Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2009-2010

François Bolley

Limite de champ moyen de systèmes de particules

Séminaire É. D. P. (2009-2010), Exposé n° XXXI, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A31_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2009-2010
Exposé n° XXXI, 1-15

Limite de champ moyen de systèmes de particules

François BOLLEY

Ceremade, Umr Cnrs 7534, Université Paris-Dauphine,
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, F-75775 Paris cedex 16.
Mel : bolley@ceremade.dauphine.fr

On présente des résultats classiques et récents dans l'étude de la limite de champ moyen de systèmes de particules stochastiques en interaction. Ces derniers résultats visent à couvrir une plus grande variété de modèles et obtenir des estimations précises de la convergence et sont mises en lien avec le comportement en temps grand des systèmes considérés.

On s'intéresse au comportement de grands systèmes de particules identiques repérées à l'instant t dans l'espace des phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ des positions x et des vitesses v par $z_i(t) = (x_i(t), v_i(t))$ pour $1 \leq i \leq N$.

On suppose que l'évolution des particules est régie par les lois de Newton modifiées par un terme de diffusion, ce que l'on modélise par le système d'équations différentielles stochastiques couplées

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx_i(t) & = & v_i(t)\, dt \\ dv_i(t) & = & G(x_i(t), v_i(t))\, dt + \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j \neq i} F\big(x_i(t) - x_j(t), v_i(t) - v_j(t)\big)\, dt + \sqrt{2}\, \sigma\, dB_i(t) \quad 1 \leq i \leq N. \end{array} \right. \tag{1}$$

Les données initiales $z_i(0)$ peuvent être déterministes ou aléatoires.

De tels systèmes sont classiques en physique puisqu'il décrivent l'évolution d'astres de même masse, d'électrons, etc ; leur étude a récemment connu une grande activité en biologie mathématique dans la modélisation de mouvements collectifs de bactéries et de petits animaux (cf. [12] pour une présentation générale). Les termes F, G, σ et B_i modélisent diverses influences sur l'évolution des particules, qui dépendent de leur nature et que l'on décrit maintenant.

Le terme $G(x_i, v_i)$ rend compte des forces extérieures agissant sur la particule i, c'est-à-dire, indépendantes des autres particules. Par exemple $G(x, v) = -\nabla U(x)$ est la force imposée au point x dans un potentiel $U(x)$: c'est le cas, pour $U(x) = \alpha |x - x_0|^{-1}$, du potentiel de gravitation d'un astre placé en $x_0 \in \mathbb{R}^3$ pour $\alpha < 0$, et du potentiel électrique d'une masse chargée placée en $x_0 \in \mathbb{R}^3$ pour $\alpha > 0$. De même $G(x, v) = \alpha\, v$ avec $\alpha < 0$ est une force de friction proportionnelle à la vitesse, et $G(x, v) = \alpha(\beta^2 - |v|^2) v$ avec $\alpha > 0$ est une force d'autopropulsion et de friction introduite dans [17] pour modéliser la tendance de certaines bactéries à atteindre une vitesse limite β. Le modèle de Vicsek [29] considère même des individus évoluant à vitesse constante en norme, et donc selon des équations posées sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$: la limite de champ moyen pour ce cadre particulier est traitée dans [6].

Deux indices $j \neq i$ étant fixés, le terme $N^{-1} F\big(x_i - x_j, v_i - v_j\big)$ décrit l'action de la particule j sur la particule i. Le cœfficient N^{-1} est celui du couplage dit « faible » : il induit une force totale d'ordre 1 sur la particule i et conduit aux équations de champ moyen comme nous le verrons par la suite.

Dans certains modèles cette action ne dépend que de la position relative $x_i - x_j$ et dérive d'un potentiel, sous la forme $F(x, v) = -\nabla U(x)$: c'est le cas pour des astres, et dans ce cas $U(x) = \alpha |x|^{-1}$

en dimension 3 avec $\alpha < 0$ est le potentiel attractif de gravitation, ou pour des électrons, et dans ce cas $U(x) = \alpha |x|^{-1}$ en dimension 3 avec $\alpha > 0$ est le potentiel répulsif de Coulomb. C'est également le cas pour des amas de bactéries qui ont tendance à se rapprocher si elles sont très éloignées, et inversement : ce comportement a été modélisé par un potentiel de Morse

$$U(x) = c_R e^{-|x|/l_R} - c_A e^{-|x|/l_A} \tag{2}$$

où c_R, c_A et $l_R < l_A$ désignent l'intensité et la longueur caractéristique de la répulsion et de l'attraction (cf. [17]).

Un autre modèle très étudié récemment (cf. [12]) est celui proposé par F. Cucker et S. Smale [15] pour décrire l'interaction entre criquets et oiseaux de certaines espèces évoluant sans leader, dans lequel

$$F(x_i - x_j, v_i - v_j) = a(|x_i - x_j|)\, |v_j - v_i|^{p-1}\, (v_j - v_i). \tag{3}$$

Ce terme traduit la tendance de la particule i à avoir une vitesse proche de celle des autres particules j (mimétisme), cette tendance étant pondérée par l'éloignement de ces particules, de sorte que les individus proches ont plus d'influence que les individus éloignés : un exemple caractéristique est $a(r) = (1 + r^2)^{-\gamma}$ avec $\gamma > 0$.

La modélisation de phénomènes collectifs d'animaux peut faire apparaître des termes d'interaction de la forme $F(x_i, v_i; x_j, v_j)$ ne dépendant pas seulement des différences $x_i - x_j$ et $v_i - v_j$: c'est le cas par exemple si la particule i ressent uniquement l'influence des particules j présentes dans un certain cône de vision (cf. [1]). Les résultats présentés ici s'étendent à de tels modèles, que l'on n'incluera pas pour ne pas alourdir les notations (cf. [5] par exemple).

Les processus $(B_i(t))_{t \geq 0}$ sont des mouvements browniens standards sur $\mathbb{R}^d$, que l'on supposera indépendants et qui modélisent des phénomènes de diffusion.

Le cœfficient de diffusion σ sera pris constant. Les résultats présentés s'étendent néanmoins à des cœfficients dépendant de la position de la particule i, de la forme $\sigma(z_i(t))$, ou même de la position de toutes les autres particules, de la forme

$$\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \sigma\big(x_i, v_i; x_j, v_j\big)$$

(cf. [27], [5]). De tels cœfficients apparaissent dans des modèles d'évolution de nuages de criquets, leur valeur en un point x décroissant avec la densité ou la vitesse moyenne du nuage dans un voisinage de x (cf. [31]).

Pour des particules identiques, l'état du système n'est pas donné par la position $z_i(t)$ de chaque particule dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$ nécessairement, mais par les quantités moyennes $\displaystyle\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i(t), v_i(t))$, et donc par une mesure de probabilité, dite *mesure empirique*, définie sur $\mathbb{R}^{2d}$ par

$$\hat{\mu}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{(x_i(t), v_i(t))}$$

où $\delta_{(x,v)}$ est la masse de Dirac en $(x, v) \in \mathbb{R}^{2d}$. Cet objet mesure la densité du système dans l'espace des phases puisque

$$\hat{\mu}_t^N[A] = \frac{1}{N} \operatorname{card}\{i; (x_i(t), v_i(t)) \in A\}$$

est la proportion de particules dans un ensemble A de $\mathbb{R}^{2d}$.

