SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2009-2010

Nicolas Raymond

Sur le laplacien de Neumann semi-classique avec champ magnétique variable

Séminaire É. D. P. (2009-2010), Exposé n° III, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A3_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2009-2010
Exposé n° III, 1-17

Sur le laplacien de Neumann semi-classique avec champ magnétique variable

par

Nicolas Raymond

1 Introduction et résultats

Dans ce travail, nous nous intéressons à des estimations de la plus petite valeur propre $\lambda_1^h(\mathbf{A},\Omega)$ de $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ lorsque h tend vers 0 où $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ désigne la réalisation de Neumann de $(ih\nabla+\mathbf{A})^2$ sur un ouvert borné et régulier Ω et avec $\mathbf{A}\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{R}^3)$. Remarquons tout de suite une invariance de jauge :

$$e^{-i\phi/h}P^h_{\mathbf{A},\Omega}e^{i\phi/h}=P^h_{\mathbf{A}+\nabla\phi,\Omega},$$

de sorte que le spectre de $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ ne dépend que de Ω, h et du champ magnétique $\boldsymbol{\beta}=\nabla\times\mathbf{A}$. Ce problème d'analyse semi-classique apparaît dans la théorie mathématique de la supraconductivité (voir [FH09]) lors de l'étude du troisième champ critique de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau.

Le cas du champ constant
Jusqu'à présent, seul le cas du champ magnétique constant a été étudié en détails. En particulier, nous pouvons rappeler le célèbre résultat de l'article [HM04]. Sous des hypothèses génériques (notamment l'existence d'une courbe Γ incluse dans $\partial\Omega$ le long de laquelle le champ magnétique est tangent au bord), ces auteurs ont démontré :

Théorème 1.1 ([HM04]) *Si $\boldsymbol{\beta}$ est constant (et $\|\boldsymbol{\beta}\|=1$), on dispose de l'asymptotique à deux termes :*

$$\lambda_1^h(\boldsymbol{A},\Omega)=\Theta_0 h+\hat{\gamma}_0 h^{4/3}+O(h^{4/3+\eta}),$$

pour un certain $\eta>0$ et où Θ_0 est le bas du spectre du problème avec champ constant dans $\mathbb{R}^2_+$ et où $\hat{\gamma}_0$ est connu explicitement et dépend de Γ et du champ magnétique.

1.1 Le cas du champ variable

Le problème qui va nous occuper ici est le cas du champ variable (sous des hypothèses génériques). Cet exposé présente les résultats obtenus dans [Ray09a].

Le problème du champ constant dans $\mathbb{R}^3_+$
Près du bord de Ω, nous serons amenés à considérer l'approximation par le champ magnétique constant et du bord par le plan tangent. Considérons donc le problème du champ constant dans

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(r,s,t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}.$$

On note θ l'angle entre $\boldsymbol{\beta}$ et le plan $t = 0$ et on peut écrire (en normalisant) :

$$\boldsymbol{\beta} = (0, \cos\theta, \sin\theta),$$

avec

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Un potentiel vecteur associé est :

$$\mathbf{A} = (t\cos\theta - s\sin\theta, 0, 0)$$

et on considère donc la réalisation de Neumann sur $\mathbb{R}^3_+$ de

$$\mathcal{H}(\theta) = (D_r + V_\theta)^2 + D_s^2 + D_t^2, \tag{1.1}$$

où

$$V_\theta = t\cos\theta - s\sin\theta. \tag{1.2}$$

On définit le bas du spectre par :

$$\inf \sigma(\mathcal{H}(\theta)) = \sigma(\theta). \tag{1.3}$$

Après une transformée de Fourier en r et une translation en s (quand θ est non nul), il est aisé de voir qu'on devra considérer l'opérateur $H(\theta)$ sur $\mathbb{R}^2_+$ de domaine :

$$D(H(\theta)) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2_+) : H(\theta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^2_+) \text{ and } D_t\psi = 0 \text{ on } t = 0\}$$

et défini par :

$$H(\theta) = D_t^2 + D_s^2 + V_\theta^2. \tag{1.4}$$

Résumons quelques propriétés fondamentales de la fonction σ (voir [LP00] et [FH09] et les références associées) :

1. $\inf \sigma(H(\theta)) = \sigma(\theta)$ pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
2. σ est analytique sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et satisfait : $0 < \sigma(0) = \Theta_0 < 1$ et $\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Premier terme de l'asymptotique
La considération du cas constant dans le demi-espace nous mène à définir (en renormalisant par l'intensité du champ magnétique) pour $x \in \partial\Omega$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(x) = \sigma(\theta(x))\|\boldsymbol{\beta}(x)\|, \tag{1.5}$$

où $\theta(x)$ est défini par :

$$\|\boldsymbol{\beta}(x)\| \sin\theta(x) = \boldsymbol{\beta} \cdot \nu(x)$$

avec $\nu(x)$ la normale entrante au point x.
Nous pouvons dès lors rappeler le résultat établi par Lu et Pan (cf. [LP00, FH09]) :

Théorème 1.2 *On a :*

$$\lambda_1^h(\boldsymbol{A}, \Omega) = \min(\inf_{\Omega} \|\boldsymbol{\beta}(x)\|, \inf_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\beta}}(x))h + O(h^{5/4}).$$

Remarque 1.3.
Grossièrement, nous pouvons dire que le premier terme de l'asymptotique est le minimum entre le bas du spectre du problème à l'intérieur (problème de Dirichlet) $\inf\limits_{x\in\Omega} \|\boldsymbol{\beta}(x)\|h$ et le bas du spectre près du bord (problème de Neumann) $\inf\limits_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\beta}}(x)h$. Nous pouvons également remarquer que la majoration dans cette estimation n'a pas été explicitement écrite dans [LP00].

