Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2009-2010

Christophe Pallard

Un modèle jouet pour le transport résonnant

Séminaire É. D. P. (2009-2010), Exposé n° XVI, 9 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A16_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2009-2010
Exposé n^{o} XVI, 1-9

UN MODÈLE JOUET POUR LE TRANSPORT RÉSONNANT

CHRISTOPHE PALLARD

Résumé. On introduit et étudie un modèle jouet inspiré d'une situation de couplage résonnant entre une équation d'ondes et une équation cinétique. Il s'agit d'un travail en collaboration avec P. Gérard [2].

1. Le système de Vlasov-Maxwell relativiste

1.1. **Un problème de physique des plasmas.** Notre point de départ est l'étude d'un nuage de particules chargées interagissant par le seul biais du champ électromagnétique. Les collisions entre particules sont négligées et pour simplifier, les particules sont supposées toutes identiques. L'état du système est décrit par une fonction de distribution $f \equiv f(t,x,\xi)$ donnant à l'instant t une densité de probabilité sur l'espace des phases $\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_\xi$ où $x \in \mathbb{R}^3$ désigne la position et $\xi \in \mathbb{R}^3$ l'impulsion d'une particule. L'équation de Vlasov, qui gouverne la dynamique du nuage, s'écrit alors :

$$\partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + K \cdot \nabla_\xi f = 0\,, \tag{1}$$

où $v(\xi)$ est la vitesse d'une particule d'impulsion ξ. La force de Lorentz K qui s'applique à une particule a pour expression :

$$K(t,x,\xi) = E(t,x) + v(\xi) \times B(t,x)\,, \tag{2}$$

où (E,B) est le champ électromagnétique dont l'évolution au cours du temps est dirigée par les équations de Maxwell :

$$\partial_t E - \nabla_x \times B = -j\,, \qquad \nabla_x \cdot E = \rho\,, \tag{3}$$

$$\partial_t B + \nabla_x \times E = 0\,, \qquad \nabla_x \cdot B = 0\,. \tag{4}$$

Les termes ρ et j s'expriment en fonction de f de la façon suivante :

$$\rho(t,x) = \int f(t,x,\xi)d\xi\,, \qquad j(t,x) = \int f(t,x,\xi)v(\xi)d\xi\,. \tag{5}$$

Le système de Vlasov-Maxwell relativiste (VMR) est constitué des équations (1-5) avec :

$$v(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\,.$$

On peut aussi considérer la version classique du système en choisissant $v(\xi) = \xi$. Noter enfin que toutes les constantes physiques ont ici été prises égales à l'unité.

1.2. **Le problème de Cauchy.** On se place dans le cadre suivant. Soit :

$$(f_0, E_0, B_0) \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^6) \times \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \tag{6}$$

une donnée initiale vérifiant les conditions de compatibilité :

$$\nabla_x \cdot E_0 = \int f_0(x, \xi) d\xi \,, \qquad \nabla_x \cdot B_0 = 0 \,. \tag{7}$$

Le système (VMR) admet une solution classique sur un intervalle de temps $[0, T^*)$ maximal :

$$(f, E, B) \in \mathcal{C}^1([0, T^*) \times \mathbb{R}^6) \times \mathcal{C}^1([0, T^*) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^1([0, T^*) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \,. \tag{8}$$

La question qui nous intéresse est celle de savoir si T^* est infini ou non. On peut répondre par l'affirmative dans un certain nombre de cas [3, 4, 5, 7, 8] :

- Données petites.
- Perturbation de certaines solutions globales.
- Dimension petite.
- Symétries supplémentaires.

Toutefois, le cas général reste ouvert. Dans ce contexte, le résultat le plus significatif reste encore à ce jour le théorème suivant.

Théorème 1. [6] *Pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ on définit :*

$$R(g) = \sup\{|\xi| \;:\; \exists x \in \mathbb{R}^6 \quad g(x, \xi) \neq 0\} \,.$$

Soit une donnée initiale (f_0, E_0, B_0) et la solution f correspondante, comme en (6-8). Si le temps maximal d'existence T^* est fini alors la solution doit nécessairement vérifier :

$$\limsup_{t \to T^*} R(f(t, \cdot)) = +\infty \,. \tag{9}$$

Ce critère trouve une interprétation plaisante puisque la condition (9) signifie que des particules doivent atteindre en temps fini une vitesse $v(\xi)$ arbitrairement proche de 1 — ici la vitesse de la lumière. En d'autres termes, des singularités ne peuvent se former tant que la séparation entre les vitesses apparaissant dans l'opérateur de transport d'une part, et la vitesse de propagation du champ électromagnétique d'autre part, est assurée.

