Weishu Shih

Sur les systèmes de Postnikov d'un fibré principal

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 1 (1957-1958), exp. nº 5, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire de TOPOLOGIE
et de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
(C. EHRESMANN)
Année 1957/1958

-:-:-:-

14, 21 et 28 janvier 1958

SUR LES SYSTÈMES DE POSTNIKOV D'UN FIBRÉ PRINCIPAL

par SHIH Weishu

1. Définitions.

Soient G un groupe simplicial [1], B un ensemble simplicial, $\tau \in \operatorname{Hom}_0(B, \overline{W}(G))$.

DÉFINITION. - τ est dite minimale si l'image $\operatorname{Im} \tau(B) \subsetneq$ dans un certain sous-ensemble minimal de $\overline{W}(G)$. Il est immédiat que si $x, y \in B$, $\partial_i \tau(x) = \partial_i \tau(y)$ pour tout $i \neq k$ alors $\partial_k \tau(x) = \partial_k \tau(y)$.

Pour tout τ, $\exists\ \tau^*$ minimal, tel que $\tau \sim \tau^*$, homotopie dans $\operatorname{Hom}(B, \overline{W}(G))$, car si $Y \subsetneq \overline{W}(G)$ est minimal et $D : \overline{W}(G) \to Y$ est la déformation, alors $\tau^* = D.\tau$. Donc, d'après un théorème de Cartan [2], on peut étudier simplement les fonctions tordantes minimales. Soit $\tau \in \operatorname{Hom}_0(B, \overline{W}(G))$ pour tout $m > 0$, définissons une relation d'équivalence dans B :

$$\underset{<m>}{\sim} \ : \ x \underset{<m>}{\sim} y \iff x \underset{(m)}{\sim} y \quad \text{et} \quad \tau(x) \underset{(m+1)}{\sim} \tau(y)$$

où $\underset{(m)}{\sim}$ désigne la m-ième relation du système de Postnikov donné par MOORE [5] il est évident que $\underset{<m>}{\sim}$ est une relation d'équivalence qui respecte les $\partial_i . s_j$ de B, donc soit $B^{<m>}$ le complexe quotient ainsi obtenu.

LEMME 1. - __Si__ B __est un ensemble de Kan [3], alors__ $p : B \to B^{<m>}$ __est une fibration de Kan.__

DÉMONSTRATION. - Soit $p = \bigcup_{j \geqslant 0} p_j$, comme $B_j^{<m>} = B_j$, $(j \leq m)$; considérons $\xi \in B_{m+1}^{<m>}$, $(x_i \in B_m)$ tels que $p_m(x_i) = \partial_i \xi$, $(i \neq k)$, $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$, $(i \neq k,\ i < j)$; alors, si $y \in B_{m+1}$ tel que $p_{m+1}(y) = \xi$, on a $\partial_i y = x_i$, $(i \neq k)$. Soit $\xi \in B_{m+2}^{<m>}$ $(x_i \in B_{m+1})$, et supposons

$p_{m+2}(y) = \xi$, alors $\partial_i y \underset{<m>}{\sim} x_i$, $(i \neq k)$. Soit $z \in B_{m+2}$ tel que $\partial_i z = x_i$, $(i \neq k)$, on a $\partial_i y \underset{(m)}{\sim} \partial_i z$, $(i \neq k)$, et $\tau(\partial_i y) \underset{(m+1)}{\sim} \tau(\partial_i z)$ c'est-à-dire $\tau(\partial_i y) = \tau(\partial_i z)$, $(i \neq k)$. Comme τ est minimal $\partial_k \tau(y) = \partial_k \tau(z)$. Ceci entraîne $\tau(y) \underset{(m+1)}{\sim} \tau(z)$. Or $\partial_i y \underset{(m)}{\sim} \partial_i z$ $(i \neq k)$, entraîne $y \underset{(m)}{\sim} z$. Donc $y \underset{<m>}{\sim} z$ et on a $p_{m+2}(z) = \xi$, $\partial_i z = x_i$, $(i \neq k)$. Si $n > m+2$, $\xi \in B_n^{<m>}$, $x_i \in B_{n-1}$, $p_n(y) = \xi$, alors soit $z \in B_n$. Si $z = x_i$, $(i \neq k)$, ceci entraîne $\partial_i z = x_i \underset{<m>}{\sim} \partial_i y$, $(i \neq k)$, d'où $\partial_i z \underset{(m)}{\sim} \partial_i y$; comme $n > m+2$, $z \underset{(m)}{\sim} y$, donc $z \underset{<m>}{\sim} y$ et $p_n(z) = \xi$; $\partial_i z = x_i$, $(i \neq k)$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Si B est de Kan alors $B^{<m>}$ l'est aussi.