■

Dans le paragraphe suivant nous rappelons la démonstration de la minoration dans le Théorème 1.2.
Preuve.
Introduisons une partition de l'unité satisfaisant :

$$\sum_j |\chi_j^h|^2 = 1 \text{ on } \Omega\,; \tag{1.6}$$

$$\sum_j |\nabla\chi_j^h|^2 \leq Ch^{-2\rho} \text{ on } \Omega, \tag{1.7}$$

où les χ_j^h sont des fonctions troncatures supportées dans des boules B_j de centre x_j et de rayon h^ρ. On introduit aussi la forme quadratique associée à $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ définie pour $u \in H^1(\Omega)$:

$$q^h_{\mathbf{A}}(u) = \int_{\Omega} |(ih\nabla + \mathbf{A})u|^2 dx.$$

On dispose alors de la formule d'IMS (cf. [CFKS86]) :

$$q^h_{\mathbf{A}}(u) = \sum_j q^h_{\mathbf{A}}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j \||\nabla\chi_j^h|u\|^2, \qquad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.8}$$

On en déduit que :

$$q^h_{\mathbf{A}}(u) \geq \sum_j q^h_{\mathbf{A}}(\chi^h_j u) - Ch^{2-2\rho}\|u\|^2.$$

Soit j tel que B_j ne rencontre pas le bord. On approche alors le champ magnétique par le champ magnétique constant dans cette boule :

$$\|\boldsymbol{\beta}(x) - \boldsymbol{\beta}(x_j)\| \leq C|x - x_j|.$$

Dans une jauge adéquate, on en déduit une approximation du potentiel vecteur :

$$\|\mathbf{A}(x) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}(x_j) \times x\| \leq C|x - x_j|^2.$$

Ainsi, on trouve la minoration, pour tout $\lambda > 0$:

$$q^h_{\mathbf{A}}(\chi^h_j u) \geq (1-\lambda) q^h_{\mathbf{A}_j}(\chi^h_j u) - C\frac{h^{4\rho}}{\lambda}\|\chi^h_j u\|,$$

où $\mathbf{A}_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}(x_j) \times x$. On minore alors l'énergie du problème de Dirichlet avec champ constant dans la boule B_j par l'énergie dans $\mathbb{R}^3$ qui vaut $h\|\boldsymbol{\beta}(x_j)\|$ et on trouve avec un λ convenable :

$$q^h_{\mathbf{A}}(\chi^h_j u) \geq (h \inf_{\Omega} \|\boldsymbol{\beta}(x)\| - Ch^{2\rho+\frac{1}{2}})\|\chi^h_j u\|.$$

Soit j tel que B_j rencontre le bord (on peut supposer que $x_j \in \partial\Omega$). Par le même procédé que précédemment, on se ramène après un changement de coordonnées au problème avec champ constant dans $\mathbb{R}^3_+$:

$$q^h_{\mathbf{A}}(\chi^h_j u) \geq (h \inf_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\beta}}(x) - Ch^{2\rho+\frac{1}{2}})\|\chi^h_j u\|.$$

Il ne reste qu'à prendre $\rho = \frac{3}{8}$ pour optimiser les restes et sommer les diverses contributions.

■

Notre objet est ici de construire des fonctions propres approchées pour les plus petites valeurs propres de $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ dans le cas générique suivant :

$$\inf_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\beta}} < \inf_{\Omega} \|\boldsymbol{\beta}\|, \tag{1.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \text{ admet un minimum non dégénéré en } x_0, \tag{1.10}$$

$$0 < \theta(x_0) = \theta < \frac{\pi}{2}. \tag{1.11}$$

Ce cadre de travail est le "même" que celui que nous avions adopté dans un précédent article (cf. [Ray09b]) traitant du problème en dimension 2.
Néanmoins, nous n'utilisons pas l'hypothèse (1.9). Cette dernière est seulement le cas dans lequel les constructions que nous effectuons sont intéressantes ; en particulier, elle implique une localisation (via des estimées de Agmon) près du bord à l'échelle $h^{1/2}$ des fonctions propres associées à $\lambda_1^h(\mathbf{A},\Omega)$.
Enfin, remarquons que l'hypothèse (1.10) implique elle aussi (pour des raisons analogues) une certaine localisation sur le bord près de x_0.
Ainsi, les fonctions tests que nous construisons sont localisées près de x_0 et à l'échelle $h^{1/2}$ dans la direction normale.
Pour définir nos approximations de valeurs propres, nous avons besoin d'introduire un opérateur fondamental.