Le principe de la démonstration est le suivant. La construction de solutions $\mathcal{C}^1$ amène naturellement à rechercher des estimations lipschitziennes sur le terme de force K dans l'équation de transport. Le champ électromagnétique vérifiant les équations d'ondes :

$$(\partial_t^2 - \Delta_x) E = -\partial_t j - \nabla_x \rho \,, \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x) B = \nabla \times j \,,$$

on est donc conduit à estimer en norme L^∞ les dérivées de quantités du type :

$$Y_3 *_{t,x} (\mathbf{1}_{t>0} \nabla_{t,x} \rho) \,, \qquad Y_3 *_{t,x} (\mathbf{1}_{t>0} \nabla_{t,x} j) \,,$$

où l'on note Y_3 la solution élémentaire des ondes en dimension 3 d'espace. Si ρ et j sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ quelconques, ceci nécessite des informations sur leurs dérivées secondes. Mais ce sont ici des moments de f, qui vérifie (1). La séparation des vitesses ondes/transport — situation que l'on qualifiera de non-résonnante — permet à ce stade de récupérer une dérivée en utilisant l'équation de Vlasov. On va étudier dans la section suivante un système présentant une structure tout à fait analogue en dimension 1 d'espace.

2. Couplage onde-transport 1D non-résonnant

2.1. **Un modèle 1D.** Considérons le système suivant :

$$\partial_t f + v(\xi)\partial_x f + \partial_x U \partial_\xi f = 0\,, \tag{10}$$

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U = \rho\,, \tag{11}$$

d'inconnues $f \equiv f(t,x,\xi)$ et $U \equiv U(t,x)$ avec $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On note à nouveau :

$$\rho(t,x) = \int f(t,x,\xi)d\xi\,, \qquad v(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\,. \tag{12}$$

Les données initiales sont ici :

$$f(0,x,v) = f_0(x,v)\,, \qquad (U,\partial_t U)(0,x) = (U_0,U_1)(x)\,. \tag{13}$$

On dispose alors du résultat d'existence globale suivant.

Théorème 2. *Soit* $(f_0,U_0,U_1) \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^2)\times\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})\times\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. *Il existe une unique solution* $(f,U) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)\times\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ *du problème (10-13).*

La démonstration de ce résultat est basée sur l'obtention d'estimées a-priori que l'on va maintenant détailler. On commence par établir une majoration sur la taille du support de f en la variable ξ. Ceci assure la non-résonnance, au sens où les vitesses apparaissant dans l'opérateur de transport sont distinctes des vitesses caractéristiques de l'opérateur d'ondes. Cette propriété permet ensuite le contrôle des dérivées de f.

2.2. **Estimations sur R.** On a tout d'abord :

$$\|f(t,\cdot,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{14}$$

Les équations des courbes caractéristiques de l'équation de transport (10) sont :

$$X'(t) = v(\Xi(t))\,, \qquad \Xi'(t) = \partial_x U(t,X(t))\,.$$

En notant $R(t) = R(f(t,\cdot,\cdot))$ comme précédemment, il vient donc :

$$R(t) \le R(0) + \int_0^t \|\partial_x U(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}ds\,.$$

La solution fondamentale de l'équation des ondes unidimensionnelles à support dans le futur étant $Y_1(t,x) = 2^{-1}\mathbf{1}_{|x|\le t}$ on dispose d'une estimation directe :

$$\|\partial_x U(t,\cdot)\|_\infty \le C(t)\left(1 + \|\rho\|_{L^\infty([0,t]\times\mathbb{R})}\right)\,.$$

En utilisant (14) et la définition de $R(t)$:

$$\|\rho(t,\cdot)\|_\infty \le 2\|f_0\|_\infty R(t)\,. \tag{15}$$

On obtient par conséquent :

$$R(t) \le C(t)\left(1 + \int_0^t R(s)ds\right)$$

et le lemme de Gronwall permet de conclure. On observera que cette partie repose sur l'aspect unidimensionnel du problème considéré, exploitant à la fois la régularité de Y_1 et la possibilité d'obtenir l'estimation (15) sur ρ.

