dans ce sous-espace.

REMARQUE. - Cette définition n'est pas équivalente à la suivante : un ensemble est pseudo-borné si son intersection avec toute droite est bornée ; en effet, dans R^2, on peut construire un ensemble non borné dont l'intersection avec toute droite est bornée, en considérant l'ensemble compris entre les deux paraboles $y = x^2$ et $y = x^2 + 1$.

THÉORÈME. - Un ensemble convexe P est pseudo-borné si et seulement s'il ne contient pas de demi-droite.

DÉMONSTRATION. - Si P est pseudo-borné, alors il n'existe pas de demi-droite dans P. La réciproque résulte du lemme suivant :

LEMME. - Dans un espace vectoriel de dimension finie, un ensemble convexe A qui ne contient pas de demi-droite est borné.

DÉMONSTRATION. - Supposons que A contienne un point intérieur O. Soient D une demi-droite issue de O, B une boule de centre O.

$$D \cap A = [O , M] \quad M \in \overline{A}$$

$$D \cap B = [O , M']$$

L'application $f : M' \to M$ est un homéomorphisme (SEIFERT-THRELFALL [10]) donc la rapport : $\frac{|OM'|}{|OM|}$ est borné, c'est-à-dire $|OM'| < \lambda |OM|$. Ainsi quel que soit la boule B, il existe λ tel que λ B contienne A, et A est borné.

Cette notion a l'intérêt suivant : si B est borné pour une topologie $\mathcal{T}$ quelconque de E, compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, alors pour tout sous-espace de dimension finie H de E, $B \cap H$ est borné pour la trace de $\mathcal{T}$ sur H, donc B est pseudo-borné. Considérons la topologie affaiblie de la topologie fine que nous appellerons topologie algébriquement faible.

DÉFINITION. - La topologie algébriquement faible est la topologie la moins fine telle que toute forme linéaire soit continue. Cette topologie est bien compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ; pour cette topologie, tout ouvert est réunion d'ouverts élémentaires de la forme suivante ; soit $E_1 + E_2$ une décomposition de E où E_1 est de dimension finie ; alors les ouverts élémentaires sont les ensembles $V = U + E_2$ où U est ouvert dans E_1.

THÉORÈME. - Un ensemble borné pour cette topologie est contenu dans un sous-espace de dimension finie.

En effet soit B un ensemble engendrant un sous-espace de dimension infinie. Nous pouvons extraire de B un ensemble dénombrable de points $e_1 , e_2 , \dots , e_i , \dots , \; i \in N$. Complétons ce système par des vecteurs (e_α) pour en faire une base. Soit $e'_i = e_i - \lambda_i e_1$; (e'_i), (e_α) forment une base

Soit H le sous-espace engendré par les vecteurs (e_i , e_α) où $i > 1$; considéron la projection de E sur e_1 parallèlement à H. Le point e_i aura pour projection $\lambda_i e_1$; la projection de B contient donc les points $\lambda_i e_1$; supposons que les λ_i forment une suite croissante tendant vers l'infini. La projection de B sur Re_1 ne sera donc pas bornée et par suite B n'est pas bornée pour la topologie algébriquement faible car la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit borné pour cette topologie est que sa projection sur tout sous-espace de dimension finie (parallèlement à un sous-espace supplémentaire) soit bornée.

Ce dernier résultat est d'ailleurs une conséquence du théorème général affirmant que les bornés sont les mêmes pour toutes les topologies de E ayant le même espace dual topologique.

4. Espace projectif et espace sphérique.

L'espace projectif P_E associé à un espace vectoriel topologique E est l'espace des droites passant par 0, c'est-à-dire l'espace quotient de l'espace E_0, complémentaire de 0 dans E, par la relation d'équivalence ρ :

$$x \sim y \pmod{\rho} \Leftrightarrow x = my \quad m \in R, \ m \neq 0$$

Aux sous-espaces vectoriels de E correspondent les sous-espaces projectifs de P_E (ils sont fermés).

L'espace sphérique S_E associé à un espace vectoriel topologique E est l'espace des demi-droites d'origine 0, c'est-à-dire l'espace quotient de E_0 par la relation d'équivalence ρ' :

$$x \sim y \pmod{\rho} \Leftrightarrow x = my \quad m \in R, \ m > 0$$

Soit σ l'application de E_0 dans E_0 :

$$x \rightarrow -x$$

Cette application est compatible avec la relation d'équivalence ρ', soit, si $x \pmod{\rho'} = \bar{x}$, $\bar{\sigma}$ l'application :

$$\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$$

$\bar{\sigma}$ est une application de S_E dans S_E et :

$$\bar{\sigma} . \bar{\sigma} = \text{idendité} .$$

Soit ρ'' la relation d'équivalence dans S :

$$\bar{x} \sim \bar{y} \pmod{\rho''} \Leftrightarrow \bar{y} = -\bar{x}$$

Alors P_E et S_E/ρ'' se correspondent biunivoquement.

Ainsi à une classe de S_E (mod ρ'') on associe une classe de E (mod ρ) d'une façon biunivoque. D'après la transitivité des espaces quotients, cette application biunivoque de S_E/ρ'' sur P_E est un homéomorphisme et P_E est identifié à l'espace des classes d'intransitivité de S_E par rapport au groupe des automorphismes d'ordre 2 engendré dans S_E par σ. De plus soient $x \in E$, H un hyperplan supplémentaire de $[0, x \rightarrow)$. Les demi-espaces ouverts, déterminés dans E par H, sont des ouverts saturés pour ρ' ; on pourra trouver un ouvert saturé pour ρ' contenant x et contenu dans un demi-espace ouvert ; le symétrique de cet ouvert par rapport à 0 est un ouvert saturé pour $(-x)$ qui ne coupe pas le premier ouvert. Donc il existe un voisinage ouvert de $\bar{x}$ et un voisinage symétrique de $-\bar{x}$ qui ne se rencontrent pas. La projection de chacun de ces voisinages sur P_E est un homéomorphisme, et par suite :

THÉORÈME. - S_E <u>est un revêtement à deux feuillets de</u> P_E.

Soit H un hyperplan de E, E_+ un des demi-espaces ouverts déterminés par H ; S_E^+ l'espace quotient de E_+ par ρ' (demi-sphère), alors S_E^+ est homéomorphe à H_0 ; en effet, l'application, qui a un point $x \in E_+$ fait correspondre le point d'intersection x' de $[0, x]$, avec une variété H' contenue dans E_+ et déduite par translation de H, est une application continue ; en prenant un ouvert V' de x' dans H', le cône épointé de sommet 0 engendré par V' sera donc un ouvert quelconque saturé pour ρ'. L'application $\bar{x} = x \pmod{\rho'} \rightarrow x$ est donc un homéomorphisme.

On en déduit la séparation de S_E ; soient $\bar{a}$ et $\bar{a}'$ deux points de S_E. Si $\bar{a}' = \bar{a} \pmod{\rho''}$, nous avons construit deux voisinages de $\bar{a}$ et $\bar{a}'$ sans points communs ; sinon, dans E, soient D et D' les demi-droites correspondantes, il existe un hyperplan affine K supplémentaire de D et qui coupe D' ; supposons :

$$a = K \cap D \quad \text{et} \quad a' = K \cap D' .$$

Dans H, il existe un voisinage U de a et un voisinage U' de a', sans points communs. Les cônes épointés de sommet 0, engendrés par U et U' ne se rencontrent pas ; ils correspondent à deux voisinages de $\bar{a}$ et $\bar{a}'$ sans points communs.

De même, le complémentaire d'un hyperplan dans P_E est homéomorphe à H. On en déduit que P_E est séparé.

De la même manière, nous définissons l'espace des demi-plans $[OA_1, A_2 \rightarrow)$ tournant autour d'une demi-droite $[O, A_1 \rightarrow)$ fixe et plus généralement, l'espace des demi-spus-espaces $[OA_1 \dots A_i, A_{i+1} \rightarrow)$ tournant autour d'un hyperplan $[OA_1, \dots, A_{i-1}, A_i \rightarrow)$ fixe. En tout point x de E, on peut définir l'espace des demi-droites issues de x.

5. Espace affine topologique.

Un espace affine réel est un ensemble E muni d'un groupe de transformations abélien simplement transitif, appelé groupe des translations : les éléments de E sont appelés points, un couple de points (x, y) est appelé vecteur d'origine x, d'extrémité y ; la classe d'équivalence d'un vecteur (x, y) par rapport au groupe des translations est appelée vecteur libre $\overrightarrow{xy}$. On suppose de plus que l'ensemble E_0 des vecteurs libres est muni d'une structure d'espace vectoriel sur R telle que :

$$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz} \quad .$$

Si x est fixé, les vecteurs d'origine x correspondent d'une manière biunivoque aux vecteurs libres et forment l'espace vectoriel E_x. Réciproquement tout espace vectoriel définit aussi un espace affine.

L'espace affine E peut être considéré comme un hyperplan de l'espace vectoriel E'_+ dont les éléments sont les points matériels de E, c'est-à-dire les couples (λ, x), $\lambda \in R$, $x \in E$ et les vecteurs libres. Le couple $(1, x)$ est identifié à x, les couples $(0, x)$, pour tout x, à 0. L'espace E est somme directe de E_0 et de $R\vec{e}_0$, $e_0 \in E$. En prenant une base (e_i) dans E_0, E est l'hyperplan défini par $x_0 = 1$.

Si E_0 est muni d'une structure d'espace vectoriel topologique l'application $(x, y) \rightarrow \overrightarrow{xy}$ définit une topologie sur E, indépendante de x. Muni de cette topologie, E est un espace affine topologique. Remarquons que E' est alors un espace vectoriel topologique, somme topologique de E_0 et de R_{e_0}.

CHAPITRE 2.

POLYÈDRES CONVEXES DE DIMENSION FINIE.

1. Pyramides convexes [11].

Soient R^n l'espace vectoriel à n dimensions, d'origine 0 , S un système de points de R^n , Σ l'ensemble des demi-droites $[0 , z \rightarrow)$, $z \in S$ appelé cône de sommet 0 s'appuyant sur S . Soient $h(S)$ et $h(\Sigma)$ les ensembles convexes de S et de Σ .

Rappelons que $h(\Sigma)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires positives, finies des points de S , pour la structure vectorielle. $h(S)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de points de S relativement à la structure affine de R^n (c'est-à-dire l'ensemble des points $\sum \lambda_i a_i$, $\lambda_i \geqslant e$; $\sum \lambda_i = 1$, $a_i \in S$) .

Un appui de Σ est un demi-espace fermé limité par un hyperplan passant par 0 et contenant Σ ; cet hyperplan est appelé hyperplan d'appui ; une forme d'appui est une forme linéaire ℓ sur E telle que $\ell(x) \geqslant 0$ définisse un appui. Le polaire Σ^0 de Σ est l'ensemble des formes d'appui ; Σ^0 est aussi un cône convexe.

DÉFINITION. - Si S est un ensemble fini de points, $h(S)$ est appelé polyèdre convexe borné et $h(\Sigma)$: pyramide convexe de sommet 0 . Si S est formé de $(n + 1)$ points indépendants, $h(S)$ est un simplexe.

Supposons désormais que S soit un ensemble fini de points. Soit p la dimension du sous-espace vectoriel engendré par Σ . Si $p = n$, on dira que Σ est non dégénéré.