L'opérateur $\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}}$
On note $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\beta}}$ la hessienne de $\boldsymbol{\beta}$ en x_0, i.e. :

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\beta}}(r,s)=\frac{1}{2}\partial_r^2\hat{\boldsymbol{\beta}}(x_0)r^2+\frac{1}{2}\partial_{rs}^2\hat{\boldsymbol{\beta}}(x_0)(sr+rs)+\frac{1}{2}\partial_s^2\hat{\boldsymbol{\beta}}(x_0)s^2.$$

On définit alors :

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}}=\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\beta}}(D_\tau,\frac{\tau}{\sin\theta}). \tag{1.12}$$

Par l'hypothèse de non-dégénérescence (1.10) et après un changement de coordonnées, il est clair que $\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}}$ est un oscillateur harmonique.
Nous pouvons enfin énoncer notre principal résultat :

Théorème 1.4 *Sous les hypothèses (1.10) et (1.11), il existe $d\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $D_n>0$ et $h_n>0$ tel que, pour $0<h\leq h_n$, il existe au moins une valeur propre μ_n de $P_{\boldsymbol{A}}^h$ telle que :*

$$|\mu_n-(\hat{\beta}_0(x_0)h+C^{\boldsymbol{\beta},K}(x_0)\|\boldsymbol{\beta}(x_0)\|^{1/2}h^{3/2}+(\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}})+d)h^2)|\leq D_nh^{5/2},$$

où $\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}})$ est la n-ième valeur propre de $\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}}$ et où $C^{\boldsymbol{\beta},K}(x_0)$ est une quantité explicite dépendant des dérivées premières du champ magnétique en x_0, de θ et de la courbure K en x_0.

Remarque 1.5.

1. Comme nous l'avons dit ci-avant, l'ingrédient principal de la preuve de ce théorème est la construction de quasimodes. Nous contruirons des fonctions ψ_n^h localisées près de x_0 et des nombres λ_n^h tels que :

   $$\|(P_{\mathbf{A},\Omega}^h-\lambda_n^h)\psi_n^h\|\leq\epsilon(h)$$

   et nous appliquerons le théorème spectral.

2. Il peut sembler étonnant que l'ordre du deuxième terme soit $h^{3/2}$ et plus $h^{4/3}$ comme dans le cas du champ constant. En fait, dans ce dernier cas, la minimisation du premier terme de l'asymptotique est obtenue quand $\theta = 0$; dans notre cas, nous remarquons que le troisième terme est proportionnel à $(\sin\theta)^{-1}$ et explose donc quand θ est nul.

■

2 Quelques propriétés de la famille $H(\theta)$

Dans tout ce qui suit, nous noterons

$$h(\theta) = H(\theta) - \sigma(\theta).$$

2.1 La fonction u_θ

L'objet de cette sous-section est d'établir que $\sigma(\theta)$ est une valeur propre (simple) de $H(\theta)$ associée à une fonction propre normalisée u_θ et de déterminer des propriétés de décroissance de cette dernière. Introduisons déjà quelques notations commodes :

$$L^2_{exp}(\mathbb{R}^2_+) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2_+) : \exists \alpha > 0, \quad e^{\alpha(t+<s>)} f \in L^2(\mathbb{R}^2_+)\}$$

et

$$H^1_{exp}(\mathbb{R}^2_+) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2_+) : \exists \alpha > 0, \quad e^{\alpha(t+<s>)} f \in H^1(\mathbb{R}^2_+)\},$$

où $< s >= (s^2+1)^{1/2}$.
Il a été montré (cf. [FH09]) que

Lemme 2.1 *Si* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, *alors* $\inf \sigma_{ess}(H(\theta)) \geq 1$.

Rappelons la preuve de ce fait.
Preuve.
Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on aura besoin de considérer la réalisation de Neumann $\mathfrak{h}^{N,\xi}$ sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ définie par :

$$-\frac{d^2}{dt^2} + (t+\xi)^2, \quad \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{N,\xi}) = \{u \in B^2(\mathbb{R}_+) : u'(0) = 0\}. \tag{2.13}$$

Sa plus petite valeur propre est notée $\mu(\xi)$ et nous utiliserons que (cf. [DH93, HM01]) :

$$\lim_{\xi \to +\infty} \mu(\xi) = +\infty \text{ et } \lim_{\xi \to -\infty} \mu(\xi) = 1. \tag{2.14}$$

On écrit alors :

$$H(\theta) = P_1(\theta,\rho) + P_2(\theta,\rho),$$

où

$$P_1(\theta,\rho) = D_s^2 + \rho^2(\cos\theta t - \sin\theta s)^2,$$
$$P_2(\theta,\rho) = D_t^2 + (1-\rho^2)(\cos\theta t - \sin\theta s)^2.$$

Il est clair que

$$P_1(\theta,\rho) \geq \rho\sin\theta$$

et

$$P_2(\theta,\rho) \geq \sqrt{1-\rho^2}\cos\theta\mu(-\tan\theta s).$$

Ainsi, on a, avec $\rho = \cos\theta$:

$$H(\theta) \geq \cos^2\theta + \sin^2\theta\mu(-\tan\theta s).$$

On en conclut que, pour tout u supporté dans le complémentaire de $B(0,R)$, avec R assez grand :

$$q_\theta(u) = \int_{t>0} |D_t u|^2 + |D_s u|^2 + |V_\theta u|^2 ds dt \geq (1-\epsilon(R))\|u\|^2, \tag{2.15}$$

d'où l'on tire :

$$\inf_{u:\text{supp}(u)\subset B(0,R)^c} \frac{q_\theta(u)}{\|u\|^2} \geq 1-\epsilon(R).$$

La caractérisation du bas du spectre essentiel donnée par le théorème de Persson fournit alors la conclusion recherchée.