2.3. **Non-résonnance et estimation Lipschitz sur** U**.** D'après ce qui précède, et compte-tenu de l'expression de v, pour tout $T > 0$ il existe $R_T > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0,T] \quad \forall (x,\xi) \in \operatorname{supp} f(t,\cdot,\cdot) \qquad |v(\xi)| \leq v(R_T) < 1\,. \tag{16}$$

On observe par ailleurs que pour tout $v \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ on a :

$$\partial_x^2 Y_1 = (\partial_t + v\partial_x)\left(\frac{x}{vx-t}\,\partial_x Y_1\right) + \frac{1}{v^2-1}\,\delta_{(t,x)=(0,0)}\,. \tag{17}$$

Compte-tenu des hypothèses sur les données initiales U_0 et U_1, la contribution $\partial_x U_{hom}$ de ces dernières à $\partial_x U$ se majore aisément, de sorte que $\|\partial_x^2 U_{hom}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})} \leq C$. Déterminons maintenant l'expression de la contribution du terme source ρ dans $\partial_x U$:

$$\partial_x^2 U_{inh}(t,x) = \int \partial_x^2 Y_1 *_{t,x} (f(\cdot,\cdot,\xi)\mathbf{1}_{t>0})(t,x)d\xi\,.$$

Appliquons (17) avec $v = v(\xi)$ ce qui est licite d'après la propriété de non-résonnance (16) :

$$\partial_x^2 U_{inh} = \int \left(\frac{x}{v(\xi)x-t}\partial_x Y_1\right) *_{t,x} (\partial_t + v(\xi)\partial_x)(f\mathbf{1}_{t>0})d\xi + \int \frac{f(t,x,\xi)}{v^2(\xi)-1}d\xi\,.$$

L'équation de transport donne $(\partial_t + v(\xi)\partial_x)(f\mathbf{1}_{t>0}) = -\partial_\xi(\partial_x U f)\mathbf{1}_{t>0} + f_0\delta_{t=0}$. Il ne reste alors plus qu'à intégrer par parties en la variable ξ pour estimer le premier terme et par suite majorer la quantité $\|\partial_x^2 U_{inh}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})}$.

2.4. **Retour au cas 3D.** L'analyse élémentaire de la section 2.2 n'est évidemment pas valable pour le système (VMR) en dimension 3 ; à ce jour, l'éventualité d'une explosion de R en temps fini n'a toujours pas été écartée. L'argument de la section 2.3 en revanche se prolonge naturellement au cas de la solution élémentaire Y_3. Soit en effet $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme < 1. Pour tous $i, j \in \{0,\ldots,3\}$, il existe des coefficients a_i^k et b_{ij}^k homogènes de degré k tels que :

$$\begin{aligned}
\partial_i Y_3 &= (\partial_t + v\cdot\nabla_x)(a_i^0 Y_3) + a_i^{-1} Y_3\,,\\
\partial_i\partial_j Y_3 &= (\partial_t + v\cdot\nabla_x)^2(b_{ij}^0 Y_3) + (\partial_t + v\cdot\nabla_x)(b_{ij}^{-1}Y_3) + b_{ij}^{-2}Y_3\,,
\end{aligned}$$

en notant ∂_0 et ∂_i les dérivées ∂_t et ∂_{x_i} respectivement. Deux jeux d'égalités sont désormais nécessaires puisque les dérivées de Y_3 ne sont plus des mesures. On renvoie au lemme 3.1 de [1] pour plus de détails et notamment la définition rigoureuse des $b_{ij}^{-2}Y_3$.

3. Résonnance : modèle jouet

3.1. **Une question.** L'argument de la section précédente permet plus généralement de montrer l'existence globale de solutions classiques au système (10-13) dans le cas de profils de vitesse $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant la condition suivante :

$$v(\mathbb{R}) \cap \{-1,+1\} = \emptyset\,. \tag{18}$$

En effet, la condition de non-résonnance (16) est alors satisfaite, ce qui permet de procéder à l'identique. En revanche, lorsque (18) n'est pas vraie, l'argument précédent tombe en défaut. Il est alors naturel de se demander si des solutions explosives peuvent exister. C'est un problème ouvert. Formulons un problème analogue plus simple encore :

$$(S) \qquad \begin{cases} \partial_t f + v(\xi)\partial_x f + U(t,x)\partial_\xi f = 0\,, \\ \partial_t U = \rho\,, \\ f(0,x,v) = f_0(x,v)\,, \quad U(0,x) = 0\,. \end{cases}$$