Si Σ est dégénéré, un appui extrême de Σ est un appui de Σ limité par un hyperplan d'appui extrême H qui contient $(n - 1)$ droites linéairement indépendantes, de Σ ; une forme d'appui correspondante est appelée forme extrême. Soit Σ' l'ensemble de ces formes ; Σ' est composé d'un nombre fini de demi-droites car il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'hyperplans d'appui extrême.

Si Σ est dégénéré, soit H le sous-espace de dimension p engendré par Σ. Un appui extrême de Σ est un appui de Σ dont la trace sur H est un appui extrême de Σ dans H ou un appui de Σ limité par un hyperplan contenant H. Dans le premier cas l'appui extrême sera dit propre, dans le second impropre.

THÉORÈME. - L'enveloppe convexe de Σ est l'intersection des appuis extrêmes de Σ, c'est-à-dire $\Sigma'^{0} = h(\Sigma)$.

COROLLAIRE 1. - $h(\Sigma)$ est l'intersection de tous les appuis de Σ c'est-à-dire $\Sigma^{\infty} = h(\Sigma)$ (ce résultat est vrai pour tout cône convexe fermé).

COROLLAIRE 2. - Le polaire de Σ est l'enveloppe convexe de Σ' c'est-à-dire $\Sigma^{0} = h(\Sigma')$.

Si Σ est non dégénéré, il résulte du corollaire 2 que Σ^{0} est une pyramide convexe, puisque Σ' est composé d'un nombre fini de demi-droites. Si Σ est dégénéré, de dimension p, à un appui extrême de $\Sigma \cap H$ on associe une forme extrême propre ; on obtient ainsi un nombre fini de formes propres ℓ_i. De plus on prendra $(n - p)$ formes extrêmes impropres, ℓ_α engendrant H, et la pyramide Σ est l'ensemble des x tels que :

$$\langle x , \ell_i \rangle \geqslant 0$$

$$\langle x , \ell_\alpha \rangle = 0$$

$h(\Sigma')$ est l'enveloppe convexe des formes ℓ_i, ℓ_α et $(-\ell_\alpha)$.

COROLLAIRE 3. - Le polaire d'une pyramide convexe est une pyramide convexe.

COROLLAIRE 4. - Pour qu'un ensemble fermé de R^n soit une pyramide convexe il faut et il suffit que ce soit l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces.

DÉFINITION. - Une face de $h(\Sigma)$ est l'intersection de $h(\Sigma)$ avec un hyperplan d'appui extrême propre.

Toute face de $h(\Sigma)$ est une pyramide convexe de dimension $p - 1$ engendrée par une partie de Σ.

Les faces d'une face sont les facettes de dimension $p - 2$, Plus généralement toute facette de dimension k est face d'une facette de dimension $k + 1$. Si d est la dimension de la facette de 0 dans Σ , quel que soit ℓ tel que $d < \ell \leq p - 1$, il existe au moins une facette de dimension 1.

Dans le cas où $d = 0$, 0 est un point extrémal de $h(\Sigma)$. Il existe alors des facettes de dimension 1 : ce sont des demi-droites appelées arêtes de $h(\Sigma)$, une arête est une demi-droite de Σ qui n'est pas combinaison linéaire des autres demi-droites de Σ .

Si $d > 0$, chaque facette de dimension $d + 1$ est un demi-sous-espace limité par la facette de 0 . Les points des facettes de dimension $d + 1$ sont les formes extrêmes de Σ ; les points de la facette de 0 , autres que 0 , sont les formes extrêmes impropres.

Si $h(\Sigma)$ est de dimension p , la pyramide polaire Σ^0 est telle que la facette du sommet soit de dimension $n - p$; si d est la dimension de la facette du sommet 0 de $h(\Sigma)$, Σ^0 engendre un sous-espace de dimension $n - d$.

L'ensemble des formes d'appui de $h(\Sigma)$, qui s'annulent sur une facette de dimension k de $h(\Sigma)$, est une facette de dimension $n - k$ de $h(\Sigma')$.

Σ' est la réunion des facettes de dimension $n - p + 1$, dont on enlève la facette de l'orgigine de $h(\Sigma')$.

Toute pyramide convexe dont le sommet est point extrémal est l'enveloppe convexe de ses arêtes.

2. Polyèdres convexes.

Soit E un espace affine à n dimensions. On peut définir un espace vectoriel à $n + 1$ dimensions dont E est un hyperplan affine ne passant pas par l'origine. On peut identifier cet espace vectoriel avec R^{n+1} , de telle façon que E soit l'hyperplan affine défini par $X_0 = 1$.

Etant donné un polyèdre convexe borné P de E , on peut lui associer la pyramide convexe P' de sommet 0 , s'appuyant sur P ; le point 0 est point extrémal de P' . Les points d'intersection des arêtes de P' avec E sont les sommets de P ; les faces de P sont les traces sur E des faces de P' . P est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Plus généralement, posons

DÉFINITION. - L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces quelconques de E sera appelée <u>polyèdre convexe</u>.

Un polyèdre convexe est l'intersection d'une pyramide convexe P' de sommet 0 avec E ; P' sera l'intersection des demi-espaces vectoriels déterminés par les demi-espaces affines qui définissent P. Appelons P'_+ l'intersection de P' avec le demi-espace $x_0 \geq 0$; $P = P' \cap E = P'_+ \cap E$.

PROPOSITION. - <u>Pour que le polyèdre convexe soit borné, il faut et il suffit que le point x_0 soit intérieur au polaire de</u> P'.

Soit $\overline{E}$ l'espace E complété par les points à l'infini, correspondant d'une manière biunivoque aux demi-droites d'origine 0 situées dans E_0. Les points de E sont dits points propres de $\overline{E}$, les autres points sont impropres. Un polyèdre convexe P dans E est alors complété dans $\overline{E}$ en ajoutant les points correspondant aux directions des demi-droites contenues dans P ; soit $\overline{P}$ le complété de P. $\overline{P}$ correspond d'une façon biunivoque à P'_+.

Nous définissons la notion de segment dans $\overline{E}$ de la façon suivante : soient x et $y \in \overline{E}$.

1° Si x, y sont des points propres, le segment qui les joint dans $\overline{E}$ est le segment qui les joint dans E.

2° Si x est propre et y impropre, le segment qui les joint est la demi-droite d'origine x, parallèle à la demi-droite d'origine 0 définissant y.

3° Si x et y sont impropres, le segment qui les joint est l'ensemble des demi-droites du cône engendré par les demi-droites d'origine 0 définissant x et y. Si x et y sont diamétralement opposés, le segment qui les joint se réduit par définition au couple (x, y).

Etant donné un ensemble A contenu dans $\overline{E}$, son enveloppe convexe $h(A)$ sera la réunion des segments qui joignent deux points quelconques de A. Les points impropres de $h(A)$ forment l'enveloppe convexe des points impropres de A.

THÉORÈME. - <u>Tout polyèdre convexe</u> P <u>de</u> E <u>est la trace sur</u> E <u>de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (propres ou impropres) de</u> $\overline{E}$.

En effet, P'_+ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites, donc $\overline{P}$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\overline{E}$.

On peut décrire d'une façon plus précise la forme du polyèdre P.

Soit F'_0 la facette de 0 dans P', $F''_0 = F'_0 \cap E_0$ est facette de 0 dans $P'' = P'_+ \cap E_0$. Soit H un sous-espace supplémentaire de F''_0 dans R^{n+1}. $H \cap P'_+$ est une pyramide convexe, enveloppe convexe d'un nombre fini d'arêtes $[0, A_i \rightarrow)$, $A_i \in E$ et de $H \cap P''$. P'_+ est l'enveloppe convexe des arêtes $[0, A_i \rightarrow)$ et de P''. Les points A_i sont déterminés modulo F''_0.

Les points A_i engendrent un polyèdre convexe borné P_1 dans E, P est la somme dans R^{n+1} de P_1 et de P'', qui correspond à l'ensemble des points impropres de $\overline{P}$. La facette dans P d'un point A_i est le sous-espace affine translaté de la facette F''_0 de 0 dans P'', de dimension d. Ce sont les facettes de dimension minima. Toute autre facette est la somme d'une facette dans P et d'une facette dans P'.

Pour que P_1 soit réduit à un sommet, il faut et il suffit que P soit une pyramide convexe.

Ce cas est caractérisé par la propriété suivante : la facette en 0 de P' n'est pas contenue dans E_0.

3. Nouvelle caractérisation des polyèdres convexes.

DÉFINITION. - Soit P un ensemble convexe, $x \in P$; le cône d'appui C_x de P en x est la réunion des demi-droites qui joignent x aux autres points de P. Nous désignerons de la même façon l'ensemble qui lui correspond dans l'espace sphérique au point x.

Il résulte de cela que l'adhérence du cône d'appui est identique au contingent Le cône d'appui en x de P est aussi le cône d'appui en x d'un voisinage de x dans P.

THÉORÈME. - Si P est une pyramide convexe, le cône d'appui en tout point est fermé.

DÉMONSTRATION. - Le cône d'appui en chaque point est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces, donc est fermé.

RÉCIPROQUE. - Un cône convexe fermé P tel qu'en tout point le cône d'appui soit fermé, est une pyramide convexe.

DÉMONSTRATION. - Nous pouvons nous ramener au cas où 0 est point extrémal du cône en considérant le quotient de P par la facette en 0 de P.

Supposons vrai, pour les pyramides de dimension $n-1$, ce théorème, et démontrons-le pour la dimension n.

Montrons d'abord que P de dimension n est l'enveloppe convexe de ses arêtes. Soit $[0, x \rightarrow)$ une demi-droite de P ; si ce n'est pas une arête, tout plan qui passe par $[0, x \rightarrow)$ coupe P selon un angle de côté $[0, x_1 \rightarrow)$, $[0, x_1 \rightarrow)$. Alors la facette de x est un cône convexe de dimension inférieure à n et dont le cône d'appui en chaque point est fermé ; c'est donc une pyramide enveloppe convexe d'un nombre fini d'arêtes, qui sont aussi des arêtes de P. Donc $[0, x_1 \rightarrow)$ et une combinaison linéaire positive de ces arêtes ; il en est de même pour $[0, x_2 \rightarrow)$ et par suite pour $[0, x \rightarrow)$.