LEMME 2.- Soient B , B' , B'' , p , p' , p'' tels que B , B' , B'' soient des ensembles simpliciaux, et B' est de Kan. $p' : B \to B'$ est surjective, $p'' : B \to B''$ est une fibration de Kan et $p : B' \to B''$ vérifie $p \circ p' = p''$: alors p est une fibration de Kan.

Vérification immédiate.

COROLLAIRE 2. - Les projections canoniques

$$B^{<m>} \to B^{<m-1>} \quad , \quad B^{<m>} \to B^{(m)} \quad , \quad B^{(m+1)} \to B^{<m>}$$

sont des fibrations de Kan.

LEMME 3. -
$$\pi_i(B^{<m>}) \approx \pi_i(B) \qquad \text{pour } i \leq m$$
$$\pi_j(B^{<m>}) = 0 \qquad \text{pour } j > m+1$$
$$\pi_n(B^{<m>}) \approx \operatorname{Im}\left[\pi_{m+1}(B) \xrightarrow{\tau} \pi_m(G)\right]$$

DÉMONSTRATION. - Soit $\xi \in B_j^{<m>}$, $j \geq m+2$ et $\{y\} = \xi$, $y \in B_j$, où $\{y\}$ désigne la classe de y pour $\underset{<m>}{\sim}$, tel que $\partial_i \xi = \{s_0^{j-1} b_0\}$, $b_0 \in B_0$, pour tout i , donc $\partial_i y \underset{(m)}{\sim} s_0^{j-1} b_0$ et $\tau(\partial_i y) \underset{(m+1)}{\sim} \tau(s_0^{j-1} b_0)$. Comme les $\partial_i y$, $s_0^{j-1} b_0$, $\tau(\partial_i y)$ sont de dimension $\geq m+1$, donc $y \underset{(m)}{\sim} s_0^j b_0$ et $\tau(y) \underset{(m+1)}{\sim} \tau(s_0^j b_0)$ c'est-à-dire $y \underset{<m>}{\sim} \{s_0^j b_0\}$ donc

$\pi_j(B^{<m>}) = 0$. Considérons l'homomorphisme induit par τ .
$\pi_{m+1}(B^{<m>}) \xrightarrow{\tau_*} \pi_{m+1}(\overline{W}(G)^{(m+1)}) = \pi_m(G)$ on va démontrer que τ_* est une injection. Soient $\{b\} = \xi \in B_{m+1}^{<m>}$ et tel que $\partial_i \xi = \{s_o^m b_o\} = s_o^m b_o = \partial_i b$, et $\tau_*(\{\xi\}) = 0$, c'est-à-dire $\tau(b) \sim s_o^{m+1} e_o$ où $\sim$ est l'équivalence dans $\pi_{m+1}(\overline{W}(G))$. L'hypothèse que τ est minimal entraîne $\tau(b) = s_o^{m+1} e_o$. D'autre part, $\tau(s_o^{m+1} b_o) = s_o^{m+1} e_o$, ce qui entraîne $\tau(b) \underset{(m+1)}{\sim} \tau(s_o^{m+1} b_o)$, mais $b \underset{(m)}{\sim} s_o^{m+1} b_o$, donc $b \underset{<m>}{\sim} s_o^{m+1} b_o$ et $\{\xi\} = 0$ dans $\pi_{m+1}(B^{<m>})$, c'est-à-dire que τ_* est une injection. Maintenant considérons le composé :

$$\pi_{m+1}(B) \to \pi_{m+1}(B^{<m>}) \to \pi_{m+1}(\overline{W}(G)^{(m+1)}) = \pi_m(G)$$

la suite exacte d'homotopie de la fibration $B \to B^{<m>}$ montre que la première flèche est une surjection ; donc

$$\mathrm{Im}(\pi_{m+1}(B) , \pi_m(G)) = \mathrm{Im}(\pi_{m+1}(B^{<m>}) , \pi_m(G)) \approx \pi_{m+1}(B^{<m>})$$

C. Q. F. D.

2. $\overline{W}$-construction [4] .