Ici on supposera que $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une fonction prenant la valeur 0 — mais non identiquement nulle ! Dans ce système la résonnance apparait lorsque v s'annule. Une question ouverte est alors la suivante :

Question. Trouver une donnée initiale $f_0 \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^2)$ pour laquelle :

(1) Il existe $(x,\xi) \in \mathbb{R} \times \operatorname{supp} v$ tel que $f_0(x,\xi) \neq 0$ et $v(\xi) = 0$.

(2) On sait déterminer si la quantité $\|\partial_x f(t,\cdot)\|_\infty$ explose en temps fini ou non.

Regardons les équations satisfaites par les dérivées de f :

$$(\partial_t + v(\xi)\partial_x + U(t,x)\partial_\xi)\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_\xi f\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & \partial_x U(t,x)\\ v'(\xi) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_\xi f\end{pmatrix}\,. \tag{19}$$

Le terme quadratique $\partial_x U(t,x)\partial_\xi f(t,x,\xi)$ est certes susceptible de provoquer une explosion, mais la situation est obscurcie à la fois par le caractère non local de U vis-à-vis de la variable ξ, et la géométrie a priori inconnue des caractéristiques. Notons aussi que l'allure de v' au voisinage des zéros de v peut jouer un rôle d'amortissement !

3.2. **Modèle jouet.** Ne sachant répondre à la question posée, nous nous proposons de modifier (19). Puisqu'il s'agit manifestement de la valeur critique, nous commencerons par imposer la vitesse de résonnance 0 dans le membre gauche. Nous substituons par ailleurs $\partial_x\rho$ à $\partial_x U$ dans le membre droit, pour obtenir :

$$(\partial_t + U(t,x)\partial_\xi)\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_\xi f\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & \partial_x \rho(t,x)\\ v'(\xi) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_\xi f\end{pmatrix}\,. \tag{20}$$

Nous remplaçons ensuite le terme de force auto-consistant par un terme fixé $E(t)$ pour obtenir un système dont nous appellerons les inconnues u_1 et u_2 :

$$(\partial_t + E(t)\partial_\xi)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & \int u_1 d\xi\\ v'(\xi) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\,. \tag{21}$$

Pour finir, nous remplaçons ce système par un problème scalaire d'inconnue u :

$$\partial_t u(t,\xi) + E(t)\partial_\xi u(t,\xi) = \phi(\xi)u(t,\xi)\int u(t,\xi)d\xi\,, \tag{22}$$

où $E \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ sont fixés. Nous allons maintenant étudier quelques propriétés du modèle jouet (22). On s'intéresse ici au problème de Cauchy pour des données initiales $u_0 \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. Enonçons d'abord un résultat d'existence locale, qui s'obtient facilement par un argument de point fixe.

Proposition 1. *Soit une donnée initiale $u_0 \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. Il existe $T > 0$ et une unique solution $u \in \mathcal{C}^1[0, T) \times \mathbb{R})$ de (22) telle que $u(0, \cdot) = u_0$. Notons T^* le temps maximal d'existence d'une telle solution. Si $T^* < +\infty$ alors :*

$$\limsup_{t \to T^*} |U(t)| = +\infty\,. \tag{23}$$

On dispose par ailleurs de la minoration suivante :

$$T^* \geq T_1 = \frac{1}{\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}}\,. \tag{24}$$

3.3. **Cas $E \equiv 0$.** Il est instructif de considérer dans un premier temps le problème de Cauchy pour l'équation (22) lorsque E est identiquement nul :

$$\partial_t u(t,\xi) + \phi(\xi) u(t,\xi) \int u(t,\xi) d\xi = 0\,, \qquad u(0,\xi) = u_0(\xi)\,. \tag{25}$$

L'étude de (25) se ramène simplement à celle d'une équation différentielle dont le coefficient dépend de la donnée initiale u_0 et de la fonction de troncature ϕ.

Proposition 2. *Supposons $u_0 \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ et posons :*

$$f(z) = \int e^{z\phi(\xi)} u_0(\xi) d\xi\,, \tag{26}$$

pour tout réel z. Alors $V(t) = \int_0^t U(s) ds$ vérifie l'équation différentielle $V'(t) = f(V(t))$.