Montrons maintenant que P ne peut avoir qu'un nombre fini d'arêtes. S'il y en avait une infinité, on pourrait en extraire une suite d'arêtes $[0, x_i \rightarrow)$ tendant vers une droite $[0, A_1 \rightarrow)$ appartenant à P. L'ensemble des demi-plans limités par $[0, A_1 \rightarrow)$ et s'appuyant sur un point de P est aussi un ensemble fermé (dans l'espace des demi-plans limités par la droite OA_1). Par suite on peut extraire de la suite $[0, x_1 \rightarrow)$ une suite infinie $[0, x_i' \rightarrow)$ telle que les demi-plans $[OA, x_n' \rightarrow)$ tendent vers les demi-plans $[OA_1, A_2 \rightarrow)$. Dans cette suite il y a une infinité d'arêtes non situées dans la plan $OA_1 A_2$, car les arêtes situées dans ce plan sont des arêtes de l'intersection de P avec ce plan et, d'après l'hypothèse de récurrence, il ne peut y en avoir qu'un nombre fini. Ayant déterminé les génératrices

$$[0, A_1 \rightarrow), \ldots, [0, A_{p-1}, \ldots)$$

et une suite extraite de (x_i) : (x_i^{p-2}), telle que :

$$[OA_1 A_2 \ldots A_{p-2}, x_i^{(p-2)} \rightarrow) \rightarrow [OA_1 \ldots A_{p-2}, A_{p-1} \rightarrow)$$

Nous déterminons $[0, A_p \rightarrow)$ par la condition qu'il existe une sous-suite $(x_i^{(p-1)})$ de $(x_i^{(p-2)})$ telle que :

$$[OA_1, \ldots A_{p-1}, x_i^{(p-1)} \rightarrow) \rightarrow [OA_1 \ldots A_{p-1}, A_p \rightarrow)$$

Par récurrence, nous déterminerons ainsi les génératrices

$$[0, A_1 \rightarrow), \ldots, [0, A_n \rightarrow) ;$$

la suite $(x_i^{(n-1)})$ est alors située dans le demi-espace $[OA_1 \ldots A_{n-1}, A_n \to)$ Montrons que, pour i assez grand, $x_i^{(n-1)}$ a des coordonnées positives par rapport à la base formée par $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$.

$$[0, x_i^{(n-1)}) \to [0, A_1 \to) ,$$

donc pour i asez grand la première coordonnée de $x_i^{(n-1)}$ est positive.

$$[OA \ldots A_p, x_i^{(n-1)} \to) \to [OA_1 \ldots A_p, A_{p-1} \to)$$

la trace de $[OA_1 \ldots A_p, x_i^{(n-1)} \to)$ sur le sous-espace $(OA_{p+1}, \ldots, A_n)$ est une demi-droite $[0, y_i \to)$ qui tend vers $[0, A_{p+1} \to)$; la $(p+1)$-ième coordonnée de $x_i^{(n-1)}$ est égale à la $(p+1)$-ième coordonnée de y_i qui est positive pour i assez grand.

Il en résulte que $[0, x_i \to)$ ne peut pas être une arête.

COROLLAIRE. - Un ensemble fermé convexe $\overline{P}$ de $\overline{E}$ tel qu'en tout point (propre ou impropre) le cône d'appui soit fermé est un polyèdre convexe. En particulier un polyèdre convexe borné est caractérisé par cette condition.

Le cône P' engendré dans R^{n+1} par les demi-droites d'origine 0 qui s'appuyent sur $\overline{P}$ vérifie la condition que le cône d'appui en tout point de P' est fermé, donc P' est une pyramide convexe et $\overline{P}$ un polyèdre convexe.

DÉFINITION. - Un ensemble convexe fermé P de E, tel qu'en tout point le cône d'appui soit fermé, est appelé <u>polyèdre généralisé</u>.

Il résulte de cette définition que le cône d'appui en chaque point est une pyramide convexe. On voit facilement :

PROPOSITION. - <u>Pour qu'un ensemble convexe fermé soit un polyèdre généralisé, il faut et il suffit que son intersection avec un polyèdre convexe borné quelconque, soit un polyèdre.</u>

PROPOSITION. - <u>Un polyèdre généralisé est l'enveloppe convexe d'un ensemble discret fermé de points de</u> E.

Il suffit de prendre un pavage de E par des cubes, et les traces de P sur chaque cube sont des polyèdres ayant un nombre fini de sommets.

PROPOSITION. - Un polyédre généralisé est aussi caractérisé par la propriété suivante :

La trace de P sur un ouvert borné U quelconque est identique à la trace sur U d'un polyèdre borné. Ceci permet de dire qu'un polyèdre généralisé est "localement un polyèdre".

4. Autre caractérisation.

Soit P un cône convexe, H un sous-espace quelconque ; nous noterons l'enveloppe convexe de H et de P par $h(H \cup P)$.

DÉFINITION. - Le cône d'appui de P autour d'un sous-espace H est la réunion des demi-sous-espaces limités par H et contenant un point de P autre que 0.

Il s'ensuit que le cône d'appui de P autour de H est $h(H \cup P)$.

PROPOSITION. - Si C est un cône convexe fermé, le cône d'appui de C autour de tout sous-espace dont l'intersection avec C se réduit à la facette de 0 dans C est fermé.

Cette proposition est un cas particulier d'une proposition que nous établirons dans le prochain chapitre.

PROPOSITION. - Soit C un cône convexe qui ne coupe aucun plan selon un demi-plan, et tel que le cône d'appui autour de chaque droite soit fermé. Alors C est fermé.

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que 0 est point extrémal de C, en se ramenant à l'espace quotient de R^n par le sous-espace engendré par la facette de 0. Soient alors d une génératrice de $\bar{C}$ qui n'appartient pas à C, H le sous-espace engendré par la facette de d dans $\bar{C}$. Raisonnons par récurrence sur la dimension de l'espace. Soit C' la trace de C sur H ; C' admet 0 comme point extrémal et, pour toute droite D' de H, l'enveloppe convexe de $C' \cup D'$ est fermée. Comme la dimension de H est inférieure à la dimension de R^n, par hypothèse C' est fermé et ne contient pas d ; on peut trouver une droite D' telle que le demi-plan limité par D' et passant par d ne contiennne aucune génératrice de C' ; dans ces conditions $h(C \cup D')$ est fermé, ce qui est contraire à l'hypothèse.

PROPOSITION. - Soit C un cône convexe fermé, tel que le cône d'appui autour de tout sous-espace de codimension 2 soit fermé ; alors $h(C \cup D)$ est fermé pour tout sous-espace D , et C est fermé.

THÉORÈME. - Pour qu'un cône convexe fermé P soit une pyramide convexe, il faut et il suffit que pour tout sous-espace H de codimension 2 , $h(H \cup P)$ soit fermé.

DÉMONSTRATION. - D'après la proposition précédente la propriété est suffisante. Elle est nécessaire car, si P est une pyramide convexe, $h(H \cup P)$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites, donc une pyramide convexe et le cône d'appui en O est fermé.

Ce théorème peut aussi s'énoncer :

THÉORÈME. - Pour qu'un cône convexe soit une pyramide convexe, il faut et il suffit que sa projection sur tout plan soit fermée.

Ce résultat a été démontré par MIRKIL [8] d'une autre manière.

CHAPITRE 3.

POLYÈDRES DE DIMENSION INFINIE.

Soit E un espace affine topologique, muni de la topologie localement convexe $\mathfrak{S}$, E_0 l'espace vectoriel correspondant des vecteurs libres, E' l'espace vectoriel topologique correspondant admettant E comme l'hyperplan : $X_0 = 1$.

1. Définitions.

DÉFINITION 1. - Une pyramide convexe est un cône convexe fermé tel qu'en tout point le cône d'appui soit fermé dans l'espace des demi-droites muni de la topologie associée à $\mathfrak{S}$.

DEFINITION 2. - Un polyèdre convexe P de E est l'intersection avec E d'une pyramide convexe P' de E', de sommet 0.

Il s'ensuit que toute intersection finie de pyramides de même sommet est une pyramide.

Nous considérerons essentiellement des polyèdres convexes pseudo-bornés de E (c'est-à-dire ne contenant pas de demi-droite). La pyramide correspondante P' ne contient pas de demi-droite dans E.

DÉFINITION 3. - Un polyèdre convexe généralisé est un ensemble convexe fermé de E tel qu'en tout point le cône d'appui soit fermé.

LEMME. - Un ensemble fermé convexe est l'intersection des cônes d'appui de ses différents points.

DÉMONSTRATION. - Le cône d'appui de P en x contient tous les points de P. Inversement, soit y un point qui appartient à l'intersection de tous les cônes d'appui ; soit $z \in P$, sur $[z, y]$, il existe $x \in P$, x extrêmal sur cet intervalle ; le cône d'appui en x contient $[x, z \rightarrow)$ donc y appartient à $[x, z \rightarrow)$ et à $[z, x \rightarrow)$ et par suite $y \in [x, z]$ et $y \in P$.

Désormais nous munirons E de la topologie $\mathcal{T}_F$ (qui correspond à la topologie fine sur E). En effet.

THÉORÈME. - Tout polyèdre P pour une topologie $\mathcal{T}$ localement convexe sur E est un polyèdre pour $\mathcal{T}_F$. Si P est borné pour $\mathcal{T}$, P est pseudo-borné.

DÉMONSTRATION. - La topologie associée à $\mathcal{T}_F$ sur l'espace des demi-droites issues d'un point est en effet plus fine que celle associée à $\mathcal{T}$.

2. Polyèdres pour la topologie fine.

THÉORÈME. - Un polyèdre pour la topologie fine est un ensemble convexe dont l'intersection avec tout sous-espace de dimension finie est un polyèdre dans ce sous-espace. Réciproquement cette propriété caractérise les polyèdres dans le cas où E_0 a une base dénombrable.

DÉMONSTRATION. - La trace d'un polyèdre sur tout sous-espace de dimension finie est un ensemble convexe fermé et le cône d'appui en tout point de cette trace est fermé comme intersection d'un sous-espace de dimension finie et d'un cône fermé ; par suite cette trace est un polyèdre convexe. Si E_0 a une base dénombrable, un ensemble convexe, dont l'intersection avec tout sous-espace de dimension finie est fermée, est fermé dans E (chapitre 1) ; le théorème en découle.

PROBLÈME. - Cette propriété caractérise-t-elle les polyèdres dans tous les cas ?

Soient P une pyramide convexe de sommet O, $x \in P$, H un sous-espace vectoriel passant par x.

DEFINITION. - Le cône d'appui autour de H est l'ensemble des demi-espaces limités par H, qui contiennent un point de P.

Ainsi, le cône d'appui est un ensemble de l'espace des demi-espaces associés à H, et aussi un ensemble de E, enveloppe convexe $h(H \cup P)$ de $H \cup P$. C'est encore l'ensemble somme directe de H et P. Dire que ce cône est fermé signifie qu'il est fermé en tant que sous-ensemble de l'un ou l'autre espace.

PROPOSITION. - Soit C un cône convexe fermé ; le cône d'appui autour de tout sous-espace de dimension finie M, tel que : $M \cap C = \{0\}$ est fermé.

DÉMONSTRATION. - Soit D une droite adhérente au cône d'appui, mais qui n'y appartient pas ; pour tout voisinage symétrique V de O, $V + C$ et $h(D \cup M)$ ont une intersection non vide ; soit $N = h(D \cup M)$, $C_V = \overline{C + V} \cap N$; C_V est un ensemble fermé dans N ; lorsque V varie, dans l'espace complet N de dimension finie l'intersection des ensembles fermés C_V est non vide ; comme $\overline{C + V} \subset C + 2V$, cette intersection appartient à C, donc il existe un point y dans $(C \cap N)$ et le cône d'appui considéré contient le sous-espace passant par y et M, donc par D, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On en déduit en particulier que, dans les mêmes conditions, le cône convexe fermé C, a un hyperplan d'appui qui passe par M.

PROPOSITION. - Soit C un cône convexe qui ne coupe aucun plan selon un demi-plan ; si le cône d'appui de C autour de toute droite est fermé, le cône C est fermé.