Dans la plupart des exemples le nombre N de particules est très élevé : on peut ainsi dénombrer jusqu'à 10^9 criquets dans un nuage et jusqu'à 10^{12} étoiles dans une galaxie. L'étude numérique et théorique de tels systèmes d'équations nombreuses et couplées est alors difficile. C'est pourquoi on préfère souvent remplacer cette description microscopique de chaque particule dans un espace des phases ($\mathbb{R}^{2dN}$) très grand par une description cinétique dans un espace des phases ($\mathbb{R}^{2d}$) réduit. Pour de tels systèmes cette procédure est appelée *limite de champ moyen.*

Le problème de la limite de champ moyen a été résolu dans de nombreux modèles présentant des forces F et G régulières. Il a au contraire été résolu dans peu de cas de forces singulières ; en particulier la limite de champ moyen dans le cas d'une évolution déterministe (où $\sigma = 0$) et de force d'interaction gravitationnelle ou coulombienne est loin d'être résolu : le meilleur résultat dans cette direction est celui obtenu par M. Hauray et P.-E. Jabin (cf. [20]) pour des forces F en $O(|x|^{-a})$ avec $a < 1$ indépendamment de la dimension, et des données initiales bien réparties dans l'espace des phases, au sens où

$$\inf_{i \neq j} \big[|x_i(0) - x_j(0)| + |v_i(0) - v_j(0)| \big] \geq c N^{-1/(2d)}.$$

On se limitera à des forces F et G régulières sur $\mathbb{R}^{2d}$. La force F étant une force d'interaction, il est naturel de supposer que

$$F(-x, -v) = -F(x, v)$$

pour x, v dans $\mathbb{R}^d$, de sorte que $F(0,0) = 0$ (pas d'auto-interaction). Le système (1) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx_i(t) & = & v_i(t)\, dt \\ dv_i(t) & = & G(x_i(t), v_i(t))\, dt + (F * \hat{\mu}_t^N)(x_i(t), v_i(t))\, dt + \sqrt{2}\, \sigma\, dB_i(t) \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq N \tag{4}$$

où $*$ désigne la convolution sur $\mathbb{R}^{2d}$. La particule i évolue donc dans le champ de force $F(z_i - z)$ moyenné sur $z \in \mathbb{R}^{2d}$ suivant la distribution $\hat{\mu}_t^N$ du système, justifiant ainsi le nom de modèle de *champ moyen.*

1. Le cas d'une évolution déterministe

Considérons dans un premier temps le cas d'une évolution déterministe, dans lequel le cœfficient de diffusion σ est nul : le système (4) est alors un système d'équations différentielles ordinaires. Pour alléger les équations on suppose de plus que $G = 0$, le terme correspondant à G étant plus simple à traiter que le terme d'interaction $F * \hat{\mu}_t^N$, sous des hypothèses analogues sur F et G.

Le système est alors composé de N points $(x_i(t), v_i(t))$ évoluant dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$ suivant l'équation de transport de force $F * \hat{\mu}_t^N(x, v)$: par conséquent la distribution $\hat{\mu}_t^N$ du système est solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_t + \nabla_v \cdot ((F * f_t) f_t) = 0, \qquad t > 0, \ x, v \in \mathbb{R}^d, \tag{5}$$

appelée *équation de Vlasov.* Cette propriété se vérifie en formulation faible comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < \hat{\mu}_t^N, \phi > &= \frac{d}{dt} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i(t), v_i(t)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_x \phi(x_i(t), v_i(t)) \cdot v_i(t) + \nabla_v \phi(x_i(t), v_i(t)) \cdot (F * \hat{\mu}_t^N)(x_i(t), v_i(t)) \\ &= < \hat{\mu}_t^N, v \cdot \nabla_x \phi + (F * \hat{\mu}_t^N) \cdot \nabla_v \phi > . \end{aligned}$$

La question de la limite de champ moyen peut s'écrire sous la forme suivante : soit une suite $\big((z_1(0), \ldots, z_N(0))\big)_N$ de données initiales de mesure empirique $\hat\mu_0^N$ convergeant vers une distribution f_0 sur $\mathbb{R}^{2d}$; en chaque instant $t \geq 0$ la mesure empirique $\hat\mu_t^N$ donnée par l'évolution (4) converge-t-elle vers la solution f_t de (5) de donnée initiale f_0 ? La mesure empirique $\hat\mu_t^N$ étant elle-même une solution de (5), cette question se ramène à une question de stabilité de solutions de (5), qui a été résolue de la manière quantitative suivante par les travaux indépendants de W. Braun et K. Hepp [9], R. Dobrushin [16] et H. Neunzert [26].

Pour $p \geq 1$ notons $P_p(\mathbb{R}^{2d})$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes μ sur $\mathbb{R}^{2d}$ de moment d'ordre p $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2d}} |(x,v)|^p d\mu(x,v)$ fini, où $|(x,v)| = (|x|^2 + |v|^2)^{1/2}$. La *distance de Wasserstein* d'ordre p entre deux mesures μ et $\bar\mu$ de $P_p(\mathbb{R}^{2d})$ est définie par

$$W_p(\mu, \bar\mu) = \inf_{Z, \bar Z} \left(\mathbb{E}|Z - \bar Z|^p\right)^{1/p}$$

où Z et $\bar Z$ sont des variables aléatoires de loi μ et $\bar\mu$ respectivement. La connaissance d'un tel couple $(Z, \bar Z)$ donne donc une majoration de la distance $W_p(\mu, \bar\mu)$, et, d'autre part, par compacité il existe un tel couple réalisant l'infimum. W_p induit une distance sur $P_p(\mathbb{R}^{2d})$ qui en fait un espace séparable et complet. La convergence pour cette distance est équivalente à la convergence étroite plus la convergence du moment d'ordre p (cf. [30, Chapitre 6]). Enfin, pour $p = 1$, la distance W_1 s'écrit sous la forme duale de Kantorovich-Rubinstein

$$W_1(\mu, \bar\mu) = \sup_{[\varphi]_1 \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi \, d\mu - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi \, d\bar\mu \right\} \tag{6}$$

où $[\varphi]_1$ est la seminorme de Lipschitz de φ sur $\mathbb{R}^{2d}$, forme qui la rend aisément manipulable.

Avec cette notation :

Théorème 1 (Neunzert, Dobrushin). *Soit F une force C^1 de seminorme de Lipschitz L. Alors, pour toutes solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ et $(\bar f_t)_{t \geq 0}$ de (5) de moment d'ordre 1 fini,*

$$W_1(f_t, \bar f_t) \leq e^{ct} W_1(f_0, \bar f_0)$$

pour tout $t \geq 0$, avec $c = 2\max(L, 1)$.

Notons que pour des forces lipschitziennes F le premier moment de f_t se propage en temps.

En particulier, prenant pour $\bar f_t$ la mesure empirique $\hat\mu_t^N$ du système de particules évoluant suivant (4), alors $W_1(f_t, \hat\mu_t^N)$ sera majoré par εe^{cT} sur $[0, T]$ si initialement $W_1(f_0, \hat\mu_0^N) \leq \varepsilon$.