Démonstration. Donnons deux preuves de la proposition.

- Notons d'abord que $u(t,\xi)$ peut s'écrire :

$$u(t,\xi) = u_0(\xi) \exp(\phi(\xi) V(t))\,, \tag{27}$$

d'où $U(t) = \int u_0(\xi) \exp(\phi(\xi) V(t)) d\xi = f(V(t))$ et donc $V'(t) = f(V(t))$.

- Une autre démonstration consiste à regarder la quantité :

$$I(t,y) = \int e^{y\phi(\xi)} u(t,\xi) d\xi\,.$$

Manifestement $I(0,y) = f(y)$ et $I(t,0) = U(t)$. Nous trouvons par ailleurs que

$$\partial_t I(t,y) = U(t) \int \phi(\xi) e^{y\phi(\xi)} u(t,\xi) d\xi = I(t,0) \partial_y I(t,y)\,.$$

Pour obtenir à nouveau $I(t,y) = I\left(0, y + \int_0^t I(s,0) ds\right)$. □

On constate que le comportement de la solution $u(t,\xi)$ est entièrement décrit par la fonction f. En effet, un corollaire immédiat de la proposition est la monotonie de la fonction V, dont le sens de variation est donné par le signe de $f(0) = U(0)$:

- Si $U(0) = 0$ alors $U(t) = 0$ et $V(t) = 0$ sont constantes ainsi que $t \mapsto u(t,\xi)$.
- Si $U(0) > 0$ alors $t \mapsto V(t)$ est croissante.
- Si $U(0) < 0$ alors $t \mapsto V(t)$ est décroissante.

Dans l'hypothèse où par exemple $f(0) > 0$, on peut distinguer deux cas suivant la valeur du plus petit zéro positif de f :

$$\omega = \inf \{ z > 0 \; : \; f(z) = 0 \} .$$

- Si $\omega < +\infty$ alors $T^* = +\infty$ et $V(t)$ croit vers la limite ω. On en déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} u(t, \xi) = u_0(\xi) \exp(\omega \phi(\xi)) .$$

- Si $\omega = +\infty$ alors le temps d'existence maximal est donné par :

$$T^* = \int_0^\infty \frac{dw}{f(w)} .$$

Cette intégrale peut-être finie ou infinie. Donnons un exemple de comportement possible dans le cas $T^* < +\infty$.

Proposition 3. *Supposons* $\phi_{max} := \max \phi > 0$. *Soit une donnée* $u_0 \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ *telle que les inégalités suivantes soient vérifiées :*

$$\int u_0(\xi) d\xi > 0 , \qquad a := \int_{\{\xi \, : \, \phi(\xi) = \phi_{max}\}} u_0(\xi) d\xi > 0 .$$

Alors $T^* < +\infty$ *et pour tout réel* ξ *tel que* $\phi(\xi) u_0(\xi) \neq 0$ *il vient :*

$$u(t, \xi) \sim u_0(\xi) \left(\frac{1}{a \phi_{max} (T^* - t)} \right)^{\phi_{max}^{-1} \phi(\xi)} ,$$

quand $t \to T^*$.

Démonstration. Les hypothèses garantissent d'une part que $f(0) > 0$ et d'autre part que $f(z) \sim a \phi_{max} e^{z \phi_{max}}$ quand $z \to +\infty$. Ceci assure $T^* < +\infty$ d'après la discussion précédente et permet en outre d'obtenir l'équivalent souhaité. □

3.4. **Cas E non nul.** Enonçons maintenant quelques propriétés dans le cas où le terme E est non identiquement nul. Notons $\xi(t, 0, \zeta)$ les courbes caractéristiques de l'équation :

$$\xi(t, 0, \zeta) = \zeta + \int_0^t E(s) ds .$$

Commençons par une condition garantissant l'existence globale d'une solution. Il suffit pour cela de s'assurer qu'aucune des caractéristiques portant les valeurs non nulles de u ne séjourne trop longtemps dans l'ensemble $\{\phi > 0\}$:

Proposition 4. *Supposons* $u_0 \geq 0$ *et posons :*

$$A = \bigcup_{u_0(\zeta) \neq 0} \{ s \; : \; \phi(\xi(s, 0, \zeta)) > 0 \} . \tag{28}$$

Si la mesure de Lebesgue de A *vérifie* $\mathcal{L}(A) < T_1$ *avec* T_1 *défini en (24), alors il existe une unique solution globale* $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.