■

Or, on sait que, lorsque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sigma(\theta) < 1$. Par conséquent $\sigma(\theta)$ est une valeur propre (et il est classique qu'elle est simple, cf. [RS78]). Elle est associée à une fonction positive et L^2-normalisée que nous notons u_θ.
Le lemme suivant énonce que u_θ possède une décroissance exponentielle dans $H^1(\mathbb{R}^2_+)$:

Lemme 2.2 *On a :*

$$u_\theta \in H^1_{exp}(\mathbb{R}^2_+). \tag{2.16}$$

Preuve.
Nous allons combiner l'inégalité (2.15) et les estimées de Agmon.
Soit Φ une fonction lipschitzienne et $\alpha > 0$ à choisir. On a :

$$\sigma(\theta)\|e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2 = q_\theta(e^{\alpha\Phi}u_\theta) - \alpha^2\|\nabla\Phi e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2. \tag{2.17}$$

On considère une fonction troncature $\chi_{R,1}$ supportée dans la boule de centre 0 et de rayon R et on effectue une partition de l'unité :

$$\chi_{R,1}^2 + \chi_{R,2}^2 = 1,$$

avec
$$|\nabla\chi_{R,1}|^2+|\nabla\chi_{R,2}|^2\leq CR^{-2}.$$
Par (2.17), on déduit :

$$\begin{aligned}\sigma(\theta)\|\chi_{R,1}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2+\sigma(\theta)\|\chi_{R,2}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2\geq q_\theta(\chi_{R,1}e^{\alpha\Phi}u_\theta)+q_\theta(\chi_{R,2}e^{\alpha\Phi}u_\theta)\\ -\alpha^2\|\chi_{R,1}\nabla\Phi e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2-\alpha^2\|\chi_{R,2}\nabla\Phi e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2\\ -CR^{-2}\|\chi_{R,1}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2-CR^{-2}\|\chi_{R,2}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2.\end{aligned}$$

D'une part, on a :

$$q_\theta(\chi_{R,1}e^{\alpha\Phi}u_\theta)\geq\sigma(\theta)\|\chi_{R,1}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2,$$

et d'autre part, par (2.15), il vient :

$$q_\theta(\chi_{R,2}e^{\alpha\Phi}u_\theta)\geq(1-\epsilon(R))\|\chi_{R,2}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}&\int_{t>0}(1-\sigma(\theta)-\epsilon(R)-CR^{-2}-\alpha^2|\nabla\Phi|^2)\chi_{R,2}^2e^{2\alpha\Phi}u_\theta^2\,dsdt\\ &\leq CR^{-2}\|\chi_{R,1}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2+\alpha^2\|\chi_{R,1}\nabla\Phi e^{\alpha\Phi}u_\theta\|^2.\end{aligned}$$

Alors, en prenant $\Phi=t+|s|$, α assez petit et R assez grand, on trouve :

$$\|\chi_{R,2}e^{\alpha\Phi}u_\theta\|_2^2\leq C(R,\alpha,\theta)\|u_\theta\|_2^2,$$

d'où le contrôle :
$$\|e^{\alpha\Phi}u_\theta\|_2^2\leq D(R,\alpha,\theta)\|u_\theta\|_2^2.$$
Le contrôle H^1 provient finalement de (2.17).

■

La proposition qui suit va permettre d'améliorer l'information sur la décroissance de u_θ.

Proposition 2.3 *Soit $f\in L^2_{exp}(\mathbb{R}^2_+)$ telle que $< f\,,\,u_\theta >= 0$. Alors, si v est une solution de*

$$h(\theta)v=f, \tag{2.18}$$

on a
$$v\in H^1_{exp}(\mathbb{R}^2_+).$$

Preuve.
Donnons seulement l'idée de la preuve et renvoyons à [Ray09a] pour les détails techniques. On utilise une méthode de Grushin en rendant inversible $h(\theta)$. On introduit en effet l'opérateur défini sur $D(H(\theta)) \times \mathbb{C}$ par :

$$\mathfrak{H}(\theta) = \begin{bmatrix} h(\theta) & u_\theta \\ < \cdot, u_\theta > & 0 \end{bmatrix}.$$

Cet opérateur est inversible. (2.18) est équivalente à :

$$\mathfrak{H}(\theta) \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix},$$

si on prend pour v l'unique solution orthogonale à u_θ.
L'idée est alors de perturber $\mathfrak{H}(\theta)$ par un "petit" poids exponentiel et de voir qu'il demeure inversible. Occupons nous juste de la décroissance en s.
Posant $\tilde{v} = e^{\epsilon <s>} v$ et $\tilde{f} = e^{\epsilon <s>} f$, on peut réécrire :

$$\mathfrak{H}(\theta)^\epsilon \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{bmatrix},$$

où

$$\mathfrak{H}(\theta)^\epsilon = \begin{bmatrix} e^{\epsilon <s>} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{H}(\theta) \begin{bmatrix} e^{-\epsilon <s>} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un petit calcul permet d'écrire :

$$\mathfrak{H}(\theta)^\epsilon = \mathfrak{H}(\theta) + \epsilon F$$

avec F relativement borné par rapport à $\mathfrak{H}(\theta)$ (cela vient de (2.16)). Ainsi, $\mathfrak{H}(\theta)^\epsilon$ est inversible pour ϵ assez petit et donc $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$. En effectuant le même type de raisonnement par rapport à t on obtient que $v \in L^2_{exp}(\mathbb{R}^2_+)$. En utilisant la forme quadratique associée à $H(\theta)$, on obtient sans mal que $v \in H^1_{exp}(\mathbb{R}^2_+)$.