DÉMONSTRATION. - Soit d une demi-droite qui n'appartient pas à C, mais qui est adhérente à C. Supposons que O soit point extrêmal de C. Soient D la droite qui contient d, π la facette de l'origine de $h(D \cup C)$. π_1 un plan contenu dans π qui contient D ; par hypothèse, $h(D \cup C)$ est fermé et $\pi_1 \cap C$ ne contient pas D ; il y a une droite d'appui D_1 de $\pi_1 \cap C$ dans π

telle que le demi-plan ouvert, limité par D_1 et contenant D, ne contienne aucun point de C ; alors $h(D \cup C)$ n'est pas fermé. Si Π se réduit à la droite D, il existe un plan passant par D qui ne rencontre pas C ; si D_1 est une droite quelconque de ce plan $h(D_1 \cup C)$ n'est pas fermé.

De nombreux résultats valables dans le cas fini ne sont plus vrais dans un espace de dimension infinie. Ainsi, un cône convexe dont toutes les projections planes sont fermées peut ne pas être fermé. En effet, soient E un espace vectoriel de base (e_i), dénombrable, C le cône des points $x = \sum x_i e_i$, dont la dernière ordonnée non nulle est positive ; les variétés d'appui sont les ensembles de points x tels que $x_i = 0$ pour $i > p$; la réunion des variétés d'appui est E tout entier, donc C n'a pas d'hyperplan d'appui car un tel hyperplan serait une variété d'appui de codimension 1 ; C est partout dense dans E muni de la topologie fine et sa trace sur tout hyperplan est partout dense dans cet hyperplan ; si K est un sous-espace de codimension 2, $h(K \cup C)$ est E, donc C est un cône non fermé dont toutes les projections planes sont fermées. Dans cet exemple, les variétés d'appui sont toutes de dimension finie ; si on considère le cône C_1, ensemble des points dont la première coordonnée non nulle est positive, toutes les variétés d'appui sont de dimension infinie ; l'hyperplan $x_1 = 0$ est hyperplan d'appui de C_1. La question se pose de savoir si toute pyramide convexe admet des hyperplans d'appui ; nous verrons que non.

Dans le cas de dimension finie, les projections d'une pyramide convexe sur tout sous-espace sont fermées. Des exemples montreront que cette propriété n'est plus vraie dans un espace vectoriel de dimension infinie. Nous poserons donc :

DÉFINITION. - Une pyramide convexe stricte est une pyramide convexe dont les cônes d'appui autour de tout sous-espace sont fermés.

Ceci revient à dire qu'une pyramide convexe stricte est un cône convexe fermé dont les projections sur tout sous-espace sont fermées. En particulier, un demi-espace est une pyramide convexe stricte.

PROPOSITION. - Si P est une pyramide convexe stricte, ses projection et trace sur tout sous-espace sont des pyramides convexes strictes.

DÉMONSTRATION. - La première partie résulte du théorème de composition des projections ; si $P' = P \cap E'$,

$$h(P' \cup H') = h(P \cup H') \cap E'$$

est fermé puisque $h(P \cup H')$ est fermé pour tout H'.

Soit E un espace vectoriel muni de la topologie fine.

DÉFINITION. - Une famille de formes linéaires (ℓ_i) , ℓ_i définie sur un sous-espace vectoriel F_i de E , $i \in I$, est <u>compatible</u> s'il existe une forme linéaire ℓ sur le sous-espace engendré par les F_i dont la restriction à tout F_i soit ℓ_i.

Alors cette forme ℓ est unique et sera appelée <u>forme engendrée</u> par la famille (ℓ_i).

Soit P une pyramide convexe de E, qui engendre E.

DÉFINITION. - Une <u>forme d'appui extrême</u> (ℓ) de P est une forme linéaire d'appui de P , vérifiant la condition suivante :

Si E_i est un sous-espace de dimension finie de E , il existe un sous-espace de dimension finie E_j contenant E_i , tel que la restriction ℓ_j de ℓ à E_j soit une forme d'appui extrême propre de $P_j = P \cap E_j$.

PROPOSITION. - <u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme d'appui ℓ de P soit une forme d'appui extrême est que la trace de P sur l'hyperplan H défini par cette forme engendre cet hyperplan.</u>

DÉMONSTRATION. - Si ℓ est une forme d'appui telle que $H \cap P$ engendre H , il existe une base de H formée de vecteurs portés par des génératrices de P ; soit E_i un sous-espace de dimension finie, E_i' un sous-espacace de dimension finie contenant E_i , engendré par les vecteurs de cette base. Soit E_j le sous-espace engendré par E_i' et par un vecteur situé à l'extérieur de H ; sur E_j , ℓ induit une forme d'appui extrême propre. Si E_i n'est pas contenu dans H , on se ramène à ce cas en prenant la trace de E_i sur H .

Réciproquement, si ℓ est une forme d'appui extrême de P et si $H \cap P$ n'engendre pas H , soit H'' supplémentaire dans H du sous-espace engendré par $H \cap P$, E_i est contenu dans H'' . Il existe E_j contenant E_i tel que la trace de E_j sur H contienne E_i et que $P \cap E'_i$ engendre E'_i ; il y a donc contradiction.

THÉORÈME. - Si P est une pyramide convexe stricte, il existe des formes d'appui extrême pour P.

DÉMONSTRATION. - Soient E_α un sous-espace quelconque de E, ℓ_α une forme d'appui extrême de $P_\alpha = P \cap E_\alpha$ dans E_α, supposé engendré par P_α. L'ensemble des ℓ_α est un ensemble ordonné inductif pour la relation d'ordre :

$\ell_\alpha < \ell_{\alpha'}$ si et seulement si ℓ_α est la restriction de $\ell_{\alpha'}$ à E_α : en effet, soit une famille totalement ordonnée (ℓ_α), $\alpha \in A$. Ces formes engendrent une forme linéaire ℓ_A sur $E_A = \sum E_\alpha$; cette forme ℓ_A est forme d'appui extrême de $P_A = P \cap E_A$: c'est une forme d'appui, car si x et y appartiennent à P_A et sont de part et d'autre de l'hyperplan H_A de E_A défini par la forme ℓ_A, il existe E_α contenant x et y et où x et y sont de part et d'autre de $H_\alpha = H_A \cap E_\alpha$ ce qui est impossible ; de plus si E_i est un sous-espace de dimension finie de E_A il existe un E_α, contenant E_i et dans cet E_α, E_j contenant E_i tel que la restriction ℓ_j de ℓ_A et par suite de ℓ_α à E_j soit forme d'appui extrême de P_j.

D'après le théorème de Zorn il y aura un élément maximal : ℓ dans l'ensemble des ℓ_α; ℓ est forme d'appui extrême d'un certain P_α. Montrons que $P_\alpha = P$ en raisonnant par l'absurde : si $P_\alpha \neq P$, soit $E'_\alpha = E_\alpha + Re_0$, $e_0 \notin E_\alpha$; soit H l'hyperplan de E_α déterminé par ℓ. A partir d'ici, nous utiliserons le fait que la pyramide est stricte. Le cône d'appui autour de H de $P \cap E'_\alpha$ dans E'_α est fermé par définition (voir proposition précédente); donc sa trace sur E'_α/H (qui est un plan) sera un angle saillant fermé ; un des côtés de cet angle n'est pas situé dans E. Soit H' l'hyperplan de E'_α qui lui correspond, $x \in H' \cap P'_\alpha$, $x \notin E$. H' est un hyperplan d'appui de P' par construction. Montrons que la forme ℓ' qui définit H' dans E'_α est une forme d'appui extrême de P'_α ; en effet soit $x \in E'_p = E_p + Re_0$, $E_{j,0}$ un sous-espace contenant E_p tel que la trace $H_{j,0}$ de H sur $E_{j,0}$ soit une face de P_j. Alors $H'_{j,0}$, trace de H' sur $E'_{j,0}$ est une face de P'_{j0} puisque c'est un hyperplan d'appui qui contient H_{j0} et x. Supposons donné $E'_i = E_i + Re_0$; dans E_α il existe E_n contenant $E_i + E_{j0}$ tel que $H_n = H \cap E_n$ soit une face de P_n. H'_n est un hyperplan d'appui de P'_n qui contient H_n et la face H'_{j0} de P'_{j0}

c'est une face de P'_n . Ainsi le théorème est démontré. Cette démonstration prouve de plus que toute forme d'appui extrême sur un sous-espace est induite par une forme d'appui extrême.

THÉORÈME. - Si φ est une forme d'appui extrême pour P , pyramide quelconque $[0, \varphi \rightarrow)$ est une arête de P^0 .

DÉMONSTRATION. - Supposons qu'il existe f' et f'' éléments de P^0 tels que :

$$\varphi = tf' + (1 - t)f'' \qquad 0 < t < 1 .$$

Soit E_i le sous-espace engendré par les vecteurs e_1 , e_2 quelconques ; il existe E_j contenant E_i tel que la restriction φ_j de φ à E_j soit forme d'appui extrême de $P_j = P \cap E_j$, donc les restrictions f'_j et f''_j de f' et f'' à E_j sont proportionnelles à φ_j où :

$$\begin{cases} f'_j = \lambda_j \; \varphi_j \\ f''_j = \mu_j \; \varphi_j \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \langle e_1 , f' \rangle = \lambda_j \langle e_1 , \varphi \rangle \\ \langle e_2 , f' \rangle = \lambda_j \langle e_2 , \varphi \rangle \end{cases}$$

Si nous prenons pour e_1 un vecteur tel que : $\langle e_1 , f' \rangle$ et $\langle e_1 , f'' \rangle$ soient strictement positifs et différents, nous pouvons écrire :

$$\langle e_2 , f' \rangle = \frac{\langle e_1 , f' \rangle}{\langle e_1 , \varphi \rangle} \langle e_2 , \varphi \rangle$$

et pour x quelconque :

$$\langle x , f' \rangle = \frac{\langle e_1 , f' \rangle}{\langle e_1 , \varphi \rangle} \langle x , \varphi \rangle$$

donc f' et f'' sont proportionnels à φ , ce qui prouve que $[e , \varphi \rightarrow)$ est une arête du polaire de P .

Ce théorème prouve l'existence d'arêtes pour le polaire d'une pyramide convexe stricte.

THÉORÈME. - <u>Une pyramide convexe stricte est l'intersection de ses appuis extrêmes.</u>

DÉMONSTRATION.- Soit Π l'ensemble des formes d'appui extrême de P. P est évidemment contenu dans le polaire de Π (où le polaire est pris dans E, c'est-à-dire que c'est l'ensemble des points de E qui rendent positives ou nulles toutes les formes qui appartiennent à Π).

Inversement, soit $x \in \Pi^0$; alors $x \in E_i$; la restriction à E_i de l'ensemble des formes d'appui extrême de P sera l'ensemble des formes d'appui extrême de P_i qui par suite appartiennent à P_i' (chapitre 2) ; ainsi $x \in P$ et $\Pi^0 = P$.

On pourrait penser que le polaire de P est l'enveloppe fermée convexe de ses arêtes, ceci est faux comme nous le montrerons sur un exemple.

Nous avons utilisé explicitement le fait que P soit une pyramide convexe stricte dans la démonstration de l'existence des formes d'appui extrême. Nous donnerons toutefois des exemples de pyramides non strictes où il existe des formes d'appui extrême.