Démonstration. Supposons par l'absurde $T^* < +\infty$. La solution u doit s'écrire :

$$u(t, \xi(t, 0, \zeta)) = u_0(\zeta) \exp\left(\int_0^t \phi(\xi(s, 0, \zeta))U(s)ds\right).$$

Prenons $\chi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tel que $\|\chi\|_\infty \leq 1$ avec $\chi \geq \mathbf{1}_{A\cap(0,T^*)}$ et $\mathcal{L}(\{\chi \neq 0\}) < T_1$. Alors pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$ tel que $u_0(\zeta) \neq 0$ il vient :

$$|u(t, \xi(t, 0, \zeta))| \leq |u_0(\zeta)| \exp\left(\|\phi\|_\infty \int_0^t |U(s)|\chi(s)ds\right).$$

En notant $W(t) = \int_0^t \int |u(s, \xi)|d\xi\chi(s)ds$ nous obtenons l'inégalité :

$$W'(t) \leq \chi(t)\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \exp(\|\phi\|_\infty W(t)).$$

Donc pour tout $t \in (0, T^*)$ on trouve :

$$\int_0^{W(t)} \frac{d\sigma}{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \exp(\|\phi\|_\infty \sigma)} \leq \int_0^t \chi(s)ds < T_1 = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \exp(\|\phi\|_\infty \sigma)}.$$

Il existe ainsi $C > 0$ tel que $W(t) \leq C$ pour tout $t \in (0, T^*)$. Ceci contredit (23). □

Si au contraire une caractéristique reste trop longtemps dans l'ensemble $\{\phi > 0\}$ alors il se peut que le temps d'existence de la solution soit fini, comme l'indique le résultat suivant.

Proposition 5. *Soit une donnée initiale $u_0 \geq 0$. Supposons qu'il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u_0(\xi_0) \neq 0$ avec $\mathcal{L}(\{t > 0 : \phi(\xi(t, 0, \xi_0) > 0\}) = +\infty$. Alors $T^* = +\infty$.*

Enonçons enfin un résultat concernant le comportement des solutions engendrées par des données "grandes". Pour ces dernières, l'effet dispersif n'est plus suffisant pour autoriser l'existence de solutions globales en temps.

Théorème 3. *Soient $u_0 \geq 0$ et $\phi \geq 0$ telles que $\|\phi u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \neq 0$. On note à nouveau f la fonction introduite à la proposition 2 et $T^*(\lambda)$ le temps d'existence de la solution engendrée par une donnée λu_0. Lorsque $\lambda \to +\infty$ on a :*

$$T^*(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{dz}{f(z)}.$$

On renvoie à [2] pour la démonstration de ces deux derniers résultats.

Références

[1] F. Bouchut, F. Golse, C. Pallard, *Classical solutions and the Glassey-Strauss theorem for the 3D Vlasov-Maxwell system.* Arch. for Rational Mech. and Anal. **170** (2003), 1–15.

[2] P. Gérard, C. Pallard, *A mean-field toy model for resonant transport.* Kinet. Relat. Models 3 (2010), no.2, 299–309.

[3] R. Glassey, *The Cauchy Problem in Kinetic Theory.* SIAM 1996.

[4] R. Glassey, J. Schaeffer, *The "two and one-half-dimensional" relativistic Vlasov Maxwell system.* Comm. Math. Phys. 185 (1997), no. 2, 257–284.

[5] R. Glassey, J. Schaeffer, *The relativistic Vlasov-Maxwell system in two space dimensions. I, II.* Arch. Rational Mech. Anal. 141 (1998), 331–354, 355–374.

[6] R. Glassey, W. Strauss, *Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities*, Arch. Rational Mech. Anal. 92 (1986), 59–90.

[7] R. Glassey, W. Strauss, *Absence of shocks in an initially dilute collisionless plasma.* Comm. Math. Phys. 113 (1987), no. 2, 191–208.

[8] G. Rein, *Generic global solutions of the relativistic Vlasov-Maxwell system of plasma physics.* Comm. Math. Phys. 135 (1990), no. 1, 41–78.

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, UMR 8628, France.
E-mail address: christophe.pallard@math.u-psud.fr