LEMME 4.

1° Il existe une projection naturelle

$$\overline{W}(G)^{(m+1)} \to \overline{W}(G^{(m)})$$

qui est une bijection

2° Soit $p : G \to B$ un épimorphisme simplicial de deux groupes simpliciaux alors

$$\overline{p} : \overline{W}(G) \to \overline{W}(B)$$

est une fibration de Kan. En particulier $\overline{W}(G)$ est de Kan.

3° Soient N un groupe simplicial abélien et G un groupe simplicial $\mathrm{Hom}_{o,M}(G , \overline{W}(N))$ désigne l'ensemble des fonctions h-tordantes. Soit Φ l'application évidente :

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{o,M}(G , \overline{W}(N)) \to \mathrm{Hom}_o(\overline{W}(G) , \overline{W}^2(N))$$

alors

$$\overline{W}(N \times_{\nu} G) \approx \overline{W}(N) \times_{\Phi(\nu)} \overline{W}(G)$$

DÉMONSTRATION

1° Comme $G \to G^{(m)}$ induit $\overline{W}(G) \to \overline{W}(G^{(m)})$ qui passe au quotient par la relation $\underset{(m+1)}{\sim}$ donnée

$$\overline{W}(G)^{(m+1)} \to \overline{W}(G^{(m)})$$

parce que, si ξ , $\eta \in \overline{W}(G)_n$, $n > m + 1$, tel que $\xi \underset{(m+1)}{\sim} \eta$ alors $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m-1}} \xi = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m-1}} \eta$. Si $\xi = (a_{n-1} , a_{n-2} , \dots , a_o , e_o)$, $\eta = (b_{n-1} , b_{n-2} , \dots , b_o , e_o)$. On a : $a_{n-i} \underset{(m)}{\sim} b_{n-i}$ du fait que G est un groupe simplicial. Il est facile de démontrer que c'est une bijection.

2° Soit $\xi = (b_{n-1} , b_{n-2} , \dots , b_o , e_o) \in \overline{W}(B)_n$,

$$\eta_i = (x^i_{n-2} , x^i_{n-3} , \dots , x^i_o , e_o) \in \overline{W}(G)_{n-1} , \quad i = 0 , 1 , \dots \hat{k} , \dots , n$$

tels que $\partial_i \eta_j = \partial_{j-1} \eta_i$, $i < j \neq k$, et $p(\eta_i) = \partial_i \xi$, $i \neq k$.

Considérons les éléments de G_{n-2} ,

$$\Delta_o = x^1_{n-2} . (x^o_{n-2})^{-1} , \quad \Delta_1 = x^2_{n-2} \dots \Delta_i = x^{i+1}_{n-2} \dots \Delta_{n-1} = x^n_{n-2} , \quad i \neq k .$$

On peut montrer à cause de $\partial_i \eta_j = \partial_{j-1} \eta_i$, que

$$\partial_i \Delta_j = \partial_{j-1} \Delta_i , \quad i < j \neq k - 1$$

et que

$$p(\Delta_i) = \partial_i b_{n-1} , \quad i \neq k - 1$$

donc l'hypothèse que $p : G \to B$ est un épimorphisme donc une fibration de Kan, entraîne l'existence de

$$y_{n-1} \in G_{n-1} \text{ tel que } \partial_i y_{n-1} = \Delta_i , \quad p(y_{n-1}) = b_{n-1}$$

Considérons la suite

$$\eta = (y_{n-1}, x^o_{n-2}, x^o_{n-3}, \dots, x^o_o, e_o) \in \overline{W}(G)_n$$

on peut démontrer à cause de la construction de y_{n+1} et de $\partial_i \eta_j = \partial_{j-1} \eta_i$, que

$$\partial_i \eta = \eta_i, \quad i \neq k ; \quad p(\eta) = \xi$$

Ce qui achève la démonstration du (29).