REMARQUE. - Dans le cas où la pyramide convexe n'est pas stricte, un élément maximal de $\mathcal{F}$ peut ne pas être un hyperplan d'appui extrême, comme le montre l'exemple suivant :

Soit E un espace vectoriel à base dénombrable $(e_0, e_0', e_1, \dots, e_n, \dots)$ Soit (ε_i) une famille de vecteurs ne contenant ni e_0, ni e_0', telle que chaque ε_i soit combinaison linéaire positive de e_0 et e_0' et que e_0 et e_0' soient adhérents à la réunion des ε_i. Posons :

$$e_i' = e_i + \lambda_i \varepsilon_i \qquad \lambda_i > 0$$

Les vecteurs (e_i', e_0, e_0') forment une base de E. Soit P le cône convexe engendré par les vecteurs (e_i, e_i'). Soit E_i un sous-espace de dimension finie, E_i' le plus petit sous-espace (de dimension finie) contenant E_i engendré par les vecteurs $(e_i'$ $(i \in I)$, e_0, $e_0')$,

$$E_i'' = E_i' + Re_0 + Re_0'$$

E_i'' est aussi engendré par les vecteurs $(e_i$ $(i \in I)$, e_0, $e_0')$. La trace de P sur E_i'' est l'enveloppe convexe des vecteurs (e_i, e_i'), $i \in I$, donc c'est une pyramide convexe et la trace de P sur tout sous-espace de dimension finie est une pyramide convexe, donc P est une pyramide convexe. Soit H le sous-espace engendré par les vecteurs (e_i), $i \in N$. Le demi-hyperplan limité par

par H, contenant e_0 n'appartient pas à $h(H \cup P)$, puisqu'il ne contient aucune génératrice de P, mais ce demi-hyperplan est limite des demi-hyperplans limités par H et contenant e'_i, donc $h(H \cup P)$ n'est pas fermé et la pyramide convexe P n'est pas stricte. Nous allons montrer que H est un élément maximal de $\mathfrak{F}$; en effet, s'il existait un hyperplan d'appui extrême de P passant par H, sa trace sur le plan (e_i, e'_i) serait un appui de la trace P_0 de P sur ce plan, et contiendrait R^+e_0 (ou $R^+e'_0$). Or la trace de P sur l'hyperplan H_0 engendré par H et e_0 se réduit à H, donc n'engendre pas cet hyperplan, et H_0 n'est pas un hyperplan d'appui extrême de P.

3. Exemples de pyramides convexes.

PROPOSITION. - Toute pyramide convexe peut être définie à l'aide d'un système d'inégalités.

DÉMONSTRATION. - Une pyramide convexe P est algébriquement faiblement fermée donc $P^{oo} = P$ et $P = (P^o)^o$, c'est-à-dire :

$$P = \{x : \langle x, f \rangle \geqslant 0 \ \forall f \in P^o\} .$$

Dans le cas où P est une pyramide convexe stricte, nous avons vu que :

$$P = \{x : \langle x, \varphi \rangle \geqslant 0 \ \forall \varphi \ : \text{forme d'appui extrême}\} .$$

Ceci nous conduit à étudier les ensembles définis par un système d'inéquations.

DÉFINITION 1. - Un système Ω de formes linéaires ω_i défini sur un espace vectoriel E est incompatible si :

$$\langle x, \omega_i \rangle = 0 \ \forall \omega_i \in \Omega$$

entraîne : $x = 0$.

Deux systèmes de formes sont dits équivalents si leurs polaires dans E sont identiques.

DÉFINITION 2. - Un système Ω' de formes est irréductible si :

$$\{x : \langle x, \omega_i \rangle = 0 \ \forall \omega_i, \ \omega_i \in \Omega'\}$$

est strictement contenu dans :

$$\{x : \langle x, \omega_j \rangle = 0 \ \forall \omega_j \neq \omega_i, \ \omega_i, \omega_j \in \Omega'\}$$

Soit $\Omega^{\perp}$ l'ensemble des x pour lequels toutes les formes de Ω s'annulent. Alors la définition 2 est équivalente à :

$$(\Omega_1 - \omega)^{\perp} \supset \Omega^{\perp} , \quad \forall \omega \in \Omega_1$$

PROPOSITION. - A un système Ω_1 irréductible et incompatible est associé un système de vecteurs (e_i) tels que :

$$< e_i , \omega_i > = 1 \qquad\qquad \omega_i \in \Omega_1$$

$$< e_i , \omega_j > = 0 \qquad \forall\, j \neq i , \quad \omega_j \in \Omega_1$$

l'ensemble de ces vecteurs s'appelle la pseudo base associés à Ω .

THÉORÈME. - Si on peut extraire d'un système incompatible un sous-système irréductible maximal, ce sous-système est incompatible.

DÉMONSTRATION. - Soit Ω' le sous-système irréductible maximal extrait de Ω . S'il existait une forme $u \in \Omega'$ telle que :

$$< x , u > = 0 \quad \text{avec} \quad < x , \omega^1 > \neq 0 .$$

Soit Ω'' le système obtenu en adjoignant la forme u au système Ω' . Montrons que Ω'' serait alors irréductible, ce qui établira la contradiction voulue. En effet, soit $\omega \in \Omega''$, $\omega \neq u$;

$$(\Omega')^{\perp} = (\Omega' - \omega)^{\perp} \cap \omega^{\perp}$$

et $(\Omega')^{\perp}$ est hyperplan de : $(\Omega' - u)^{\perp}$

$$(\Omega'' - \omega)^{\perp} = (\Omega' - \omega)^{\perp} \cap u^{\perp}$$

et

$$(\Omega'')^{\perp} = [(\Omega' - \omega) \cup u \cup \omega]^{\perp}$$

$$= (\Omega' - \omega)^{\perp} \cap u^{\perp} \cap \omega^{\perp}$$

comme $\omega^{\perp} \cap u^{\perp} \neq u^{\perp}$ on a :

$$(\Omega'')^{\perp} \neq (\Omega'' - \omega)^{\perp}$$

A ce sous-système on peut associer les vecteurs e_i :

$$\langle e_i , \omega_i \rangle = 1$$

$$\langle e_i , \omega_j \rangle = 0 \qquad \forall j \neq i$$

ces vecteurs existent et sont uniques par construction. Ils forment une pseudo-base de Ω .

On peut se demander si de tout système,on peut extraire un système irréductible équivalent. Je vais donner un exemple montrant que la réponse est négative, en partant d'un système incompatible.

Soient F un espace vectoriel et (p_i) une base algébrique de F ; construisons les hyperplans K_i (définis par les formes f_i)

$$\langle p_j , f_i \rangle = \lambda_{ij}$$

où λ_j sont les termes d'un déterminant de Van der Monde :

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_1^i & \cdots \\ \mu_2 & \cdots & \mu_2^i & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_j & \cdots & \mu_j^i & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

avec $\mu_i \neq \mu_j$ si $i \neq j$. Aucun des mineurs de ce déterminant n'est nul donc tout sous-système infini des f_i aura pour seule solution 0 ; il est incompatible mais non irréductible. Soit P un cône fermé convexe. Cherchons les conditions à imposer au polaire de P pour que P soit une pyramide convexe. Soit Ω ce polaire

THÉORÈME. - Pour que $P = \Omega^0$ soit une pyramide convexe dont 0 est un point extrémal, il faut que Ω soit incompatible et que le système de restriction des formes de Ω à tout sous-espace de dimension finie soit équivalent à un système fini de formes.

DÉMONSTRATION. - S'il existe une droite D commune à tous les hyperplans définis par les formes $\omega_i \in \Omega$, D serait dans P et 0 ne serait pas point extrémal. De plus, la trace de P sur tout sous-espace de dimension finie doit être une pyramide convexe, donc définie comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Ainsi la restriction des formes de Ω à ce sous-espace est équivalente à un système fini de formes sur ce sous-espace.

Dans le cas où l'espace E a une base dénombrable, la condition du théorème est nécessaire et suffisante pour que P soit une pyramide convexe.

Le plus simple exemple de pyramide convexe est le suivant :

DÉFINITION 3. - Une pyramide simpliciale C de E est l'enveloppe convexe des vecteurs d'une base algébrique de E.

Soit (e_i) une base donnée de E, C sera l'ensemble des points dont toutes les coordonnées sont positives ou nulles par rapport à cette base. Le cône ainsi déterminé est une pyramide convexe car le cône d'appui en chaque point est fermé mais ce n'est pas une pyramide convexe stricte. Cependant les formes $\{x_i\}$ sont les formes d'appui extrême de C, et C est l'intersection de ses appuis extrêmes ; son polaire n'est pas l'enveloppe convexe fermée de ses arêtes. La facette de tout point x est de dimension finie car : tout segment dont x est point intérieur est entièrement situé dans le sous-espace de dimension finie auquel appartient x, engendré par tous les vecteurs e_i sur lesquels les coordonnées de x ne sont pas nulles. Les demi-droites $[0, e_i \to)$ sont les arêtes de cette pyramide qui est ainsi l'enveloppe convexe de ses arêtes. Il est évident que les vecteurs (e_i) forment une pseudo-base pour le système $\Omega = \{x_i \quad \forall \ i\}$.

Cette dernière propriété nous suggère l'exemple suivant : soient E un espace vectoriel muni de la topologie fine. Ω un système incompatible et irréductible (e_i) la pseudo-base associée, que nous supposerons engendrer E. Supposons pour simplifier (e_i) dénombrable.

Construisons l'espace vectoriel topologique E', somme directe de E et de Re_0, dont (e_0, e_i) est une base algébrique. Soit ω_i la forme dont la restriction à E appartient à Ω et qui satisfait aux conditions

$$\begin{cases} \langle e_i , \omega_i \rangle = 1 & \\ \langle e_j , \omega_i \rangle = 0 & \forall \ j \neq i , \ j \neq 0 \\ \langle e_0 , \omega_i \rangle = 1 & \end{cases}$$

Soit $\Omega' = \{\omega_i\}$.

PROPOSITION. - Ω' <u>est un système incompatible et irréductible</u>.

DÉMONSTRATION. - Soit x un point tel que : $\langle x , \omega_i \rangle = 0 \quad \forall \omega_i \in \Omega$. Un tel point ne peut pas appartenir à E puisque la restriction de Ω à E est incompatible, donc :

$$x = x_0 e_0 + y \qquad y \in E .$$

Soit $y \in E_n$; si on prend $i > n$:

$$\langle y , \omega_i \rangle = 0$$

et

$$\begin{aligned} \langle x , \omega_i \rangle &= x \langle e_0 , \omega_i \rangle + \langle y , \omega_i \rangle \\ &= i x_0 \neq 0 . \end{aligned}$$

Ainsi le système Ω' est incompatible.

De plus soit ω_p une forme de Ω' , pour $i > p$, ω s'annule sur tous les $e_1 , \dots , e_p$, donc sur E_p ; ainsi l'ensemble des x tels que :

$$\langle x , \omega_i \rangle = 0 \qquad \forall i \neq p$$

est contenu dans E_p ; l'annulateur de la restriction de Ω à E_p est strictement contenu dans celui de la restriction de $\Omega - \omega_p$ à E_p .

Etudions le cône $C' = \Omega'^0$. L'intersection de ce cône avec E est la pyramide simpliciale C de E , enveloppe convexe des vecteurs $\lambda_i e_i$, $\lambda_i \geqslant 0$. Soit E'_n un sous-espace de dimension finie ; le demi-espace $\langle x , \omega_i \rangle \geqslant 0$ pour $i > n$, coupe E'_n suivant le demi-espace de E'_n bordé par E_n et contenant e_0 ; les demi-espaces $\langle x , \omega_i \rangle \geqslant 0$ pour $i \leq n$ définissent n demi-espaces dans E'_n limités par n hyperplans de E'_n ayant une droite en commun : ℓ_n . L'intersection C'_n de C' avec E'_n sera une pyramide convexe à $(n + 1)$ arêtes. Ainsi C' est une pyramide convexe stricte (on pourrait démontrer ceci même dans le cas où E' n'a pas une base dénombrable), mais ce n'est pas une pyramide stricte ; néanmoins, elle est l'intersection de ses appuis extrêmes.