La *démonstration du théorème 1* est fondée sur l'interprétation d'une solution f_t de (5) comme mesure image de la donnée initiale f_0 par le flot $T_t[(f_s)_{0\leq s \leq t}]$ donné par les *caractéristiques*

$$\begin{cases} x'(t) &= v'(t) \\ v'(t) &= (F * f_t)(x(t), v(t)). \end{cases}$$

Autrement dit f_t est la distribution d'un système physique constitué de particules initialement distribuées suivant f_0 et évoluant dans le champ de forces $F * f_t$, ce champ de forces étant comme dans le cas discret la somme des forces $F(. - z)$ moyennées sur $z \in \mathbb{R}^{2d}$ suivant la distribution f_t du système.

Elle se décompose en les étapes suivantes :

1) soit $z(0) = (x(0), v(0))$ et $\bar z(0) = (\bar x(0), \bar v(0))$ distribués suivant f_0 et $\bar f_0$ respectivement et tels que $W_1(f_0, \bar f_0) = \mathbb{E}|z(0) - \bar z(0)|$;

2) si $z(0)$ (resp. $\bar z(0)$) évolue suivant le flot $T_t[(f_s)_{0\leq s\leq t}]$ (resp. $T_t[(\bar f_s)_{0 \leq s \leq t}]$) alors la solution $z(t)$ (resp. $\bar z(t)$) à l'instant t a pour distribution f_t (resp. $\bar f_t$) et donc $W_1(f_t, \bar f_t) \leq \mathbb{E}|z(t) - \bar z(t)|$;

3) on contrôle l'écartement des trajectoires $(z(t))_{t\geq 0}$ et $(\bar{z}(t))_{t\geq 0}$ en fonction de leur écart initial $|z(0)-\bar{z}(0)|$ et des champs de forces $F*f_t$ et $F*\bar{f}_t$. Pour cela on démontre et utilise la borne $\|F*f_t - F*\bar{f}_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})} \leq cW_1(f_t,\bar{f}_t)$ qui contrôle la dépendance du champ de forces $F*f_t$ en la distribution f_t, et la borne $[F*f_t]_1 \leq c$ qui permet de contrôler l'écartement des trajectoires sous un même champ de forces ;

4) on combine les différents termes obtenus et on conclut par le lemme de Gronwall.

Cette démonstration a été étendue dans [10] à des forces localement mais non globalement lipschitziennes, telles que celles intervenant dans le modèle de mimétisme (3). L'extension se limite à des solutions à support compact, et est fondée sur un contrôle précis de la croissance du support - qui est finie puisqu'il s'agit d'une équation de transport - en fonction de la seminorme de Lipschitz de F sur ce support.

Elle a également été étendue dans [19] à une version régularisée du système de Vlasov-Maxwell relativiste, par une réécriture de ce système comme l'évolution de la seule distribution d'un potentiel électromagnétique.

Il est à noter qu'une propriété de stabilité entre solutions du système de Vlasov-Poisson a été démontrée dans [21], mais uniquement pour des solutions de densité macroscopique

$$\rho_t = \int_{\mathbb{R}^d} f_t(.,v)\,dv$$

dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$; elle ne peut donc pas s'appliquer au problème de limite de champ moyen dans lequel la densité macroscopique du système de particules est la mesure $\hat{\rho}_t^N = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}$.

2. Le cas d'une évolution stochastique

Par analogie avec le cas précédent on peut espérer que la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N$ du système évolue suivant l'*équation de Vlasov-Fokker-Planck*

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f_t + \nabla_v\cdot((G+F*f_t)f_t) = \sigma^2\Delta_v f_t, \qquad t>0,\ x,v\in\mathbb{R}^d. \tag{7}$$

En réalité ce ne peut être exactement le cas quand $\sigma \neq 0$. En effet, si les données initiales $z_i(0)$ sont déterministes, alors $\hat{\mu}_0^N$ l'est également, et de même la solution de (7) de donnée initiale $\hat{\mu}_0^N$. Mais de l'aléa est créé par l'évolution stochastique (1) des $z_i(t)$ (pour $\sigma\neq 0$) et donc $\hat{\mu}_t^N$ ne peut être déterministe pour $t>0$. D'autre part, même partant d'une donnée initiale singulière telle que $\hat{\mu}_0^N$, on peut s'attendre à ce que la solution de (7) ait une densité régulière pour $t>0$ (et pour des cœfficients F et G réguliers), ce qui n'est pas le cas de $\hat{\mu}_t^N$.

Pour une fonction φ sur $\mathbb{R}^{2d}$, la formule d'Itô assure en fait que

$$\begin{aligned}< \hat{\mu}_t^N,\varphi > - < \hat{\mu}_0^N\varphi > + \int_0^t < \hat{\mu}_s^N, -v\cdot\nabla_x\varphi - (G+F*\hat{\mu}_s^N)\cdot\nabla_v\varphi - \sigma^2\Delta_v\varphi > \\ = \frac{\sqrt{2}\sigma}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^t \nabla_v\varphi(x_i(s),v_i(s))\,dB_i(s),\end{aligned} \tag{8}$$

cette équation n'étant donc pas fermée en l'inconnue $\hat{\mu}_t^N$.

On verra par la suite que le membre de droite est petit en N par une loi des grands nombres. Autrement dit $\hat{\mu}_t^N$ est presque une solution de (7).

Le membre de droite est également nul en espérance. Or prendre l'espérance dans l'équation ci-dessus, c'est considérer l'évolution de la mesure $\mathbb{E}\,\hat{\mu}_t^N$ que l'on étudie maintenant.

Supposons désormais que le système est constitué de particules initialement *échangeables*, c'est-à-dire dont la distribution initiale $\mu_0^{(N)}$ dans $(\mathbb{R}^{2d})^N$ est symétrique par permutation des N variables. Par symétrie de l'évolution cette propriété reste vraie à tout instant $t > 0$. En particulier les N particules ont au temps t la même loi dans $\mathbb{R}^{2d}$, notée $\mu_t^{(1)}$, et qui est la première marge de la loi $\mu_t^{(N)}$ des N particules. La mesure $\mathbb{E}\,\hat{\mu}_t^N$ est alors égale à $\mu_t^{(1)}$ puisque pour un borélien A de $\mathbb{R}^{2d}$

$$\mathbb{E}\,\hat{\mu}_t^N[A] = \mathbb{E}\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{(x_i(t),v_i(t))}[A] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{P}\big[(x_i(t),v_i(t)) \in A\big] = \mu_t^{(1)}[A].$$

Pour écrire l'évolution de cette loi $\mu_t^{(1)}$, écrivons tout d'abord l'évolution de $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t))$ sous la forme de l'équation différentielle stochastique

$$d\mathbf{z}(t) = \sqrt{2}\boldsymbol{\Sigma}\, d\mathbf{B}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{z}(t))\, dt$$

dans $\mathbb{R}^{2dN}$, où $(\mathbf{B}_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^{2dN}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ est une matrice diagonale de taille $2dN$, de cœfficients diagonaux égaux à 0 (d fois), puis 1 (d fois), etc, et où

$$\mathbf{G}(x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) = \Big(v_1, G(z_1) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F(z_1 - z_j), \dots, v_N, G(z_N) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F(z_N - z_j)\Big) \in \mathbb{R}^{2dN}.$$