∎

Notons

$$H^\infty_{exp} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2_+) : \forall (\ell, k) \in \mathbb{N}^4 \quad D^\ell_s D^k_t f \in L^2_{exp}(\mathbb{R}^2_+)\} \subset \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

En dérivant l'équation $h(\theta)u_\theta = 0$ et en appliquant la proposition précédente, on peut montrer que :

Proposition 2.4 *u_θ est dans H^∞_{exp}.*

De même, on peut prouver la proposition :

Corollaire 2.5 *Soit $g \in H^\infty_{exp}$ et $f \in D(H(\theta))$ telles que :*

$$h(\theta) f = g.$$

Alors, $f \in H^\infty_{exp}$.

2.2 Équations $h(\theta)f = g$

Dans cette section, nous expliquons comment construire des solutions à certaines équations qui apparaîtront dans la construction de quasimodes et qui sont de la forme : $h(\theta)f = g$. Introduisons déjà un paramètre d'échelle ρ et considérons :

$$H(\theta,\rho) = \frac{1}{\rho}(D_s^2 + D_t^2) + \rho(\cos\theta t - \sin\theta s)^2.$$

Nous jouons sur les paramètres ρ et θ ainsi qu'avec la dérivation tangentielle ∂_s dans l'équation

$$H(\theta,\rho)u_{\theta,\rho} = \sigma(\theta)u_{\theta,\rho}. \tag{2.19}$$

Nous donnons deux exemples des calculs dont nous avons besoin.

2.2.1 Dérivée par rapport à s

On considère (2.19) avec $\rho = 1$. En dérivant par rapport à s, on trouve :

$$h(\theta)\partial_s u_\theta = 2(\cos\theta t - \sin\theta s)u_\theta.$$

Multipliant cette équation par u_θ et intégrant par parties, on déduit :

$$\int_{t>0} (\cos\theta t - \sin\theta s)|u_\theta|^2 ds dt = 0.$$

2.2.2 Formules du viriel et de Feynman-Heymann

Considérons l'opérateur :

$$j(\theta,\rho) = \sigma'(\theta)\partial_\rho - \frac{\sigma(\theta)}{\rho}\partial_\theta$$

et appliquons le à (2.19). Un simple calcul fournit alors :

$$h(\theta)w_0 = -2\sigma' V_\theta^2 u_\theta + 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta u_\theta,$$

où

$$w_0 = \left(\sigma'(\theta)\partial_\rho - \frac{\sigma(\theta)}{\rho}\partial_\theta\right) u_{\theta,\rho|\rho=1}.$$

De la même façon que dans le paragraphe précédent, on trouve la formule :

$$\sigma'(\theta)\int_{t>0} |V_\theta u_\theta|^2 ds dt = \sigma(\theta)\int_{t>0} V_\theta \partial_\theta V_\theta |u_\theta|^2 ds dt.$$

Nous n'explicitons pas toutes les autres équations que nous rencontrons dans ce travail. Insistons juste sur le fait qu'elles reposent essentiellement sur des calculs de commutateurs (comme $[H(\theta), D_s]$) ou/et sur des dérivations par rapports aux paramètres θ et ρ.

3 Détermination d'un opérateur approché près de x_0

Nous allons maintenant construire un opérateur qui approche $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ près de x_0. À cette fin, on définit des coordonnées locales.

3.1 Coordonnées normales

On introduit un système de coordonnées sur le bord près de x_0. On pose : $\overrightarrow{l_0} = \overrightarrow{\tau_0} \times \overrightarrow{\nu_0}$, où $\overrightarrow{\nu_0}$ est la normale entrante en x_0 et

$$\overrightarrow{\tau_0} = \frac{\boldsymbol{\beta}(x_0) - (\boldsymbol{\beta}(x_0) \cdot \overrightarrow{\nu_0})\overrightarrow{\nu_0}}{\|\boldsymbol{\beta}(x_0) - (\boldsymbol{\beta}(x_0) \cdot \overrightarrow{\nu_0})\overrightarrow{\nu_0}\|}.$$

$(\vec{\tau_0}, \vec{l_0})$ est une base orthonormée du plan tangent en x_0 ; on note alors (r, s) les coordonnées correspondantes sur l'espace tangent. En utilisant l'application exponentielle près x_0, il est classique que les coordonnées (r, s) définissent une paramétrisation locale du bord et elles sont appelées coordonnées normales (cf. [Laf96]). En résumé, il existe un ouvert S de $\mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme ϕ tels que :

$$\phi : \mathcal{W}_{x_0} \to S, \phi(x) = (r, s).$$

Près de x_0, on dispose donc naturellement d'un système de coordonnées données par le difféomorphisme :

$$\Phi(r, s, t) = \phi^{-1}(r, s) + t\nu(\phi^{-1}(r, s)),$$

où $t = d(x, \partial\Omega)$. Dans ces coordonnées, l'opérateur $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ devient

$$\tilde{P}^h_{\mathbf{A}} = |\det D\Phi| \sum_{k,j} (ih\nabla_j + \tilde{A}_j)|\det D\Phi^{-1}|g^{kj}(ih\nabla_k + \tilde{A}_k), \tag{3.20}$$

où (g^{kj}) est l'inverse de (g_{kj}) qui est la matrice $(D\Phi^{-1})^t(D\Phi^{-1})$ et où