Etudions la facette d'un point x de E' ; soit $x \in E'_n$. E'_n est engendré par les vecteurs de la base (e_0 , e_i) sur lesquels les coordonnées de x sont différentes de 0 .

Deux cas se présentent :

1° si x annule presque toutes les formes de Ω, $x \in E_n$ et par suite appartient à une face de $C_n = C \cap E_n$.

2° si x n'annule qu'un nombre fini de formes ω_i, $i \in I$, $x \notin E$; alors x appartient à une face de C'_n, de dimension supérieure ou égale à 1 ; la facette $\mathcal{F}_x$ de x engendre le sous-espace déterminé par l'intersection des :

$$\langle x , \omega_i \rangle = 0 \qquad i \in I$$

qui contient x, c'est-à-dire le sous-espace de dimension infinie déterminé par x et les e_j, $j \notin I$.

En particulier les demi-droites $[0 , e_i \rightarrow)$, $i \neq 0$ sont des arêtes de C' mais C' n'est pas l'enveloppe convexe de ses arêtes.

Les formes extrêmes de C' sont les formes $\omega_i \in \Omega'$. Cet exemple pourrait être généralisé.

DÉFINITION 4. - Une <u>pyramide simpliciale générale</u> de E' est le polaire d'un système irréductible et incompatible Ω' ayant la propriété suivante :

Il existe un sous-espace de dimension finie H de E' tel que la restriction de Ω à H' supplémentaire de H dans E' admette pour pseudo-base une base de H', qu'aucune des formes de Ω ne s'annule sur H, et que la restriction de Ω à H soit équivalente à un système fini incompatible.

PROPOSITION. - Une pyramide simpliciale générale C' est une pyramide convexe qui admet des arêtes ; dans C' il y a des points dont la facette est de dimension finie et des points où elle est de dimension infinie.

REMARQUE. - H peut être de dimension infinie, en ajoutant des conditions supplémentaires pour Ω'.

4. <u>Arêtes et faces des pyramides convexes.</u>

Dans le cas d'un espace à un nombre fini de dimensions, une pyramide convexe était l'enveloppe convexe de ses arêtes ; le dernier exemple nous montre que ceci n'est pas toujours vrai dans un espace vectoriel de dimension infinie, nous pouvons donc nous demander si une pyramide convexe a des arêtes.

Un cône convexe fermé peut ne pas posséder d'arêtes. En particulier si le cône, polaire du système $\mathcal{F}$ du paragraphe précédent n'a pas d'arêtes : en effet s'il existait une arête elle devrait être l'intersection d'un système infini d'hyperplans K et tout sous-système infini a pour seule solution 0 . Mais ce cône $\mathcal{F}^0$ n'est pas une pyramide convexe. En effet, il faudrait que l'intersection de $\mathcal{F}^0$ avec tout sous-espace de dimension finie soit une pyramide convexe, or soit :

$$F_2^0 = Rp_0 + Rp_1 + Rp_2$$

$$(\mathcal{F}^0)_2 = F_1 \cap (\mathcal{F}^0)$$

et

$$(\mathcal{F}^0)_1 = \left\{ x : \langle x , \tilde{f} \rangle \geq 0 \quad \forall \tilde{f} \text{ ; restriction de } f \in \mathcal{F} \text{ à } F_2 \right\}$$

$\{\tilde{f}\}$, dans F_2^* a pour enveloppe fermée convexe le cône de sommet 0 dont la base dans $x_0 = 1$ est la parabole $y = x^2$, donc $\{\tilde{f}\}$ n'est pas équivalent à un système fini.

THÉORÈME. - <u>Une pyramide convexe</u> P <u>contenue dans une pyramide simpliciale est l'enveloppe convexe de ses arêtes</u> ; <u>la facette de tout point est de dimension finie</u>.

DÉMONSTRATION. - Soit (e_i) les vecteurs de la base de E tels que P soit contenu dans la pyramide simpliciale enveloppe convexe des $(\lambda e_i)_i \; \lambda \geq 0$. Ainsi, quel que soit $x \in P$, on aura :

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i .$$

Considérons les ensembles :

$$P_i = E_i \cap P ,$$

E_i sous-espace de dimension finie de E . P_i est une pyramide convexe enveloppe convexe d'un nombre fini d'arêtes. Soit $[0 , x \rightarrow)$ une arête de P_i . Montrons que $[0 , x \rightarrow)$ est une arête de P . En effet, sinon, il existerait y' et y" avec :

$$x = ty + (1 - t)y'' \quad 0 < t < 1 , \quad y' , y'' \in P , \quad y' \neq \lambda x$$

En projetant cette égalité sur les vecteurs de la base :

$$x_n = ty'_n + (1 - t)y''_n \qquad \text{avec } y'_n , y''_n \geqslant 0$$

donc :

$$y'_n = y''_n = 0 \qquad \text{si } x_n = 0$$

et y' , y'' sont dans E . D'où

LEMME. - Toute arête de P_i est une arête de P .

De plus, un point x quelconque de P appartient à un des sous-espaces E_i , puisque tout point n'a qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Ainsi x est barycentre d'un nombre fini de points portés par les arêtes et P est l'enveloppe convexe de ses arêtes.

PROBLÈME. - Si P a des arêtes, il se peut que P ne soit pas contenu dans une pyramide simpliciale, puisque P peut ne pas être enveloppe convexe de ses arêtes, comme le montre l'exemple de la pyramide simpliciale générale. La condition nécessaire et suffisante pour que P ait des arêtes n'est-elle pas que P soit contenu dans une pyramide simpliciale générale ?

Etant donnée une pyramide convexe dont 0 est point extrémal, quand peut-on construire une base de E telle que les points de P aient des coordonnées positives ou nulles ?

Construisons une famille d'hyperplans vectoriels tels que P soit d'un même côté de chacun d'eux. Pour cela, soit D , une droite quelconque dont l'intersection avec P est 0 ; d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan H_1 passant par 0 et qui ne rencontre pas l'intérieur de l'ensemble formé par l'enveloppe convexe de P et de D_1 . Si cet hyperplan ne contient pas D , conservons-le, sinon, soit h_1 un plan passant par D_1 , il coupe P selon un angle saillant et par suite on peut trouver une droite D'_1 qui ne rencontre P qu'en 0 et D'_1 n'appartient pas à H_1 puisque $H_1 \cap P = 0$.

Par D'_1 il passe un hyperplan H'_1 qui ne rencontre pas l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble formé de P et de D_1 et qui ne contient pas D_1 , sinon H'_1 contiendrait h_1 et $H'_1 \cap P \neq 0$.

Considérons tous les hyperplans H_i jouissant de cette propriété. Supposons qu'il existe une droite D contenue dans tous les hyperplans H_i ; on pourrait recommencer la construction précédente avec D et il existe un hyperplan H_j . Par suite l'intersection de tous les hyperplans H_i est 0 . Soit Ω le système des formes qui définissent les hyperplans H_i ; ce système est incompatible.

Si Ω contient un système incompatible et irréductible et si la pseudo-base associée à ce sous-système engendre E , alors P est contenu dans une pyramide simpliciale. Mais nous avons vu un exemple de système incompatible qui ne possède pas de sous-système incompatible et irréductible. Le dernier théorème ne s'appliquera donc qu'à des cônes très particuliers.

5. Polyèdres convexes.

THÉORÈME. - Si P est un polyèdre convexe pseudo-borné, il n'existe pas, dans P , de suite convergente de points extrémaux.

DÉMONSTRATION. - Si une suite (x_n) de points extrémaux était convergente elle serait contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie (chapitre 1). La trace de P sur ce sous-espace est un polyèdre convexe borné qui ne possède qu'un nombre fini de points extrémaux ; tout point de cette trace qui est point extrémal dans P est extrémal dans p , donc on a contradiction.

Tous les résultats précédents se transportent au cas des polyèdres convexes pseudo-bornés.

THÉORÈME. - Un polyèdre convexe strict est l'intersection de ses formes d'appui extrême et son polaire a des arêtes.

THÉORÈME. - Un polyèdre convexe pseudo-borné contenu dans un simplexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux et toute facette est de dimension finie.

THÉORÈME. - Un simplexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Un simplexe généralisé a des points extrémaux et la facette d'un de ses points peut être de dimension finie ou non.

CHAPITRE 4.

POLYÈDRES TOPOLOGIQUES

1. Définitions.

Soit E un espace vectoriel topologique, $\mathcal{T}$ sa topologie.

DÉFINITION 1. - Une pyramide topologique $\bar{P}$ de l'espace vectoriel E , muni de la topologie $\mathcal{T}$ est l'adhérence pour $\mathcal{T}$ d'une pyramide convexe P de E muni de la topologie fine.

Cette définition est plus générale que celle donnée au chapitre 3. Si on munit E de la topologie fine, pour cette topologie, toute pyramide convexe est une pyramide topologique, et réciproquement.

Si l'intérieur de P n'est pas vide (pour la topologie $\mathcal{C}$), il est identique à celui de $\overline{P}$.

DÉFINITION 2. - Un <u>polyèdre topologique</u> $\overline{C}$ est la fermeture pour $\mathcal{C}$ d'un polyèdre convexe C.

Si C est la trace d'une pyramide convexe P sur un hyperplan fermé affine H, le cône engendré par $\overline{C}$ est une pyramide topologique $\overline{P}$. Inversement, si $\overline{P}$ est une pyramide topologique, H un hyperplan fermé affine qui rencontre toutes les génératrices de $\overline{P}$, la trace de $\overline{P}$ sur H est un polyèdre topologique pseudo-borné.

2. <u>Pseudo-bases et bases topologiques.</u>

Soient E un espace vectoriel topologique, Ω un système de formes ω_i, incompatible et irréductible (voir chapitre 3).

DÉFINITION 1. - La pseudo-base (e_i) associée au système Ω est <u>une pseudo-base topologique</u>.

Etant donné un point x quelconque de E, on lui associera les nombres $x_i = \langle x , \omega_i \rangle$, qui seront appelés ses coordonnées. Deux points différents auront des coordonnées différentes.

REMARQUE. - Un système de vecteurs total et topologiquement libre (c'est-à-dire qui engendre un sous-espace partout dense dans E, et tel qu'un vecteur e_i n'appartienne pas au sous-espace fermé H_i engendré par les autres) n'est pas toujours une pseudo-base topologique ; les sous-espaces H_i sont des hyperplans fermés ; soit ω_i la forme continue qui s'annule sur H_i et qui prend la valeur 1 pour e_i ; pour que l'ensemble Ω de toutes ces formes soit un système incompatible, il faut et il suffit que l'intersection des H_i se réduise à l'origine ; il n'en est pas forcément ainsi comme le montre l'exemple suivant : soient E un espace vectoriel topologique muni d'une pseudo-base topologique, qui soit un système total (e_i), E_1 un espace vectoriel topologique quelconque, E_2 l'espace somme directe de E et de E_1, p la projection canonique de E_2 sur E ; munissons E_2 de la topologie image réciproque par p de la topologie de E ; soit (e_i') une famille de vecteur de E_2 telle que e_i' se projette sur

e_i ; alors le système (e_i') est total et topologiquement libre mais non incompatible, car un point quelconque de E_1 a ses coordonnées selon les (e_i') nulles ; remarquons cependant que dans cet exemple E_2 n'est pas un espace séparé.