Par la formule d'Itô, la loi $\mu_t^{(N)}$ de $\mathbf{z}(t)$ évolue donc selon l'équation linéaire de Liouville

$$\frac{\partial \mu_t^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i}\mu_t^{(N)} + \sum_{i=1}^N \nabla_{v_i}\cdot\Big(\big(G(z_i) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F(z_i - z_j)\big)\mu_t^{(N)}\Big) = \sigma^2 \sum_{i=1}^N \Delta_{v_i}\mu_t^{(N)}, t > 0, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2dN}. \tag{9}$$

On en déduit l'évolution de la première marge $\mu_t^{(1)} = \mu_t^{(1)}(z_1)$ par intégration en $z_2, \dots, z_N$:

$$\frac{\partial \mu_t^{(1)}}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_{x_1}\mu_t^{(1)} + \nabla_{v_1}\cdot(G\mu_t^{(1)}) = \sigma^2 \Delta_{v_1}\mu_t^{(1)} - \nabla_{v_1}\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}} F(z_1 - z_2)\, \mu_t^{(2)}(z_1, z_2)\, dz_2\Big), \quad t > 0, z_1 \in \mathbb{R}^{2d} \tag{10}$$

où $\mu_t^{(2)}$ désigne la loi jointe de 2 particules distinctes (et quelconques par échangeabilité). Or les particules, interagissant, ne sont pas indépendantes en $t > 0$ même si elles le sont initialement : la loi $\mu_t^{(2)}$ d'une paire de particules n'est pas égale au produit tensoriel $\mu_t^{(1)} \otimes \mu_t^{(1)}$ des lois de chacune - sans quoi $\mu_t^{(1)}$ serait une solution de (7). L'équation (10) n'est donc pas non plus fermée en l'inconnue $\mu_t^{(1)}$. De même l'évolution de $\mu_t^{(2)}$ fait intervenir la loi $\mu_t^{(3)}$ des triplets de particules, et ainsi de suite pour la loi $\mu_t^{(k)}$ des k-uplets, jusqu'à l'équation d'évolution (9) de $\mu_t^{(N)}$ qui elle est bien fermée (hiérarchie BBGKY). Cependant l'action de la particule j sur la particule i étant $N^{-1}F(z_i - z_j)$, et donc petite pour N grand, on peut espérer que

1) les corrélations entre deux particules i et j en $t > 0$ soient petites si elles le sont initialement ;

2) $\mu_t^{(2)}$ se factorise presque (pour N grand) en $\mu_t^{(1)} \otimes \mu_t^{(1)}$ si initialement $\mu_0^{(2)}$ se factorise presque en $\mu_0^{(1)} \otimes \mu_0^{(1)}$;

3) revenant à (10), la loi $\mu_t^{(1)}$ soit presque une solution de (7).

La deuxième propriété est connue sous le nom de propriété de *propagation du chaos*, que l'on définit maintenant de manière abstraite (cf. [18], [24], [25], [27]).

Définition (M. Kac). *Si X est un espace polonais, une suite $(\mu^{(N)})_N$ de mesures de probabilité symétriques sur X^N, c'est-à-dire invariantes par permutation des variables, est dite μ-chaotique pour une mesure de probabilité μ sur X si, pour tout entier k et toutes fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ continues bornées sur X,*

$$\int_{X^N} \varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k)\, d\mu^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \to \int_X \varphi_1\, d\mu\ \dots \int_X \varphi_k\, d\mu \tag{11}$$

quand N tend vers l'infini, c'est-à-dire si k particules parmi N, de loi jointe $\mu^{(N)}$, sont asymptotiquement indépendantes et de même loi μ. On dit alors qu'une dynamique faisant évoluer une famille de lois jointes initiales $(\mu_0^{(N)})_N$ en les lois jointes $(\mu_t^{(N)})_N$ pour $t > 0$ propage le chaos si le caractère chaotique de la famille de lois jointes initiales $(\mu_0^{(N)})_N$ entraîne le caractère chaotique de la famille de lois jointes $(\mu_t^{(N)})_N$ à chaque instant $t > 0$.

Une notion plus forte de chaos, appelée chaos entropique, a été introduite dans [11] pour permettre de déduire des résultats de convergence entropique (en temps long) sur l'équation limite à partir de tels résultats sur le système de particules : elle consiste à considérer la loi jointe des N variables et non seulement les marges de taille k fixée.

On cherche ici à montrer la propagation du chaos pour le système de particules et la convergence de la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N$ et de sa moyenne $\mathbb{E}\, \hat{\mu}_t^N = \mu_t^{(1)}$ vers une solution de (7), autrement dit, que les N processus $(z_i(t))_{t \geq 0}$ ressemblent à l'instant t à N processus indépendants de loi f_t et évoluant dans le champ de force $F * f_t$.

De manière générale, à une mesure de probabilité $\mu^{(N)}$ sur X^N on peut associer la mesure empirique $\hat{\mu}^N = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ où $(x_1, \dots, x_N)$ est une variable aléatoire de loi $\mu^{(N)}$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2 ([27]). *Soit $(\mu^{(N)})_N$ une suite de mesures de probabilité symétriques sur X^N et μ une mesure de probabilité sur X. Alors $(\mu^{(N)})_N$ est μ-chaotique si et seulement si* (11) *est vraie seulement pour $k = 2$, et si et seulement si la suite des mesures empiriques $\hat{\mu}^N$ associées à $\mu^{(N)}$ converge en loi vers μ.*

La méthode classique (cf. [25], [27]) que l'on présente maintenant va donner des estimations précises de ces deux convergences, à savoir sur la caractère chaotique des lois jointes $\mu_t^{(N)}$ et la convergence de la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N$. Il s'agit d'une méthode de couplage, qui est une adaptation à ce cadre de la méthode de démonstration du théorème 1, et consiste à construire des processus artificiels, qui seront la limite des processus $(z_i(t))_{t \geq 0}$ pour N tendant vers l'infini.

On se place dans le cas où les mouvements browniens $(B_i(t))_{t \geq 0}$ et les données initiales $z_i(0)$ sont indépendantes et de même loi f_0 sur $\mathbb{R}^{2d}$, la méthode s'étendant au cas de données initiales dépendantes mais chaotiques. Pour $1 \leq i \leq N$ on considère le processus $(\bar{z}_i(t) = (\bar{x}_i(t), \bar{v}_i(t)))_{t \geq 0}$ solutions de l'équation

$$\begin{cases} d\bar{x}_i(t) &= \bar{v}_i(t)\, dt \\ d\bar{v}_i(t) &= G(\bar{z}_i(t))\, dt + (F * f_t)(\bar{z}_i(t))\, dt + \sqrt{2}\, \sigma\, dB_i(t); \end{cases} \tag{12}$$

initialement $\bar{z}_i(0) = z_i(0)$, $(B_i(t))_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien dirigeant l'évolution du processus z_i et f_t est la solution de (7) de donnée initiale f_0. La particule fictive $\bar{z}_i$ évolue donc dans le champ $F * f_t$ généré par la distribution f_t, quand la particule physique z_i évolue dans le champ $F * \hat{\mu}_t^N$ généré par $\hat{\mu}_t^N$, que l'on espère proche de f_t. Par la formule d'Itô, la loi de chaque $\bar{z}_i(t)$ est f_t, et on peut interpréter $\bar{z}_i$ comme une particule typique dans le système dont l'état est décrit par la distribution f_t.

