D. V. Choodnovsky
G. V. Choodnovsky

Sur les systèmes à plusieurs particules avec potentiel en $1/r^2$, l'équation de Riccati et les systèmes complètement intégrables reliés à l'équation de Schrödinger

Séminaire sur les équations non linéaires (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 11, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SENL_1977-1978____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE SUR

LES EQUATIONS NON-LINEAIRES

- I -

SUR LES SYSTEMES A PLUSIEURS PARTICULES AVEC POTENTIEL EN $1/r^2$, L'EQUATION DE RICCATI ET LES SYSTEMES COMPLETEMENT INTEGRABLES RELIES A L'EQUATION DE SCHRÖDINGER

D.V. CHOODNOVSKY

Dept. of Mathematics, Columbia University
New York (New York) 10027

and

G.V. CHOODNOVSKY

I. H. E. S., 35, route de Chartres
91440 Bures sur Yvette

This work was partially supported by NSF and ONR.

Avril 1978

Nous établissons, dans cet article, un lien entre le problème de plusieurs particules alignées en présence d'un potentiel en $\frac{1}{r^2}$ et les fonctions propres méromorphiques $\varphi(x,t)$ de l'équation de Schrödinger dépendante du temps en considérant les pôles comme des particules. A l'aide d'une équation de Riccatti, nous obtenons une transformation de Bäcklung pour le problème à plusieurs particules et des propriétés exactes sur le mouvement des pôles des solutions méromorphes générales des équations de Korteweg-de-Vries d'ordre plus élevé.

§ 1. La forme de l'hamiltonien H d'un sytème de particules alignées $a_i : i \in I$ interagissant via un potentiel Gx^{-2} est la suivante :

(1) $$H = \tfrac{1}{2} \Sigma_{i \in I} b_i^2 + G \Sigma_{i \neq j} (a_i - a_j)^{-2}$$

Le système hamiltonien de la forme :

(2) $$a_{itt} = 2G \Sigma_{j \neq i} (a_i - a_j)^{-3} : i \in I$$

est alors équivalent à la représentation de Lax :

(3) $$\frac{dL}{dt} = [A,L]$$

avec des matrices $L = (L_{ij})_{i,j \in I}$; $A = (A_{ij})_{i,j \in I}$

La représentation de Lax (3) pour le sytème (2) a été trouvée dans référence [1] et L et A ont la forme :

(4) $$L_{ij} = \delta_{ij} b_i + (1 - \delta_{ij}) \sqrt{-G} (a_i - a_j)^{-1} ;$$

(5) $$A_{ij} = \delta_{ij} (- \sqrt{-G} \Sigma_{k \neq i} (a_i - a_k)^{-2}) + (1 - \delta_{ij}) \sqrt{-G} (a_i - a_j)^{-2}$$

pour tout $i,j \in I$. L'existence de la représentation de Lax (3) implique que l'hamiltonien H admet les intégrales premières $J_n = \frac{i}{n} \operatorname{tr}(L^n) : n = 1,2,\ldots$ [1], [2]. Ces intégrales premières ont la forme simple suivante :

(6) $$J_n = \frac{1}{n} \Sigma_{i\in I} b_i^n + G \Sigma_{i\neq j} (b_i^{n-2} + b_i^{n-3} b_j + \ldots + b_j^{n-2}) \times (a_i - a_j)^{-2} + \ldots$$

Ils sont tous en involution et en conséquence, le système (1) est complètement intégrable pour I fini [1], [3].

De plus, les trajectoires de H (et J_n pour tout $n \geq 1$) sont des fonctions algébriques de x et t pout tout I fini [1], [7]. Des formules simples pour les solutions sont données en [1], [3], [8].

§ 2. Le lien entre le problème à plusieurs particules avec potentiel en $\frac{1}{r^2}$ et les sytèmes complètement intégrables est basé sur la remarque que les potentiels $u(x,t) = -2 \Sigma_{i\in I} (x - a_i)^{-2}$ avec $a_i = a_i(t) : i \in I$ gouvernés par (3), jouent un rôle important dans les problèmes de fonctions propres pour l'équation de Schrödinger non stationnaire [5]. Il a été prouvé, dans des cas particuliers ([2], [4], [6]) et de façon complétement générale ([5]), que seuls ces potentiels peuvent avoir des fonctions propres $\psi(x,t,k)$ méromorphes en x.