Supposons désormais l'espace vectoriel topologique E muni d'une pseudo-base topologique (e_i) ; soient E' le sous-espace engendré par les vecteurs e_i , S' le cône engendré par ces mêmes vecteurs, S l'ensemble des points x tels que

$$< x , \omega_i > \geqslant 0 \quad \text{pour tout } i \in I$$

S est un cône fermé qui contient l'adhérence de S' et S' est une pyramide convexe, enveloppe convexe de ses arêtes.

THÉORÈME. - <u>Un point quelconque de</u> S' <u>a même facette dans</u> S' <u>et dans le cône fermé</u> S , <u>polaire du système</u> Ω ; <u>en particulier les arêtes de</u> S' <u>sont arêtes de</u> S ; <u>l'adhérence de la facette d'un point quelconque de</u> S <u>est l'intersection des hyperplans</u> H_i <u>qui le contiennent.</u>

En effet, soient x un point de S , $\mathfrak{F}_x$ sa facette dans S . Si x appartient à H_i , tout segment qui le contient comme point intérieur est contenu dans H_i ; réciproquement tout segment contenu dans l'intersection des H_i appartient à S .

DÉFINITION 2. - Une <u>base topologique</u> est une pseudo-base topologique telle que tout point de l'espace se décompose sous la forme :

$$x = \sum_{i \in I} x_i e_i$$

Il en résulte qu'une base topologique est un système total et que $x_i = < x , \omega_i >$ en effet, x est limite des sommes finies $\sum x_i e_i$, suivant le filtre $\mathfrak{F}$ des sections dans l'ensemble des parties finies de I et :

$$< x , \omega_i > = \lim_{\mathfrak{F}} < s_J , \omega_i >$$

Comme $< s_J , \omega_i > = x_i$, $< x , \omega_i > = x_i$.

Toute base algébrique est une base topologique pour la topologie fine. Dans un espace de Hilbert, toute base orthonormale est une base topologique ; ce dernier exemple montre que si l'on se donne a priori les nombres x_i , il n'existe pas toujours un point x dont les x_i soient les coordonnées puisque, ici, il faut de plus que la famille (x_i^2) soit sommable (le théorème de Cramer ne s'étend pas à un système de formes linéaires incompatible infini).

Si la pseudo-base (e_i) est une base topologique, S est l'adhérence de S' ; S est donc une pyramide topologique, qui sera appelée pyramide simpliciale topologique. En général, S n'est pas une pyramide convexe car la restriction du système Ω à un sous-espace de dimension finie n'est pas équivalente à un système fini de formes. De ce qui précède, il résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. - Une pyramide simpliciale topologique est l'enveloppe fermée convexe de ses arêtes.

COROLLAIRE. - Une pyramide convexe topologique P, adhérence d'une pyramide convexe contenu dans S', est l'enveloppe convexe fermée de ses arêtes.

DÉMONSTRATION. - Soit π la pyramide convexe dont P est l'adhérence. π est contenue dans une pyramide simpliciale, donc est l'enveloppe convexe de ses arêtes qu sont aussi arêtes de la pyramide P, et P est l'enveloppe fermée convexe de ses arêtes.

Le simplexe Σ ayant pour sommets les points $a_i = \lambda_i e_i$ a pour adhérence un simplexe topologique $\overline{\overline{\Sigma}}$ qui sera la trace de S sur l'hyperplan affine fermé contenant les points a_i ; $\overline{\overline{\Sigma}}$ est l'enveloppe fermée convexe de ses sommets qui sont les points a_i. Tout polyèdre topologique, adhérence d'un polyèdre convexe contenu dans le simplexe, est également l'enveloppe fermée convexe de ses sommets.

Soit E_1 le dual topologique de E, (f_i), $i \leq k$ un nombre fini d'éléments de E. Soit H_i l'hyperplan défini par $\langle x , f_i \rangle = a_i$; nous allons étudier les ensembles C contenus dans S, intersection d'un nombre fini d'espaces et de demi-espaces, c'est-à-dire l'ensemble des points x de S qui vérifient :

$$\begin{aligned} &\langle x , f_i \rangle = a_i \quad i \in I_1 \\ &\langle x , f_j \rangle \leq a_j \quad j \in I_2 \end{aligned} \qquad \underset{\text{fini}}{I_1 \cup I_2 \subset N}$$

C est un ensemble fermé dans E. La trace H_i' de H_i sur E' sera un hyperplan affine de E' et la trace C' de C sur E' sera l'ensemble intersection de S' avec les hyperplans et demi-espaces limités par les H_i' donc C', polyèdre convexe dans S' est l'enveloppe convexe de ses points extrêmaux, s'il est pseudo-borné. C est la fermeture de C'. Ainsi, C est un polyèdre topologique, enveloppe convexe fermée de ses points extrêmaux.

PROPOSITION. - Si l'ensemble C défini par :

$$x_i \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad i \in I$$

$$< x , f_i > = a_i \qquad 1 \leq i \leq k$$

$$< x , f_i > \leq a_i \qquad k < i \leq m$$

est pseudo-borné, c'est un polyèdre topologique, enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux ; tout point extrémal a au plus m coordonné différentes de 0 .

DÉMONSTRATION. - Soient x un point extrémal de C , E_N un sous-espace de dimension finie qui contient x ; la trace C_N de C sur E_N est un polyèdre borné de E_N , dont x est un sommet ; il passe au moins $(N - 1)$ hyperplans d'appui extrême par ce sommet ; ces hyperplans sont définis par certaines équations :

$$x_i = 0$$

$$< x , f_i > = a_i \quad 1 \leq i \leq m$$

(car la trace de H_i est un hyperplan affine de E_N) . Il y a donc au plus m coordonnées x_i qui sont différentes de 0 .

Nous avons supposé dans la proposition précédente que C était pseudo-borné. Si on supprimait cette condition, on pourrait encore montrer l'existence de points extrêmaux pour C en utilisant le fait que C est somme directe d'un ensemble pseudo-borné et du cône de sommet 0 , dont les génératrices sont parallèles aux demi-droites contenues dans C . Mais C n'est plus l'enveloppe fermée convexe de ses points extrêmaux.

REMARQUE. - On peut se demander dans quel cas C sera borné. Si E est un espace réflexif (BOURBAKI [3] et [4]), on a :

THÉORÈME. - Soient E un espace réflexif, C un ensemble intersection des demi-espaces :

$$< x , f_i > \leq 0 \quad (f_i) , i \in I = F_1$$

$$< x , f_j > \leq 1 \quad (f_j) , j \in J = F_2$$

La condition nécessaire et suffisante pour que C soit borné est que l'enveloppe convexe de la réunion des enveloppes convexes de $F_1 \cup \{0\}$ et de F_2 soit un voisinage de 0 dans le dual de E.

DÉMONSTRATION. - On ne change pas C en remplaçant F_1 par le cône $C_1 = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda F_1$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\langle x , f_i \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad f \in F_1 \Leftrightarrow x \in C_1^0$$

$$\langle x , f_j \rangle \leq 1 \quad \text{pour tout} \quad f_j \in F_2 \Leftrightarrow x \in F_2^0$$

(le polaire a été défini au chapitre 2).

Pour que C soit borné, il faut et il suffit que son polaire soit un voisinage V de l'origine dans le dual de E ([3] et [4]), et :

$$C^0 = (C_1^0 \cap F_2^0)^0 = V$$

C_1^0 et F_2^0 sont des ensembles convexes faiblement fermés ; par suite :

$$C^0 = \text{enveloppe fermée convexe de} \quad (C_1^{00} \cup F_2^{00})$$

avec :

$$C_1^{00} = \text{enveloppe fermée convexe de} \quad C_1$$

$$F_2^{00} = \text{enveloppe fermée convexe de} \quad F_2 \cup \{0\}$$

Tous les résultats précédents s'appliquent en particulier à un espace vectoriel muni de la topologie fine, à l'espace de Hilbert et à l'espace $L^1(N)$, ((ℓ) dans [2]), espace des séries absolument convergentes, avec la norme :

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

dont une base topologique est constituée par les vecteurs e^i, séries dont tous les termes sont nuls sauf la i-ième qui est égale à 1. Cet espace est le dual fort de l'espace $\mathcal{K}(N)$ ((c) dans [2]), espace des suites $x = (x_n)$, de nombres réels, avec la norme :

$$\|x\| = \sup |x_n| .$$

Son dual est $L^{\infty}(N)$ ((m) dans [2]), espace des suites bornées $y = (y_n)$ avec la norme :

$$\|y\| = \sup |y_n|$$

L'espace $L^1(N)$ n'est pas réflexif. La pyramide simpliciale topologique de cet espace a son intérieur vide (on a plus : son intérieur est vide pour la topologie fine). Une partie des résultats de ce chapitre a été démontrée directement dans ce cas par P. ROSENBLOOM [8].

3. Espace des charges.

Soient S un espace topologique ou non, $\mathfrak{A}$ une algèbre booléenne de sous ensembles de S fermée par rapport à l'opération de la réunion dénombrable ; (rappelons qu'une telle algèbre booléenne est une famille de sous-ensembles de S contenant, avec un sous-ensemble, son complémentaire, et avec deux sous-ensembles, leur réunion).

DÉFINITION (ALEXANDROFF [1]). - Une fonction q définie sur $\mathfrak{A}$, additive au sens restreint et bornée sera appelée une charge.

A partir de cette charge, nous pourrons définir une intégrale : soit $b(\mathfrak{A})$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}(S , R)$ (ensemble des fonctions numériques bornées définies sur S) formé des fonctions f telles que $f^{-1}(I) \in \mathfrak{A}$, quel que soit l'intervalle I. La restriction à $b(\mathfrak{A})$ de la norme de la convergence uniforme :

$$||f|| = \sup_{x \in S} |f(x)|$$

fait de cet espace un espace de Banach. Posons :

$$E_i = \{x : a_{i-1} \leq f(x) < a_i , \quad 1 \leq i \leq n\}$$

où $f \in b(\mathfrak{A})$, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_i \leq \dots \leq a_n$ avec :

$$a_1 < \inf_{x \in S} f(x) = m$$

$$a_n > \sup_{x \in S} f(x) = M$$

Par définition :

$$\int f \, dq = \lim_{\max|a_i - a_{i-1}| \to 0} \sum_1^n a_i \, q(E_i)$$

On peut démontrer l'existence de cette intégrale et prouver qu'il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des charges q et le dual de $b(\mathfrak{A})$; l'élément Q qui correspond à q est défini par :

$$q(E) = Q(c_E)\ ,\quad E \in \mathcal{A}\ ,\quad c_E \text{ fonction caractéristique de } E\ .$$

Enfin si on pose :

$$|q| = q^+ - q^-\ ,\quad q^+(E) = \sup_{\substack{E_1 \subset E \\ E_1 \in \mathcal{A}}} q(E_1)\ ,\quad q^-(E) = \inf_{\substack{E_1 \subset E \\ E_1 \in \mathcal{A}}} q(E_1)$$

on a :

$$\|Q\| = |q|\ (S)$$

L'espace $b^*(\mathcal{A})$ sera appelé espace des charges, lorsqu'il est muni de cette norme.