Les N processus $\bar z_i$ sont de plus indépendants puisque les données initiales et mouvements browniens le sont.

Théorème 3 ([25], [27]). *Soit $z_i(0)$ pour $1 \le i \le N$ des données initiales indépendantes et de loi $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^{2d})$, et soit $(B_i(t))_{t\ge 0}$ pour $1 \le i \le N$ des mouvements browniens indépendants sur $\mathbb{R}^d$. Supposons que F et G soient lipschitziens sur $\mathbb{R}^{2d}$. Alors, avec les notations précédentes,*

1) le système de particules (4) *admet une unique solution globale $(z_i(t))_{1\le i\le N, t\ge 0}$ de donnée initiale $(z_i(0))_{1\le i\le N}$;*

2) l'équation (7) *admet une unique solution faible $(f_t)_{t\ge 0}$ de donnée initiale f_0 ;*

3) pour chaque i l'équation (12) *admet une unique solution $(z_i(t))_{t\ge 0}$ de donnée initiale $z_i(0)$;*

4) pour tout $T \ge 0$ il existe une constante C telle que (pour chaque i)

$$\sup_N \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}|z_i(t) - \bar z_i(t)|^2 \le \frac{C}{N}.$$

Ce résultat assure, avec des taux explicites,

1) la convergence faible de la loi $\mu_t^{(1)}$ d'une particule vers f_t : en effet $z_1(t)$ a pour loi $\mu_t^{(1)}$ par définition et $\bar z_1(t)$ a pour loi f_t par construction, donc pour tout $t \le T$ et tout N

$$W_2(\mu_t^{(1)}, f_t)^2 \le \mathbb{E}|z_1(t) - \bar z_1(t)|^2 \le \frac{C}{N}\,; \tag{13}$$

2) la propagation du chaos pour le système de particules : k étant un entier fixé - ou plus généralement un $o(N)$ - et pour la distance de Wasserstein définie sur $\mathbb{R}^{2dk}$,

$$W_2(\mu_t^{(k)}, f_t^{\otimes k})^2 \le \mathbb{E}\left|(z_1(t), \dots, z_k(t)) - (\bar z_1(t), \dots, \bar z_k(t))\right|^2 \le \frac{Ck}{N}\,;$$

3) la convergence de la mesure empirique $\hat\mu_t^N$ vers f_t : en effet, pour une fonction lipschitzienne φ sur $\mathbb{R}^{2d}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big|\int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi \hat\mu_t^N - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big|^2 &= \mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big|^2 \\ &\le 2\,\mathbb{E}\Big|\varphi(z_1(t)) - \varphi(\bar z_1(t))\Big|^2 + 2\,\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(\bar z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big|^2.\end{aligned} \tag{14}$$

Le premier terme est majoré par $2CN^{-1}\,[\varphi]_1^2$ sur $[0,T]$ d'après le théorème 3, et le deuxième terme est égal à $N^{-1}\,\mathrm{Var}[\varphi(\bar z_1(t)] \le N^{-1}[\varphi]_1^2 \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}|\bar z_1(t)|^2$ par application de la loi des grands nombres aux variables indépendantes $\varphi(\bar z_i(t))$.

Vérifions maintenant à l'aide du théorème 3 que le membre de droite de l'équation d'évolution (8) de la mesure empirique est en $O(1/\sqrt{N})$. Avec les notations précédentes, et en introduisant les quantités $\nabla_v\varphi(\bar z_i(s))$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \nabla_v\varphi(z_i(s))\,dB_i(s)\Big|^2 \quad &\le \quad 2\,\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \Big(\nabla_v\varphi(z_i(s)) - \nabla_v\varphi(\bar z_i(s))\Big)\,dB_i(s)\Big|^2 \\ &\quad +2\,\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \nabla_v\varphi(\bar z_i(s))\,dB_i(s)\Big|^2.\end{aligned} \tag{15}$$

Par symétrie du système et la relation générale

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^t X(s)\,dB(s)\Big|^2 = \int_0^t \mathbb{E}|X(s)|^2\,ds,$$

une conséquence de la formule d'Itô, le premier terme est majoré par

$$\begin{aligned}\frac{2}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big|\int_0^t \Big(\nabla_v\varphi(z_i(s)) - \nabla_v\varphi(\bar z_i(s))\Big)\,dB_i(s)\Big|^2 &= 2\int_0^t \mathbb{E}\left|\nabla_v\varphi(z_i(s)) - \nabla_v\varphi(\bar z_i(s))\right|^2 ds \\ &\leq 2[\varphi]_1^2\,T \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|z_1(s) - \bar z_1(s)|^2\end{aligned}$$

pour $t \leq T$ et φ lipschitzienne, ce dernier terme étant majoré par C/N d'après le théorème 1. D'autre part les variables aléatoires $\displaystyle\int_0^t \nabla_v\varphi(\bar z_i(s))\,dB_i(s)$ sont indépendantes, de moyenne nulle et de même loi, donc le deuxième terme de (15) est

$$\frac{2}{N}\,\mathbb{E}\Big|\int_0^t \nabla_v\varphi(\bar z_i(s))\,dB_i(s)\Big|^2 = \frac{2}{N}\int_0^t \mathbb{E}\Big|\nabla_v\varphi(\bar z_1(s))\Big|^2\,ds.$$

Or $|\nabla_v\varphi(z)| \leq |\nabla_v\varphi(0)| + [\varphi]_1|z|$ et $\mathbb{E}|\bar z_1(s)|^2 = \displaystyle\int |z|^2 f_s(z)\,dz$ est borné sur $[0,T]$, donc le deuxième terme de (15) est également majoré par C/N, ce qui conclut l'estimation.