$$\tilde{\mathbf{A}} = D_y\Phi^{-1}(\mathbf{A}(\Phi^{-1}(y))).$$

3.2 Hypothèse de non-dégénérescence

Écrivons le développement de Taylor à l'ordre 1 pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned}
{\beta_r}^{(1)} &= -\delta_0 r - \epsilon_0 s - \xi_0 t,\\
{\beta_s}^{(1)} &= \cos\theta_1 + \alpha_0 r + \beta_0 s + \eta_0 t,\\
{\beta_t}^{(1)} &= \sin\theta_1 + \gamma_0 s + \zeta_0 r + \mu_0 t,
\end{aligned}$$

et écrivons également le développement à l'ordre 2, mais restreint à $t=0$:

$$\begin{aligned}
{\beta_r}^{(2)} &= -\delta_0 r - \epsilon_0 s - \overline{C_0} rs - \overline{F_0} s^2 - \overline{D_0} r^2,\\
{\beta_s}^{(2)} &= \cos\theta_1 + \alpha_0 r + \beta_0 s + C_0 rs + F_0 s^2 + D_0 r^2,\\
{\beta_t}^{(2)} &= \sin\theta_1 + \gamma_0 s + \zeta_0 r - 2B_0 rs - 3H_0 s^2 - E_0 r^2.
\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent traduire l'hypothèse (1.10). Le fait que x_0 soit un point critique pour $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ fournit le lemme suivant :

Lemme 3.1

$$\zeta_0 = T(\theta)\alpha_0 \ \textit{et}\ \gamma_0 = T(\theta)\beta_0\,, \tag{3.21}$$

où T s'exprime à l'aide de σ et σ'.

Le fait que ce minimum soit non-dégénéré implique une condition sur les paramètres apparaissant dans l'expression de $\boldsymbol{\beta}^{(2)}$, comme on peut le voir par le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Les dérivées secondes de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sont données par :*

$$\frac{1}{2}\partial_r^2\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sigma^3+\sigma^2\sigma''}{2S(\theta)^2}\alpha_0^2 + \frac{C(\theta)}{2\cos\theta}\delta_0^2 + D_0C(\theta) - E_0S(\theta) \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{2}\partial_s^2\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sigma^3+\sigma^2\sigma''}{2S(\theta)^2}\beta_0^2 + \frac{C(\theta)}{2\cos\theta}\epsilon_0^2 + F_0C(\theta) - 3H_0S(\theta) \tag{3.23}$$

$$\partial_{rs}^2\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sigma^3+\sigma^2\sigma''}{2S(\theta)^2}\alpha_0\beta_0 + \frac{C(\theta)}{2\cos\theta}\delta_0\epsilon_0 + C_0C(\theta) - 2B_0S(\theta), \tag{3.24}$$

où C et S sont des fonctions s'exprimant à l'aide de σ et σ'.

3.3 Un opérateur modèle

On considère (3.20) et on effectue un développement de Taylor à l'ordre 3 pour $\tilde{\mathbf{A}}$ (et donc à l'ordre 2 pour le champ magnétique) et à l'ordre 2 pour la métrique. On omet les restes de Taylor et l'opérateur modèle sur $L^2(m_{app}drdsdt)$ que nous considérons s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\mathcal{M}} = h^2 n_{app} D_t m_{app} D_t &\\
&+ (1+2tK_{11}-G_{11}-R_{11})(hD_r+{\tilde{A}_r}^{(3)})^2\\
&+ (1+2tK_{22}-G_{22}-R_{22})(hD_s+{\tilde{A}_s}^{(3)})^2\\
&+ (2K_{12}t-G_{12}-R_{12})(hD_r+{\tilde{A}_r}^{(3)})(hD_s+{\tilde{A}_s}^{(3)})\\
&+ (2K_{12}t-G_{12}-R_{12})(hD_s+{\tilde{A}_s}^{(3)})(hD_r+{\tilde{A}_r}^{(3)})\\
&+ h^2\tilde{R}_1(r,s,t)D_r + h^2\tilde{R}_2(r,s,t)D_s,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

où les coefficients qui apparaissent sont liés aux développements de Taylor de la métrique. Il satisfait, pour ψ localisé près de x_0 et convenable :

$$\begin{aligned}(3.26)\quad \|\tilde{P}^h_{\mathbf{A}}\psi - \mathcal{H}^{\mathcal{M}}\psi\| \le Ch^2 \sum_{k,j} \|(|r|^3+|s|^3+t^3)|D_kD_j\psi|\| \\ + Ch\|(|r|^3+|s|^3+t^3)|\psi|\| \\ + Ch\sum_j \|(r^4+s^4+t^4)|D_j\psi|\| + C\|(|r|^5+|s|^5+t^5)|\psi|\|.\end{aligned}$$

4 Construction de quasimodes

Comme le suggère l'approximation (3.26), nous allons fabriquer des quasimodes ψ pour les premières valeurs propres de $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}$.