EXEMPLES de charges. - Lorsque S est muni d'une topologie d'espace compact et que $\mathcal{A}$ est engendré par les ouverts de S, toute mesure de Radon sur S est une charge ; ces charges particulières sont complètement additives. Si S est un espace topologique et si $\mathcal{A}$ est le corps des ensembles K-boréliens, toute capacité bornée alternée et monotone d'ordre infini (G. CHOQUET [5]) est une charge dans ce sens. Nous verrons plus tard que les résultats obtenus à l'aide des charges permettent d'avoir des résultats sur les espaces réflexifs.

DÉFINITION. - Une charge première est une charge qui ne prend que les valeurs 0 et 1 . Un élément atomique de $\mathcal{A}$ est un ensemble appartenant à $\mathcal{A}$ et dont aucun sous-ensemble n'appartient à $\mathcal{A}$. Si une charge première q est telle que $q(E) = 1$ si et seulement si E est un élément atomique de $\mathcal{A}$, on dit que c'est une charge atomique.

THÉORÈME. - Si on ne peut trouver plus de k ensembles disjoints E_i avec $q(E_i)$ différent de 0 , q est combinaison linéaire de k charges premières au plus.

Vue l'importance de ce théorème dans l'étude des polyèdres topologiques de l'espace des charges, nous allons le démontrer [9].

DÉMONSTRATION. - Posons pour $E \in \mathcal{A}$:

$$q_i(E) = q(E \cap E_i)/q(E_i) \qquad 1 \leq i \leq k$$

où les E_i sont k ensembles disjoints tels que leur charge ne soit pas nulle. Les q_i sont des charges premières : en effet si $q_i(E)$ est différente de 0

et 1 , $q(E_i \cap E)$ et $q(E_i - E)$ ne s'annulent pas ; il y aurait $(k+1)$ ensembles disjoints qui ont une charge non nulle, donc pour tout $A \in \mathcal{U}$:

$$q(A) = q(A - (\bigcup_{i=1}^{k} E_i) + q(A \cap (\bigcup_{1}^{k} E_i))$$

Si $q(A - \bigcup_{1}^{k} E_i) \neq 0$, (E_i) et $(A - \bigcup_{1}^{k} E_i)$ sont $(k+1)$ ensembles disjoints de charge non nulle,

$$\begin{aligned} q(A) &= q(A \cap (\bigcup_{1}^{k} E_i)) \\ &= q(\bigcup_{1}^{k} (A \cap E_i)) \\ &= \sum_{1}^{k} q(A \cap E_i) \\ &= \sum_{1}^{k} q(E_i).q_i(A) \ . \end{aligned}$$

Fixons k fonctions dans $b(\mathcal{U})$. Soit M l'ensemble des charges non négatives telles que :

$$\langle m , f_i \rangle = \int f_i \, dm = c_i \qquad i \in I_1$$
$$\langle m , f_i \rangle = \int f_i \, dm \leq c_i \qquad i \in I_2$$

(I_1 , I_2) formant une partition de l'ensemble des entiers compris entre 1 et k . M est un ensemble régulièrement convexe (c'est-à-dire un ensemble convexe qui peut être séparé de tout point extérieur à l'aide d'un hyperplan défini par une forme linéaire qui appartient au bidual de $b(\mathcal{U})$). S'il est borné, il est enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux [7].

PROPOSITION. - <u>Un point extrémal</u> m_0 <u>de</u> M <u>est combinaison linéaire de</u> k <u>charges premières au plus</u>.

DEMONSTRATION. - Il suffit de démontrer qu'il existe au plus k ensembles disjoints de charge non nulle. Supposons qu'il existe $(k+1)$ ensembles E tels que : $m_0(E) \neq 0$; soit :

$$E' = S - \bigcup_{1}^{k} E_i \supset E_{k+1}$$

par définition :

$$m_0(E') > 0$$

Considérons la correspondance biunivoque de l'ensemble des charges et de R^{k+1} qui à la charge :

$$m(E) = \sum_1^k a_i \, m_0(E \cap E_i) + a_{k+1} \, m_0(E \cap E')$$

associe le point $(a_0 , a_1 , \dots , a_{k+1})$. A M correspond le polyèdre M' défini par :

$$a_i \geqslant 0$$

$$\langle m , f_i \rangle = \int f_i \, dm = \sum_{i=1}^k a_i \int_{E_i} f_i \, dm + a_{k+1} \int_{E'} f_i \, dm_0 = c_i \qquad i \in I_1$$

$$\langle m , f_i \rangle \qquad \dots \qquad \leq c_i \qquad i \in I_2$$

m_0 est extrémal dans M, donc le point $(1 , 1 , \dots , 1)$ est extrémal dans M' et, en ce point, on doit avoir $(k + 1)$ hyperplans d'appui extrême ; par suite un des a_i au moins est nul, soit a_{k+1}. On aura :

$$m_0(E) = \sum_1^k a_i \, m(E \cap E_i)$$

Soit F le sous-espace engendré par les charges premières. La trace de M sur ce sous-espace est un polyèdre convexe, intersection de la pyramide simpliciale de F avec les demi-espaces en nombre fini traces sur E des demi-espaces qui définissent M. Cette trace est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux et sa fermeture est M. Donc M est un polyèdre topologique, enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux (d'après le théorème précédent).

4. Extremum d'une fonction sur un polyèdre.

Déterminer l'extremum d'une fonction linéaire f à valeurs réelles, définie sur un ensemble convexe C, revient à trouver un hyperplan d'appui de C, parallèle à une direction donnée. Dans le cas où l'ensemble est compact, on sait qu'il existe toujours un tel hyperplan et qu'il contient un point extrémal de l'ensemble C. On peut plus généralement se demander quand une fonction convexe à valeurs réelles atteindra son maximum sur un ensemble convexe donné et s'il existe un point extrémal où ce maximum est atteint.

PROPOSITION. - Soit C un ensemble convexe dans un espace métrisable, enveloppe fermée convexe de ses points extrêmaux, f une fonction convexe qui atteint son maximum sur C ; alors ce maximum est atteint en un point extrémal au moins.

DÉMONSTRATION. - f est une fonction continue ; supposons que l'on ait :

$$f(x) = M$$

Par hypothèse x est point d'accumulation de points x_i combinaison linéaire d'un nombre fini de points extrêmaux, donc

$$f(x) = \lim f(\sum_1^k x_n^i) = M$$

Si pour tout x_n^i

$$f(x_n^i) < M$$

on en déduit aisément que $f(x) < M$, ce qui est impossible.

CCROLLAIRE. - Si P est un polyèdre borné dans un espace de dimension finie, il existe au moins un sommet de P où une fonction convexe atteint son maximum (on voit facilement que l'extremum est atteint sur une facette toute entière).

On déduit aussi de cette proposition qu'une fonction convexe qui atteint son maximum sur l'ensemble C défini au paragraphe 2 l'atteint en un point dont au plus k coordonnées sont différentes de 0 . Toute fonction convexe faiblement semi-continue supérieurement définie sur le polyèdre topologique M du paragraphe 3 atteint son maximum en un point combinaison linéaire de k charges premières au plus (M est faiblement compact) ; de plus ce point est unique si :

$$G(m) = \int f \, dm \quad f \in b(\alpha)$$

et si le système $(f_1 , \ldots , f_k , f)$ est complètement régulier.

THEOREME. - L'image d'un polyèdre convexe strict par une application affine est fermée. En particulier, toute forme linéaire définie sur un polyèdre strict y prend des valeurs infinies ou atteint son extremum sur une variété d'appui.

(Rappelons qu'un polyèdre convexe strict est la trace d'une pyramide convexe stricte ayant 0 comme point extrémal sur un hyperplan affine, ou encore un ensemble convexe tel que le cône d'appui autour de tout sous-espace soit fermé).

DÉMONSTRATION. - Soient P un polyèdre convexe strict, f une application affine de P dans un espace vectoriel F ; P est la trace sur E d'une pyramide convexe stricte P_1, contenue dans l'espace $E_1 = E + Re_0$ (chapitre 1). La fonction f se prolonge d'une manière unique en une fonction $\overline{f}$ application de E_1 dans $F_1 = F + Re'_0$; le noyau de $\overline{f}$ est le sous-espace translaté du noyau de f dans E. L'image de P_1 par $\overline{f}$ peut être identifiée à la projection de P_1 sur un sous-espace supplémentaire du noyau de $\overline{f}$. Cette projection est fermée par hypothèse ; l'image de P, trace de l'image de P_1 sur F est donc fermée. En particulier, si F est la droite réelle, l'image de P est la droite entière ou un segment fermé (si f est toujours finie). Soit x un point où l'extremum est atteint ; l'image réciproque par f de cet extremum contient tout segment dont x est point intérieur ; c'est donc une variété d'appui de P. Remarquons que toute variété d'appui est une intersection d'hyperplans d'appui extrême puisque le système des formes d'appui extrême est incompatible.

PROPOSITION. - Si l'ensemble M du paragraphe 3 n'est pas borné, il possède quand même un point extrémal.

DÉMONSTRATION. - Soit M' l'intersection de M avec le demi-espace :

$$\int dm \leq \int dm' + 1 \qquad \text{où} \quad m' \in M$$

M' est un polyèdre topologique borné dans $b^*(\mathfrak{a})$; $\int dm$ atteint son minimum en un point extrémal de M', soit m_0 ; m_0 est combinaison linéaire de $k + 1$ charges premières au plus. Dans le sous-espace E_{k+1} engendré par ces $(k + 1)$ charges, m_0 est point extrémal de la trace M'_{k+1} de M', et par ce point il passe k faces du polyèdre M'_{k+1} ; comme

$$\int dm_0 < dm' + 1$$

ceci revient à dire que m_0 est combinaison linéaire de k charges premières au plus.

REMARQUE. - Il ne semble pas que l'ensemble M ainsi défini soit un polyèdre topologique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDROFF (A. D.). - Additive set-functions in abstract spaces, Mat. Sbornik (Rec. math.), N. S., t. 8 (50), 1940, p. 307-348 ; t. 9 (51), 1941, p. 563-628 ; t. 13 (55), 1943, p. 169-228.

[2] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, 1932 (Monogr. mat... Tome 1).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Ch. I et II. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind. 1189. Eléments de Mathématique n° 15).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Ch. III, IV et V. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind. 1229. Eléments de Mathématique n° 18).

[5] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-1954, p. 131-137.

[6] CHOQUET (Gustave). - Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57.

[7] KREIN (M.) et ŠMULIAN (V.). - On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, Annals of Math., Series 2, t. 41, 1940, p. 556-583.

[8] MIRKIL (H.). - New characterizations of polyhedral cones, Canad. J. Math., t. 9, 1957, p. 1-4.

[9] ROSENBLOOM (Paul C.). - Quelques classes de problèmes extrémaux, Bull. Soc. math. France, t. 79, 1951, p. 1-58 ; t. 80, 1952, p. 183-215.

[10] SEIFERT (H.) y THRELFALL (W.). - Lecciones de Topologie. - Madrid, Instituto Jorge Juan de Matematics, 1951 (Consejo superior de investigaciones scientificas, Coleccion de textos de matematica moderna, 1).

[11] WEYL (H.). - Elementare Theorie der konvexen Polyeder, Comm. Math. Helv., t. 7, 1935, p. 290-306.