Concluons cette section par l'idée de la *démonstration du théorème 3.* Ayant choisi (par couplage) pour l'évolution de $\bar z_i$ le même mouvement brownien que pour l'évolution de z_i, la formule d'Itô assure que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z_i - \bar z_i|^2 &= (G(z_i) - G(\bar z_i)\cdot(z_i - \bar z_i) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \big(F(z_i - z_j) - F * f_t(\bar z_i)\big)\cdot(z_i - \bar z_i) \\ &\leq [G]_1|z_i - \bar z_i|^2 + \Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \Big(F(z_i - z_j) - F(\bar z_i - \bar z_j)\Big)\Big|^2 \\ &\quad + \Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F(\bar z_i - \bar z_j) - F * f_t(\bar z_i)\Big|^2 + \frac{1}{2}|z_i - \bar z_i|^2\end{aligned}$$

où on a omis la dépendance en t. Notant $\alpha(t) = \mathbb{E}|z_i - \bar z_i|^2$, qui est indépendant de i, l'espérance du deuxième terme dans le membre de droite est majorée par

$$\frac{1}{N}[F]_1^2\sum_{j=1}^N \mathbb{E}\,|z_i - \bar z_i - (z_j - \bar z_j)|^2 \leq 4[F]_1^2\,\alpha(t).$$

Dans le troisième terme, les variables $F(\bar z_i - \bar z_j)$ sont, conditionnellement à $\bar z_i$, indépendantes et de moyenne $F * f_t(\bar z_i)$. Par suite l'espérance du troisième terme est majorée par

$$\frac{C}{N}\,\mathrm{Var}[F((\bar z_i - \bar z_j)] \leq \frac{C}{N}[F]_1^2\,\mathbb{E}\,|\bar z_i|^2 \leq \frac{C}{N}$$

sur $[0,T]$. La quantité $\alpha(t)$ vérifie donc une inéquation de la forme $\alpha'(t) \leq C(\alpha(t) + N^{-1})$ sur $[0,T]$, si bien que $\alpha(t) \leq CN^{-1}$ sur $[0,T]$ par intégration.

3. Quelques résultats récents

Des travaux récents ont permis d'améliorer ces résultats classiques dans trois directions :

1) dans l'extension à des modèles présentant des forces non lipschitziennes, telles que (3) ci-dessus ;

2) dans la recherche d'estimations plus précises de la convergence de la mesure empirique du système ;

3) dans la recherche d'estimations uniformes en temps quand cela est envisageable, en lien avec le comportement en temps grand des solutions.

3.1. **Extensions aux forces non lipschitziennes.** Les résultats précédents sur la convergence de systèmes de particules ont été prolongés par l'étude de nouveaux modèles présentant des forces toujours régulières mais non globalement lipschitziennes sur tout $\mathbb{R}^{2d}$: c'est le cas de forces d'interaction en vitesse qui à l'infini sont surlinéaires en la norme de la vitesse relative, comme ce peut être le cas dans le noyau de l'équation de Boltzmann.

1. Ainsi par exemple [2] en dimension un puis [22, 23], [14] en dimension quelconque étudient la convergence du système de particules

$$dv_i(t) = -\nabla V(v_i(t))\,dt - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \nabla W(v_i(t) - v_j(t))\,dt + \sqrt{2}\,dB_i(t), \qquad 1 \leq i \leq N$$

dans $\mathbb{R}^d$ vers l'équation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta_v f_t + \nabla_v \cdot ((\nabla_v V + \nabla_v W *_v f_t) f_t), \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^d. \tag{16}$$

Il s'agit d'une équation cinétique homogène en espace sur la distribution $f_t = f_t(v)$, qui en dimension un et pour $W(v) = |v|^3/3$ modélise l'évolution de milieux granulaires inélastiques (cf. [3]). L'hypothèse

$$|F(v) - F(w)| \leq [F]_1\, |v - w|, \quad v, w \in \mathbb{R}^d$$

de caractère lipschitz de $F = -\nabla W$ est remplacée par une hypothèse de convexité telle que

$$(F(v) - F(w)) \cdot (v - w) \leq A\, |v - w|^2, \quad v, w \in \mathbb{R}^d$$

qui est suffisante pour démontrer le théorème 3.

2. Revenons maintenant au système de particules (1) avec F donné par (3) par exemple. Dans le cas non diffusif où $\sigma = 0$, on a vu que le problème de la limite de champ moyen a été résolu dans [10] pour des solutions à support compact. Pour $\sigma \neq 0$ on ne peut pas se limiter à de telles solutions puisqu'on s'attend à ce que le support de la solution soit $\mathbb{R}^{2d}$ instantanément. Un argument de convexité dans l'espace des phases (x, v) semble également inenvisageable.

Une réponse est apportée dans [5] par l'utilisation de moments. Ainsi, par exemple pour des forces bornées en x mais surlinéaires en v telles que (3) :

Théorème 4 ([5]). *Avec les notations précédentes, supposons que*

$$(F(x,v) - F(x,w)) \cdot (v - w) \leq A\, |v - w|^2$$

$$|F(x,v) - F(y,v)| \leq L\, \min\{|x - y|, 1\}\, (1 + |v|^p)$$

pour un $p > 0$ et tous x, y, v, w, et de même pour G. Si le système (1) *et les équation* (7), (12) *ont des solutions globales sur* $[0, T]$ *telles que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|x|^2 + e^{a|v|^p}\right) f_t(x, v)\, dxdv$$

est fini pour un $a > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_N \sup_{0 \le t \le T} \mathbb{E}|z_i(t) - \bar{z}_i(t)|^2 \le \frac{C}{N^{e^{-Ct}}} \cdot$$

Si de plus il existe $p' > p$ tel que

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|x|^2 + e^{a|v|^{p'}}\right) f_t(x,v)\, dxdv$$

est fini, alors pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_N \sup_{0 \le t \le T} \mathbb{E}|z_i(t) - \bar{z}_i(t)|^2 \le \frac{C}{N^{1-\varepsilon}} \cdot$$

Il faut donc également montrer l'existence de telles solutions, ce qui est réalisé dans [5] pour (3) par exemple. Notons également que les moments exponentiels ne portent que sur la variable de vitesse, ce qui est raisonnable, et sont propagés en temps dans les exemples, l'hypothèse ne portant alors que sur la donnée initiale.

La *démonstration* consiste à tronquer les termes à estimer selon que $|v| \le r$ ou $|v| > r$. On majore les termes correspondant à $|v| \le r$ comme dans la démonstration du théorème 3, en gardant la dépendance en r des cœfficients, et les termes correspondant à $|v| > r$ à l'aide des moments.

Sous l'hypothèse de moment exponentiel d'ordre p on obtient une borne sur la quantité $\alpha(t) = \mathbb{E}|z_i - \bar{z}_i|^2$ de la forme

$$\alpha'(t) \le (1 + r^p)\, \alpha(t) + e^{-r^p} + \frac{1}{N},$$

que l'on intègre après avoir choisi $r^p = \ln(1/\alpha)$.

Sous l'hypothèse de moment exponentiel d'ordre $p' > p$ on obtient une borne de la forme

$$\alpha'(t) \le (1 + r^p)\, \alpha(t) + e^{-r^{p'}} + \frac{1}{N} \cdot$$

On choisit alors r tel que $e^{-r^{p'}} = \dfrac{1}{N}$, de sorte que

$$\alpha(t) \le C \exp\left((\ln N)^{p/p'} - \ln N\right) \le \frac{C(\varepsilon)}{N^{1-\varepsilon}}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

3.2. **Inégalités de déviation pour la mesure empirique.** L'estimation en moyenne (14) assure la convergence de la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N$ du système vers la solution f_t de l'équation (7). On peut également vouloir montrer que le comportement d'une seule réalisation du système de particules ne dévie presque pas du comportement donné par la solution f_t. En d'autres termes on peut vouloir borner une quantité telle que

$$\mathbb{P}\big[d(\hat{\mu}_t^N, f_t) \ge \varepsilon\big]$$

en fonction de N, où d contrôle l'écart entre deux mesures et ε rend compte de l'erreur autorisée.