4.1 Choix d'une échelle et transformation unitaire

On commence d'abord par choisir une échelle pour les trois coordonnées r, s et t. L'échelle caractéristique près du bord est $h^{1/2}$. Si nous voulons obtenir formellement comme premier terme dans le développement de l'opérateur $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}$ en puissance de h un opérateur dont le bas du spectre est $\sigma(\theta)$ (qui correspond au problème avec champ constant), on est contraint de prendre l'échelle $h^{1/2}$ également en s. Nous choisissons enfin $h^{1/2}$ comme échelle en r. On pose donc :

$$(4.27)\qquad t = h^{1/2}\tilde{t}, s = h^{1/2}\tilde{s}, r = h^{1/2}\tilde{r}.$$

On enlève les tildes, on divise l'opérateur par h et on considère :

$$\begin{aligned}(4.28)\qquad \mathcal{H}^{h,new} &= n^h_{app}D_tm^h_{app}D_t + f^h_{11}(D_r+\overline{A}^h_r)^2 + f^h_{22}(D_s+\overline{A}^h_s)^2 \\ &+ f^h_{12}(D_r+\overline{A}^h_r)(D_s+\overline{A}^h_s) + f^h_{12}(D_s+\overline{A}^h_s)(D_r+\overline{A}^h_r) \\ &+ h\tilde{R}_1(r,s,t)D_r + h\tilde{R}_2(r,s,t)D_s.\end{aligned}$$

Formellement, nous avons $\mathcal{H}^{h,new} \approx \mathcal{H}(\theta)$. Il sera avantageux, en vue de la construction de quasimodes, de faire une transformation unitaire :

$$H^{h,new} = U_\theta\mathcal{F}\mathcal{H}^{h,new}\mathcal{F}^{-1}U_\theta^{-1},$$

où $\mathcal{F}$ est la tranformée de Fourier en r et U_θ la translation $s \mapsto s + \frac{\tau}{\sin\theta}$. Ainsi, on a formellement $H^{h,new} \approx H(\theta)$ et $H(\theta)$ fournira une décroissance en s et t. On va donc construire des quasimodes pour $H^{h,new}$.

4.2 Construction

On développe formellement $H^{h,new}$ en puissance de $h^{1/2}$:

$$H^{h,new} = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2}H_j.$$

On cherche des quasimodes exprimés sous la même forme :

$$u^h = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2} u_j$$

et correspondant à des valeurs propres :

$$\lambda_1^h = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2} \lambda_j.$$

On veut formellement que :

$$H^{h,new} u^h = \lambda_1^h u^h + O(h^\infty)$$

et nous sommes conduits au système (on ne regarde que les trois premières équations) :

$$\begin{aligned} h^0 &: H_0 u_0 = \lambda_0 u_0, \\ h^{1/2} &: H_1 u_0 + H_0 u_1 = \lambda_1 u_0 + \lambda_0 u_1, \\ h &: H_2 u_0 + H_1 u_1 + H_0 u_2 = \lambda_2 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_0 u_2. \end{aligned}$$

Le but est alors de le résoudre pour des λ_i aussi petits que possible et en déterminant les u_i.
Donnons l'expression complète de H_1 :

$$\begin{aligned} H_1 &= (2V_\theta(\alpha_0 t - \zeta_0 s) + 2\delta_0 t D_s)\boxed{D_\tau} - \frac{2\zeta_0}{\sin\theta} V_\theta \boxed{\tau D_\tau} \\ &+ (\frac{2}{\sin\theta}(\beta_0 t - \gamma_0 s)V_\theta + \frac{\zeta_0}{\sin^2\theta}(V_\theta D_s + D_s V_\theta) + \frac{2\epsilon_0}{\sin\theta} t D_s)\boxed{\tau} - \frac{\gamma_0}{\sin^2\theta} V_\theta \boxed{\tau^2} + \tilde{H}_1, \end{aligned}$$

avec $\tilde{H}_1$ défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 = &- \frac{1}{\sin\theta}(\alpha_0 t - \zeta_0 s)(D_s V_\theta + V_\theta D_s) + 2V_\theta(\beta_0 st - \frac{\gamma_0}{2} s^2) + \eta_0 V_\theta t^2 \\ &- \frac{2\delta_0 t}{\sin\theta} D_s^2 + \epsilon_0 t(s D_s + D_s s) + \xi_0 t^2 D_s + H_K \end{aligned}$$

et où :

$$H_K = (K_{11} + K_{22})\partial_t + 2tK_{11} V_\theta^2 + 2tK_{22} D_s^2 + 2tK_{12}(V_\theta D_s + D_s V_\theta).$$

Nous n'écrivons pas l'expression de H_2 qui est fastidieuse et dont le détail n'est pas capital dans la preuve de notre théorème.

4.2.1 Coefficient de h^0

On rappelle que $H_0 = H(\theta)$. On choisit donc comme λ_0 la plus petite valeur propre de H_0 i.e. $\lambda_0 = \sigma(\theta)$ et on prend :

$$u_0(\tau, s, t) = \phi_0(\tau) u_\theta(s, t)\,, \tag{4.29}$$

avec ϕ_0 (de norme 1) à déterminer.

4.2.2 Coefficient de $h^{1/2}$

On veut trouver u_1 tel que :

$$(H(\theta) - \sigma(\theta))u_1 = \lambda_1 u_0 - H_1 u_0,$$

avec λ_1 le plus petit possible.
On peut résoudre cette équation si et seulement si

$$< \lambda_1 u_0 - H_1 u_0 >_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} = 0.$$

On obtient une équation satisfaite par ϕ_0 sous la forme :

$$\mathfrak{A} D_\tau \phi_0 + \mathfrak{B} \tau D_\tau \phi_0 + \mathfrak{C} \tau \phi_0 + \mathfrak{D} \tau^2 \phi_0 + \mathfrak{E} \phi_0 = 0.$$

Les formules que nous pouvons trouver avec les méthodes décrites dans la section 2.2 permettent de montrer le lemme :

Lemme 4.1

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = 0.$$

On en déduit que $\mathfrak{E} = 0$ et cela détermine une unique valeur de λ_1 sans pour autant déterminer ϕ_0. Pour cette valeur de λ_1, nous pouvons trouver une fonction u_1 qui est dans la classe de Schwartz comme fonction en s et t (nous en donnons une expression assez explicite dans [Ray09a]) et qui dépend de ϕ_0.