3° Il suffit de construire une bijection simpliciale f

$$\begin{tikzcd} \overline{W}(N) \times_{\Phi(\tau)} \overline{W}(G) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & \overline{W}(N \times_\tau G) \arrow[d] \\ & \overline{W}(G) \end{tikzcd}$$

tel que le diagramme soit commutatif. On désigne par $\underline{\tau}$ l'application composée

$$G_m \xrightarrow{\tau} \overline{W}(N)_m \longrightarrow N_{m-1} .$$

Voici la construction :

$$f_o : (\overline{W}(N) \times_{\Phi(\tau)} \overline{W}(G))_o = \{(e_o, e_o)\} \to \{e_o\} = \overline{W}(N \times_\tau G)_o$$

Soit $\xi \in (\overline{W}(N) \times_{\Phi(\tau)} \overline{W}(G))_m$

$$\xi = ((n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_o, e_o) ; (g_{m-1}, g_{m-2}, \dots, g_o, e_o))$$

alors

$$f(\xi) = ((n^{-1}_{m-1}, g_{m-1}) ; (n^{-1}_{m-2}\, \underline{\tau}(g_{m-1})^{-1}\, g_{m-2}), \dots$$

$$\dots ; (n^{-1}_{m-j}\, \underline{\tau}(\partial_o^{j-2} g_{m-1} \cdot \partial_o^{j-3} g_{m-2}, \dots, \partial_o g_{m-j+2} \cdot g_{m-j+1})^{-1}, g_{m-j}) ;$$

$$\dots ; (n^{-1}_o\, \underline{\tau}(\partial_o^{m-2} g_{m-1} \cdot \partial_o^{m-3} g_{m-2} \dots \partial_o g_2 \cdot g_1)^{-1}, g_o) ; e_o) \in \overline{W}(N \times_\tau G)_m$$

on peut démontrer, par un calcul direct, que f ainsi obtenu est une application simpliciale bijective et que le diagramme est commutatif.

C. Q. F. D.

3. Système de Postnikov d'un fibré.

Considérons le composé des applications

$$B \xrightarrow{\tau} \overline{W}(G) \longrightarrow \overline{W}(G)^{(n+1)} \xrightarrow[\approx]{} \overline{W}(G^{(n)})$$

Par passage au quotient par la relation d'équivalence $\underset{<n>}{\sim}$ on obtient

$$\tau^{<m>} \; : \; B^{<m>} \rightarrow \overline{W}(G^{(n)})$$

THÉORÈME. - Il existe une application simpliciale naturelle

$$\varphi_m \; : \; G^{(n)} \times_{\tau<n>} B^{<m>} \rightarrow (G \times_{\tau} B)^{(m)}$$

qui est une homotopie équivalente, et si G est minimal c'est un isomorphisme. Donc le m-ième système de Postnikov d'un fibré principal de base B de groupe structural G est un fibré principal dont le groupe structural est le m-ième système de Postnikov de G et dont la base est elle-même fibrée sur le m-ième système de Postnikov de B. La fibre étant de type $K(\pi, n+1)$ où π est l'image de $\pi_{n+1}(B)$ dans $\pi_n(G)$.

DÉMONSTRATION. - Soit $E = G \times_{\tau} B$. Considérons le diagramme où l'on se propose de construire φ_m telle que le diagramme commute

$$\begin{tikzcd}
E = G \times_{\tau} B \arrow[r] \arrow[d] & G^{(m)} \times_{\tau<n>} B^{<m>} \arrow[dl, "\varphi_m"] \\
E^{(n)} &
\end{tikzcd}$$

Pour la construction de φ_m, il suffit de démontrer que, si $g \underset{(m)}{\sim} g'$, $b \underset{<m>}{\sim} b'$ alors $(g, b) \underset{(m)}{\sim} (g', b')$. Or $b \underset{<n>}{\sim} b' \Rightarrow b \underset{(n)}{\sim} b'$ et $\tau(b) \underset{(m+1)}{\sim} \tau(b') \Rightarrow \underline{\tau}(b) \underset{(m)}{\sim} \underline{\tau}(b')$, $[\underline{\tau} : B \rightarrow \overline{W}(G) \rightarrow G]$. Soit $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m}}$ une suite d'opérateurs tel que $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m}$. Si $i_1 \neq 0$, alors $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m}}(g, b) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n-m}}(g', b')$ parce que $b \underset{(m)}{\sim} b'$, $g \underset{(m)}{\sim} g'$. Si $i_1 = 0$, comme $\tau(b) \underset{(n+1)}{\sim} \tau(b')$, on a :