C'est particulièrement important quand le système (1) est utilisé dans une méthode numérique d'approximation de solutions de (7) (cf. [28] par exemple). Il ne s'agit en rien d'un retour vers le modèle (1) : en effet, si le système physique original est constitué d'un nombre de particules de l'ordre de 10^{10} par exemple, l'espoir de la méthode est de pouvoir approcher de manière satisfaisante l'état du système donné par la solution f_t, et même l'état du système physique des 10^{10} particules, par l'introduction d'un nombre N limité de particules fictives $z_i(t)$, de l'ordre de 10^5 par exemple.

Bien entendu, par l'inégalité de Markov, la borne (14) assure que

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi \hat{\mu}_t^N - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big| \geq \varepsilon\Big] \leq \frac{C}{N\,\varepsilon^2}$$

pour tous N, ε et toute observable φ lipschitzienne. Voyons comment obtenir une meilleure borne.

Le théorème de grandes déviations de Sanov assure que pour des variables X_i indépendantes et de loi μ sur un espace X, leur mesure empirique $\hat{\mu}^N$ vérifie

$$\limsup \frac{1}{N} \ln \mathbb{P}\big[\hat{\mu}^N \in A\big] \leq -\inf\{H(\nu|\mu); \nu \in \bar{A}\}$$

où A est un borélien de l'ensemble des mesures, et $\bar{A}$ sa fermeture pour la topologie étroite ; de plus $H(\nu|\mu)$ est l'entropie relative de ν par rapport à μ, définie par

$$H(\nu|\mu) = \int \frac{d\nu}{d\mu} \ln \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$$

si ν est absolument continue par rapport à μ, et par $+\infty$ sinon.

Ainsi, en supposant que d métrise la convergence étroite,

$$\limsup \frac{1}{N} \ln \mathbb{P}\big[d(\hat{\mu}^N, \mu) \geq \varepsilon\big] \leq -\inf\big\{H(\nu|\mu); d(\nu,\mu) \geq \varepsilon\big\}.$$

Nous avons vu que la distance de Wasserstein W_1 était adaptée à ce problème de limite de champ moyen. Supposant qu'elle métrise la convergence étroite, ce qui n'est pas exactement le cas sur un espace non borné tel que $\mathbb{R}^{2d}$, et supposant que la mesure μ satisfasse l'inégalité de transport (ou de Talagrand)

$$H(\nu|\mu) \geq c\, W_1(\nu,\mu)^2 \tag{17}$$

pour toute mesure ν (cf. [30, Chapitre 22]), alors on peut espérer la borne

$$\limsup \frac{1}{N} \ln \mathbb{P}\big[W_1(\hat{\mu}^N, \mu) \geq \varepsilon\big] \leq -c\,\varepsilon^2. \tag{18}$$

En fait, pour des mesures sur $\mathbb{R}^{2d}$, l'adhérence de l'ensemble $\{\nu \in P_1(\mathbb{R}^{2d}); W_1(\nu,\mu) \geq \varepsilon\}$ pour la topologie étroite contient μ, donnant une borne triviale sur la probabilité de déviation. D'autre part une borne telle que (18) est seulement asymptotique en N, et non explicite comme on le souhaiterait.

Ces deux difficultées peuvent être surmontées de la manière suivante.

1. Dans [14], [22, 23] pour des modèles homogènes en espace tels que (16), puis dans [7] pour des modèles inhomogènes tels que (7), et sous différentes hypothèses, on montre que la loi $\mu_t^{(N)}$ du système à l'instant t vérifie une inégalité de transport (17), pour toute mesure ν sur $\mathbb{R}^{2dN}$ (ou $\mathbb{R}^{dN}$ dans le cas homogène). La constante c peut dépendre de t (mais ni de N ni de ν). Alors un résultat de S. Bobkov et F. Götze, fondé sur la forme duale de Kantorovich-Rubinstein et sur la forme duale de l'entropie, assure que

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, \mu_t^{(1)} \geq \varepsilon\Big] \leq e^{-c\,N\,\varepsilon^2}$$

pour tous $N \geq 1, \varepsilon > 0$ et toute fonction φ 1-Lipschitz sur $\mathbb{R}^{2d}$ (cf. [30, Chapitre 22] par exemple). De plus

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big| &\leq \Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, \mu_t^{(1)}\Big| + W_1(\mu_t^{(1)}, f_t) \\
&\leq \Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, \mu_t^{(1)}\Big| + \sqrt{\frac{C}{N}}
\end{aligned}$$

par (6), (13) et la majoration $W_1 \leq W_2$. On en déduit une borne d'erreur sur chaque observable telle que

$$\mathbb{P}\left[\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}}\varphi\, f_t\Big| \geq \sqrt{\frac{C}{N}} + \varepsilon\right] \leq 2\, e^{-cN\varepsilon^2} \tag{19}$$

pour tous N, ε et toute fonction φ 1-Lipschitz sur $\mathbb{R}^{2d}$.

En particulier

$$\mathbb{P}\left[\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}}\varphi\, f_t\Big| \geq \varepsilon\right] \leq e^{-cN\varepsilon^2}$$

si $N \geq N_0\,\varepsilon^{-2}$.

2. De telles estimations peuvent être renforcées en considérant des déviations uniformes sur les observables lipschitziennes, sous la forme

$$\mathbb{P}\left[\sup_{[\varphi]_1}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(z_i(t)) - \int_{\mathbb{R}^{2d}}\varphi\, f_t\Big| \geq \varepsilon\right] \leq e^{-cN\varepsilon^2},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\Big[W_1(\hat{\mu}_t^N, f_t) \geq \varepsilon\Big] \leq e^{-cN\varepsilon^2}, \tag{20}$$

ou même

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} W_1(\hat{\mu}_t^N, f_t) \geq r\Big] \leq e^{-cN\varepsilon^2},$$

ce qui assure que la probabilité d'observer une déviation significative sur tout l'intervalle $[0,T]$ est petite. Pour cela on doit supposer que $N \geq N_0\,\varepsilon^{-2d-2}$, cf. [8].

Supposons de plus que la solution f_t ait une densité lipschitzienne, par exemple pour $t > 0$ après régularisation due à l'équation. On peut alors approcher sa densité non plus faiblement par la mesure empirique, mais fortement par une régularisation de cette mesure empirique, de la forme

$$\hat{f}_{t,\alpha}^N(z) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\alpha^{2d}}\,\xi\Big(\frac{z - z_i(t)}{\alpha}\Big)$$

où ξ est un noyau de régularisation. On peut alors montrer l'existence de constantes $\alpha, CetN_0$ telles que pour tous $\varepsilon > 0$ et $N \geq N_0\,\varepsilon^{-2d-2}$

$$\mathbb{P}\Big[\|\hat{f}_{t,\alpha\varepsilon}^N - f_t\|_{L^\infty} \geq \varepsilon\Big] \leq e^{-cN\varepsilon^{4d+4}}. \tag{21}$$

3. Les bornes présentées jusqu'à présent concernent la déviation de la mesure empirique à l'instant t autour de la solution f_t de l'EDP, ce qui ne donne du système que des informations en un seul instant. Il peut être intéressant de vouloir considérer des propriétés du système dépendant de plusieurs instants, voir des processus sur tout l'intervalle $[0,T]$.