4.2.3 Coefficient de h

On cherche u_2 et λ_2 (le plus petit possible) tels que :

$$(H(\theta) - \sigma(\theta))u_2 = \lambda_2 u_0 + \lambda_1 u_1 - H_2 u_0 - H_1 u_1.$$

Comme précédemment, on analyse la condition :

$$< \lambda_2 u_0 + \lambda_1 u_1 - H_2 u_0 - H_1 u_1, u_\theta >_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} = 0.$$

Cette condition peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}(A_1 \tau^2 D_\tau^2 + A_2 \tau^4 + A_3 \tau^3 D_\tau + A_4 \tau D_\tau^3 \tau + A_5 \tau D_\tau^2 + A_6 \tau^2 D_\tau + A_7 \tau^3 \\ + A_8 D_\tau^3 + A_9 D_\tau^2 + A_{10} \tau D_\tau + A_{11} \tau^2 \\ + A_{12} D_\tau + A_{13} \tau + A_{14}) \phi_0 = \lambda_2 \phi_0.\end{aligned}$$

Les méthodes de la section 2.2 permettent de montrer que presque tous les coefficients de cette équation sont nuls :

Lemme 4.2 *On a :*

$$A_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, 8\}. \tag{4.30}$$

Un deuxième lemme, dont la preuve utilise aussi ces nombreuses formules, mais aussi les expressions (3.22), (3.23) et (3.24), permet de donner des expressions explicites des coefficients des termes d'ordre 2 :

Lemme 4.3

$$A_9 = \frac{1}{2\sin^2\theta}\partial_s^2\hat{\boldsymbol{\beta}}(x_0),$$
$$A_{10} = \frac{1}{2}\partial_r^2\hat{\boldsymbol{\beta}}(x_0),$$
$$A_{11} = \frac{1}{\sin\theta}\partial_{rs}^2\hat{\boldsymbol{\beta}}(x_0).$$

L'équation de compatibilité s'écrit donc :

$$(\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}}(D_\tau, \tau) + A_{12}D_\tau + A_{13}\tau + A_{14})\phi_0 = \lambda_2\phi_0.$$

Une translation permet d'éliminer les termes de transports et ainsi, il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lambda_2 - d \in \sigma(\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}})$$

et pour chacune de ces valeurs de λ_2 (a priori dans $\mathbb{C}$), on considère une fonction $\phi_0 = \phi_{\lambda_2}$ dans l'espace propre associé (inclus dans la classe de Schwartz).
Dès lors, pour ces choix de λ_2 et ϕ_0, nous pouvons trouver une fonction u_2 qui dans la classe de Schwartz.

4.3 Calcul final

Considérant une fonction troncature χ dans un voisinage fixé de x_0, nous introduisons pour chaque λ_2 :

$$\psi = \chi\left\{\mathcal{F}^{-1}U_\theta^{-1}(u_0 + h^{1/2}u_1 + hu_2)\right\}(h^{-1/2}r, h^{-1/2}s, h^{-1/2}t)$$

qui sera donc un quasimode pour $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$.
Avec la décroissance exponentielle de ψ, on trouve d'abord :

$$\|\tilde{P}^h_{\mathbf{A}}\psi - \mathcal{H}^{\mathcal{M}}\psi\| \leq Ch^{5/2}.$$

et ensuite :

$$\|(\mathcal{H}^{\mathcal{M}} - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + (\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}}) + d)h^2))\psi\|_{L^2(m_{app}drdsdt)} = O(h^{5/2}).$$

Ainsi, on trouve :

$$\|P^h_{\mathbf{A},\Omega}\psi - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + (\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_{\boldsymbol{\beta}}) + d)h^2))\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{5/2}.$$

Le théorème spectral et l'autoadjonction de $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ permettent alors de montrer que d est réel et la preuve du théorème est terminée.

Références

[CFKS86] H-L. Cycon, R-G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. Schrödinger Operators. Springer-Verlag, 1986.

[DH93] M. Dauge and B. Helffer. Eigenvalues variation. I. Neumann problem for Sturm-Liouville operators. Journal of Differential Equations, 104 :243–262, 1993.

[FH09] S. Fournais and B. Helffer. Spectral methods in surface superconductivity. To appear, 2009.

[HM01] B. Helffer and A. Morame. Magnetic bottles in connection with superconductivity. J. Funct. Anal., 185(2) :604–680, 2001.

[HM04] B. Helffer and A. Morame. Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effects in the case of dimension 3 (general case). Ann. Scient. E. Norm. Sup, 37(4) :105–170, 2004.

[Laf96] J. Lafontaine. Introduction aux variétés différentielles. Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[LP00] K. Lu and X.-B. Pan. Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. Differential Equations, 168 :386–452, 2000.

[Ray09a] N. Raymond. On the semi-classical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field. Submitted to Asymptotic Analysis, 2009.

[Ray09b] N. Raymond. Sharp Asymptotics for the Neumann Laplacian with Variable Magnetic Field : case of Dimension 2. Annales Henri Poincaré, 10(1) :95–122, 2009.

[RS78] M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics, analysis of operators. Academic Press, 1978.