Plus précisément, considérons l'équation de Schrödinger non stationnaire :

(7) $$\left(\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)\right) \psi = \frac{d\psi}{dt}$$

pour des fonctions méromorphiques $\psi(x,t,k)$ en tant que fonction de x, ayant pour $k \to \infty$ l'expansion asymptotique suivante :

(8) $$\psi(x,t,k) = e^{kx+k^2 t} \Sigma_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,t) k^{-n}$$

Supposons que $\psi(x,t,k)$ est méromorphe pour tout t, k et avec des pôles du premier ordre seulement (ce n'est pas une condition restrictive ; si $\psi(x,t,k)$ a des pôles, ils sont du premier ordre). Alors le potentiel $u(x,t)$ est aussi méromorphe :

(9) $$u(x,t) = -2\,\Sigma_{i\in I}\,(x-a_i)^{-2}$$

Il existe un $a_i = a_i(t) : i\in I$, tel qu'avec une norme convenable pour ψ nous pouvons écrire :

$$\psi_o = 1,$$

(10) $$\psi_n = \Sigma_{i\in I}\,\omega_i^{[n]}(x-a_i)^{-1} : i\in I,\ n = 1,2,\ldots$$

Alors, nous trouvons que $(\omega_i^{[n]} : i\in I) = \vec{\omega}^{[n]} : n = 1,2,\ldots$ satisfont le schéma de récurrence suivant ([5]) :

$$\vec{\omega}^{[n+1]} = -\tfrac{1}{2}\,L\vec{\omega}^{[n]}\ ;$$

(11) $$\frac{d}{dt}\vec{\omega}^{[n]} = A\vec{\omega}^{[n]} : n \geq 1$$

pour les matrices L, A de (4), (5) pout $G = -4$. La condition de consistance de (11) est simplement (3). Donc l'existence de $\psi(x,t,k)$ méromorphe (8) satisfaisant (7) pour $u(x,t)$ (conséquence de (9)) est équivalente à (2) pour $G = -4$:

(12) $$a_{itt} = -8\,\Sigma_{j\neq i}(a_i - a_j)^{-3} : i\in I$$

Pour I fini, $\psi(x,t,k)$ est une fonction rationnelle en x, t, k (de la même façon $u(x,t)$ est rationnel en x,t[1],[7] et peut être mise sous la forme :

(13) $$\psi(x,t,k) = e^{kx+k^2t}\left(1+\textstyle\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t,k)\,(x-a_i)^{-1}\right)$$

pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ rationnels en k

Remarque : si tous les $\psi_n(x,t)$ sont des zéros, excepté pour un nombre fini d'entre eux, alors $\psi(x,t,k)$ peut être exprimé à l'aide des Wronskiens de solutions entières $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ d'équations aux dérivées partielles linéaires [6] :

(14) $$\varphi_{it} = \varphi_{ixx} + \lambda_i^2\varphi_i \; : \; i = 1,\ldots,m \qquad \text{and}$$

$$\psi(x,t,k) = \frac{W(\varphi_1,\ldots,\varphi_m\, e^{kx+k^2t})}{W(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}$$

Pour $m = 1$ nous arrivons à l'équation de Burgers - Hopf

$$w_t = 2ww_x + w_{xx}$$

avec

$$u = 2w_x \qquad [2], [6]$$

Cependant, il existe des systèmes (2) avec la forme (13) qui ne peuvent pas être réduit à la forme (14)

§ 3. Considérons l'équation de Riccatti associée à l'équation à la fonction propre (7)

(15) $$\left(\frac{d^2}{dx^2} + u - \frac{d}{dt}\right)\varphi = 0$$

Pour $\varphi(x,t)$ arbitraire

(16) $$\chi = \frac{d}{dx}\log\varphi$$

Nous obtenons

(17) $$\frac{d}{dx}(\chi^2+\chi_x+u) = \frac{d}{dt}\chi$$

Pour une fonction méromorphe $\varphi(x,t)$ avec des pôles d'ordre au plus un et pour $u(x,t)$ de la forme (9), nous trouvons que $\chi(x,t)$ est aussi une fonction méromorphe de la forme :

(18) $$\chi(x,t) = \gamma + \Sigma_{i\in j}\, c_i\,(x-\alpha_i)^{-1},$$

ou

(19) $\qquad c_i = \pm 1$ pour $i \in I$ et $c_i = +1$ si α_i différent du a_j

(en fait de (9), (17) nous trouvons seulement $c_i = \pm 1$ ou $c_i = 2$ mais si les postes de $\varphi(x,t)$ sont du premier ordre, alors $c_i = 2$ est impossible).

De plus, dans (18),

(20) $\qquad I \subset J$ et $\alpha_i = a_i$ pour $i \in I \subset J$ et $c_i = -1$ pour $i \in I$

Le système d'équation pour $\gamma, c_i, \alpha i : i \in J$ équivalent à (17) pour (9), (18) donnés à la forme :

(21) $$\alpha_{it} = \Sigma_{j\in J, j\neq i}\, 2c_j(\alpha_i - \alpha_j)^{-1} + 2\gamma \quad : \; i \in J$$

Le système (21) avec c_j fixé a été considéré en détail dans [2]. En utilisant des équations fonctionnelles de [2], nous obtenons immédiatement :

Lemme 2 Pour $c_i = \pm 1 : i \in J$, il découle du système (21) les systèmes d'équations :

(22) $$\alpha_{itt} = -8\, \Sigma_{j\in J, c_j = c_i, j\neq i}(\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad : \; i \in I$$