$$\begin{aligned}
\tau(\partial_{i_e} \dots \partial_{i_{n-m}} b) = \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} \tau(b) \underset{(n+1)}{\sim} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} \tau(b') \\
= \tau(\partial_{i_2} \dots \partial_{i_{n-m}} b')
\end{aligned}$$

donc $\tau(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}} b) = \tau(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}} b')$ [parce que $\tau(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}} b) \in \overline{W}(G)_{m+1}$ ce qui entraîne

$$(\partial_o \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}}(g , b) = (\partial_o \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}} g : \underline{\tau}(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}} b) , \partial_o \partial_{i_2} \partial_{i_{n-m}} b)$$

$$= (\partial_o \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}} g' \cdot \underline{\tau}(\partial_{i_2} \partial_{i_{n-m}} b') , \partial_o \partial_{i_1} \cdot \partial_{i_{n-m}} b')$$

$$= \partial_o \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{n-m}} (g' , b') ,$$

donc

$$(g , b) \underset{(m)}{\sim} (g' , b') .$$

Montrons maintenant que φ_x ainsi définie est une homotopie-équivalence

$$\begin{tikzcd}
E = G \times_\tau B \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr] & & G^{(m)} \times_{\tau\langle m\rangle} B^{\langle m\rangle} = E^{\langle m\rangle} \arrow[dl, "\varphi_m"'] \arrow[d] \\
& E^{(m)} & \\
B \arrow[rr] & & B^{\langle m\rangle}
\end{tikzcd}$$

Considérons la suite excate de fibration à droite :

$$0 \to \pi_{m+1}(E^{\langle m\rangle}) \to \pi_{m+1}(B^{\langle m\rangle}) \to \pi_m(G^{(m)}) \to \pi_m(E^{\langle m\rangle}) \to \pi_m(B^{\langle m\rangle}) \to \pi_{m-1}(G^{(m)}) \to \cdots$$

comme on sait déjà : $\pi_{m+1}(B^{\langle m\rangle}) \to \pi_m(G^{(m)})$ est une injection, donc $\pi_{m+1}(E^{\langle m\rangle}) = 0$. D'autre part $\pi_i(B^{\langle m\rangle}) = 0$, si $i \geqslant m + 2$, $\pi_i(G^{(m)}) = 0$ Si $i \geqslant m + 1$, donc on a : $\pi_i(E^{\langle m\rangle}) = 0$, si $i \geqslant m + 1$. Considérons la suite exacte de fibration à gauche :

$$0 \to \mathrm{Img}(\pi_{m+1}(B) , \pi_m(G)) \to \pi_m(G) \to \pi_m(E) \to \pi_m(B) \to \pi_{m-1}(G) \to \cdots$$

alors le lemme 4 et le lemme 5 montrent que

$$\pi_i(E) \xrightarrow[\approx]{} \pi_i(E^{\langle m\rangle}) \quad i \leq m$$

Or la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_i(E) \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\approx"'] & & \pi_i(E^{<m>}) \arrow[dl, "\varphi_m"] \\ & \pi_i(E^{(m)}) & \end{tikzcd} \qquad i \leq m$$

montre que $\varphi_m : \pi_i(E^{<m>}) \xrightarrow[\approx]{} \pi_i(E^{(m)})$ pour $i \leq m$, mais on sait déjà

$$\pi_j(E^{<m>}) = \pi_j(E^{(m)}) = 0$$

donc

$$\varphi_m : \pi_i(E^{<m>}) \xrightarrow[\approx]{} \pi_i(E^{(m)})$$

sont des isomorphismes pour tout i , donc φ_m est une homotopie d'équivalence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Sur la théorie de Kan, Séminaire Cartan, t. 9, 1956/57, n° 1.

[2] CARTAN (Henri). - Sur le foncteur Hom(X , Y) en théorie simpliciale, t. 9, 1956/57, n° 3.

[3] KAN (Daniel M.). - Abstract homotopy, IV., Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 42, 1956, p. 542-544.

[4] MOORE (J. C.). - Homotopie des complexes monoïdaux, II., Séminaire Cartan, t. 7, 1954/55, n° 19.

[5] MOORE (J. C.). - Notes on homotopy. - Princeton, Princeton University, 1955/56 (multigraphié).