Soit par exemple $0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T$ et pour $1 \leq j \leq n$ soit A_j un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{2d}$. Peut-on donner une borne de déviation de la probabilité qu'une particule du système soit dans l'ensemble A_j à l'instant t_j pour chaque j ?

Pour cela on doit considérer la déviation de la mesure empirique

$$\hat{\mu}_{[0,T]}^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{(z_i(t))_{t\in[0,T]}}$$

des processus $(z_i(t))_{t\in[0,T]}$ autour de la loi $f_{[0,T]}$ d'une particule typique $(\bar z(t))_{t\in[0,T]}$ évoluant dans le système décrit pas $(f_t)_{t\in[0,T]}$, c'est-à-dire selon

$$d\bar z(t) = G(z(t))\,dt + F * f_t(z(t))\,dt + \sqrt{2}\,\sigma\,dB(t).$$

C'est ce qui est réalisé dans [4].

4. Bornes uniformes en temps et comportement en temps grand

Sous des hypothèses de convexité sur les potentiels V et W, on peut montrer que la solution de l'équation homogène en espace (16) converge vers un unique état d'équilibre, à vitesse polynomiale ou exponentielle (cf. [13], [14], [22], [23]). Dans ce cadre on peut espérer des constantes uniformes en t dans les bornes (14)-(19)-(20)-(21), ce qui a été obtenu dans [8], [14], [22], [23]. De telles bornes sont intéressantes dans une optique numérique puisqu'elles assurent que les constantes ne se détériorent pas trop en temps ; elles sont également intéressantes si l'on veut déduire le comportement en temps grand de la solution de l'EDP du comportement en temps grand du système, comme dans [11] par exemple.

De tels résultats de convergence vers l'équilibre (par un argument de contraction en distance W_2) et de bornes uniformes en temps ont été obtenus dans [7] pour les solutions de l'équation inhomogène (7) : pour cela on munit $\mathbb{R}^{2d}$ d'une métrique $\|(x,v)\| = [a|x|^2 + 2x\cdot v + b|v|^2]^{1/2}$ adaptée aux cœfficients de l'équation.

Références

[1] M. Agueh, R. Illner et A. Richardson. Analysis and simulations of a refined flocking and swarming model of Cucker-Smale type. *Kinetic Rel. Models 4*, 1 (2011), 1–16.

[2] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay et P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos. *Stoch. Proc. Appl. 75*, 2 (1998), 173–201.

[3] D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo et M. Pulvirenti. A non-Maxwellian steady distribution for one-dimensional granular media. *J. Statist. Phys. 91*, 5-6 (1998), 979–990.

[4] F. Bolley. Quantitative concentration inequalities on sample path space for mean field interaction. *Esaim Prob. Stat. 14* (2010), 192–209.

[5] F. Bolley, J. A. Cañizo et J. A. Carrillo. Stochastic Mean-Field Limit : Non-Lipschitz Forces and Swarming. A paraître dans *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* (2011).

[6] F. Bolley, J. A. Cañizo et J. A. Carrillo. Mean-field limit for the stochastic Vicsek model. Prépublication (2011).

[7] F. Bolley, A. Guillin et F. Malrieu. Trend to equilibrium and particle approximation for a weakly selfconsistent Vlasov-Fokker-Planck equation. *Math. Mod. Num. Anal 44*, 5 (2010), 867–884.

[8] F. Bolley, A. Guillin et C. Villani. Quantitative concentration inequalities for empirical measures on non-compact spaces. *Prob. Theor. Rel. Fields 137*, 3-4 (2007), 541–593.

[9] W. Braun et K. Hepp. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles. *Commun. Math. Phys. 56* (1977), 101–113.

[10] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo et J. Rosado. A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 21* (2011), 515–539.

[11] E. A. Carlen, M. C. Carvalho, M. Loss, J. Le Roux et C. Villani. Entropy and chaos in the Kac model. *Kinetic Rel. Models 3*, 1 (2010), 85–122.

[12] J. A. Carrillo, M. Fornasier, G. Toscani et F. Vecil. Particle, Kinetic, and Hydrodynamic Models of Swarming. In Naldi, G., Pareschi, L., Toscani, G. (eds.) Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences, Series : Modelling and Simulation in Science and Technology, Birkhauser, (2010), 297–336.

[13] J. A. Carrillo, R. J. McCann et C. Villani. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Mat. Ibero. 19*, 3 (2003), 971–1018.

[14] P. Cattiaux, A. Guillin et F. Malrieu. Probabilistic approach for granular media equations in the non uniformly case. *Prob. Theor. Rel. Fields 140*, 1-2 (2008), 19–40.

[15] F. Cucker et S. Smale. Emergent behavior in flocks. *IEEE Trans. Automat. Control 52* (2007), 852–862.

[16] R. Dobrushin. Vlasov equations. *Funct. Anal. Appl.13* (1979), 115–123.

[17] M. R. D'Orsogna, Y. L. Chuang, A. L. Bertozzi et L. Chayes. Self-propelled particles with soft-core interactions : patterns, stability, and collapse. *Phys. Rev. Lett.* 96, 2006.

[18] F. Golse The mean-field limit for the dynamics of large particle systems, *Journées équations aux dérivées partielles, Forges-les-Eaux* (2003), 1–47.

[19] F. Golse. The mean-field limit for a regularized Vlasov-Maxwell dynamics. Prépublication (2010).

[20] M. Hauray et P.-E. Jabin. N particles approximation of the Vlasov equations with singular potential. *Arch. Rach. Mech. Anal. 183*, 3 (2007), 489–524.

[21] G. Loeper. Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density. *J. Math. Pures Appl. 9*, 86 (2006), 68–79.

[22] F. Malrieu. Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's. *Stoch. Proc. Appl. 95*, 1 (2001), 109–132.

[23] F. Malrieu. Convergence to equilibrium for granular media equations and their Euler schemes. *Ann. Appl. Probab. 13*, 2 (2003), 540–560.

[24] H. P. McKean. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. In *Lecture Series in Differential Equations, Session 7*, Catholic Univ., 1967.

[25] S. Méléard. Asymptotic behaviour of some interacting particle systems ; McKean-Vlasov and Boltzmann models. Lecture Notes in Math. 1627, Springer, Berlin, 1996.

[26] H. Neunzert. An introduction to the nonlinear Boltzmann-Vlasov equation. Lecture Notes in Math. 1048. Springer, Berlin, 1984.

[27] A.-S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. Lecture Notes in Math. 1464, Springer, Berlin, 1991.

[28] D. Talay. Probabilistic numerical methods for partial differential equations : elements of analysis. Lecture Notes in Math. 1627, Springer, Berlin, 1996.

[29] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen et O. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett. 75*, (1995), 1226–1229.

[30] C. Villani. *Optimal transport, old and new.* Grundlehren der math. Wiss. 338, Springer, Berlin, 2009.

[31] C. Yates, R. Erban, C. Escudero, L. Couzin, J. Buhl, L. Kevrekidis, P. Maini et D. Sumpter. Inherent noise can facilitate coherence in collective swarm motion. *Proc. Nat. Acad. Sci. 106*, 14 (2009), 5464–5469.