En fait, nous obtenons deux systèmes d'équations de (22) : l'un est simplement équivalent à (12) (pour $c_i = +1$). Posons :

$$I\pm = \{i \in J : c_i = \pm 1\}$$

Alors nous trouvons que $J = I_+ \cup I-$ et $\{\alpha_i : i \in I_+\} = \{a_i : i \in I\}$, $\{\alpha_i : i \in I-\}$ satisfait chaque système (12) séparément pour l'hamiltonien H mais avec peut être un nombre différent de particules. En d'autres mots, la condition de méromorphisme de φ définit une transformation de Bäcklung entre deux problèmes à plusieurs particules avec l'hamiltonien H :

$$\{ \alpha_i : i \in I+ \} \rightleftarrows \{ \alpha_i : i \in I- \}$$

Par suite du § 2, nous pouvons prendre $\varphi(x,t) = \psi(x,t,k)$

En particulier,

Corollaire 3. Tout système (12) peut être plongé dans (21) avec $c_j = \pm 1$ pour $j \in J$, $I \subset J$ et $c_i = -1$ si et seulement si $\alpha_i = a_i$ ou $i \in I$

Pour $\chi(x,t,k) = (\log \psi)_x$,

(23) $$\chi = k + \Sigma_{n=1}^{\infty} \chi_n(x,t)k^{-n}$$

et pour $I = N$ fini, nous avons à cause de (13)

(24 $$\chi(x,t,k) = k - \Sigma_{i=1}^{N} (x - a_i)^{-1} + \Sigma_{i=1}^{N} (x-d_i)^{-1}$$

avec $d_i = d_i(t,k) : i = 1,\dots N$ et $(d_1,\dots,d_N)$ étant le système de particules satisfaisant aussi (12) (trajectoire du hamiltonien H pour $G = -4$) pour tout k. De par (8), (10), (11), (13) $d_i = 1,\dots,N$ sont définis comme des zéros en x du polynôme $P_N(x,k)$ avec des coefficients dépendant seulement de a_i, a_{it} : $i = 1,\dots,N$. (24) nous donne une représentation très naturelle pour la transformation de Bäcklung de (12). Cette transformation de Bäcklung est naturellement reliée à l'équation de Riccatti (17) : si (17) est satisfaite, alors pour :

(25) $$u_1 = u + 2 \chi_x = u + 2\frac{d^2}{dx^2} \log \varphi$$

$$\chi_1 = - \chi \quad \text{ou} \quad \varphi_1 = \varphi^{-1}$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dx}(\chi_1^2 + \chi_{1x} + u_1) = - \frac{d}{dt} \chi_1$$

Si le potentiel u a des fonctions propres méromorphes, alors le potentiel u_1 a aussi des fonctions propres méromorphes. Si ψ est une fonction propre arbitraire pour l'équation de Schrödinger dépendante du temps avec le potentiel u , alors la fonction propre générale pour le potentiel u a la forme

$$\psi_1 = \varphi \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi}{\varphi} \right)$$

En partant de fonctions arbitraires de $u(x,t)$ de la forme (9)

(i.e. avec $\int_{-\infty}^{\infty} a(k)\, \psi\, (x,t,k)dk$ ou $\frac{\partial^i}{\partial k^i} \psi\, (x,t,k)$)

nous pouvons construire des transformations de Bäcklung entre n et m particules pour tout nombre fini n et m (dans le cas stationnaire, voir [8])

§ 4. En utilisant (7) - (11), il s'ensuit pour un potentiel u de la forme (9) et pour χ de la forme (23) :

$$\frac{2}{\chi(k) + \chi(-k)} = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\chi^{2n+1}}$$

Ici, nous trouvons pour J_m (6)

(26) $$R_n = \Sigma_{i \in I} \frac{\partial J_{2n+1}}{\partial b_i} (x-a_i)^{-2} \quad : n = 1,2,\ldots$$

Maintenant, si u est indépendant du temps et $u = u(x,y)$, alors la $n^{\text{ième}}$ équation de Korteweg-de-Vries (KdV) a la forme [7] :

(27) $$U_y = \frac{\partial}{\partial x} Rn$$

De (12), (25), (26), il découle immédiatement une réponse affirmative à la question [7] : les pôles des solutions méromorphes de la $n^{\text{ième}}$ équation de KdV évoluent selon l'hamiltonien J_{2n+1} avec la restriction grad $H = 0$

Références

1. J. Moser, Adv. Math. 16(1975), 197

2. D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, Nuovo Cimento, V. 40 B, N° 2 (1977), 339 - 353

3. F. Calogero, Lett. Nuovo Cimento 13 (1975), 411

4. D.V. Chudnovsky, J. Math Physics, parts I and II (to be published)

5. D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, Meromorphic eigenvalue problem, pole interpretation and many-particle problem for non-linear equations, (to be published)

6. D.V. Chudnovsky, Proc. Natl. Acad. Sci. (in print)

7. H. Airlaut, H.P. Mc Kean, J. Moser, Comm. Pure and Appl. Math. V. XXX (1977), 95 - 148

8. M. Adler, J. Moser, On a class of polynomials connected with the Korteweg-de-Vries equation (to be published).