SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2009-2010

Florent Berthelin et Stéphane Junca

Des lemmes de moyenne avec un terme de force dans l'équation de transport

Séminaire É. D. P. (2009-2010), Exposé n° XV, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A15_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2009-2010
Exposé n^{o} XV, 1-14

Des lemmes de moyenne avec un terme de force dans l'équation de transport

F. Berthelin et S. Junca

Laboratoire J.A. Dieudonné, CNRS UMR 6621,
Université de Nice Sophia-Antipolis,
Parc Valrose, 06108, Nice, France,
bertheli@unice.fr, junca@unice.fr

Résumé

Nous obtenons plusieurs lemmes de moyenne pour des équations de transport avec un terme de force. Ces lemmes améliorent la régularité connue en ne considérant pas le terme de force comme un terme source arbitraire mais bien comme une partie de l'opérateur différentiel. Nous présentons deux techniques de preuve : par des changements de variables locaux ou par des méthodes de phases stationnaires. Ces résultats sont quantifiés par deux hypothèses de non dégénérescence. Nous caractérisons les conditions optimales de ces hypothèses pour comparer les régularités obtenues, par rapport aux variables d'espace et de vitesse.

Table des matières

1 Introduction

L'obtention de régularité via des lemmes de moyenne a été introduite dans [15] et s'est développée, entre autres, dans [8], [10], [9], [3], [5], [22], [6], [25], [18]. Les lemmes de moyenne sont un outil important pour obtenir la compacité d'équations cinétiques ([7], [8]). Plus généralement, ceci a été utilisé dans un grand nombre de papiers ces dernières années. Parmi ces articles, un résultat important qui utilise un lemme de moyenne est la limite hydrodynamique des équations de Boltzmann ou BGK vers les équations d'Euler ou Navier-Stokes incompressibles ([17], [16]).

Pour faire bref, un lemme de moyenne est un résultat qui dit que les quantités macroscopiques $\int f(t,x,v)\psi(v)\,dv$ ont une meilleur régularité par rapport à (t,x) que les quantités microscopiques $f(t,x,v)$ où f est solution d'une équation cinétique.

Par exemple, dans [9] et [3], le résultat suivant est prouvé.

Théorème [DiPerna, Lions, Meyer – Bézard] *Soit* $f,\ g_j \in L^p(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^M)$ *avec* $1 < p \leq 2$ *tel que*

$$\partial_t f + \mathrm{div}_x[a(v)f] = \sum_{|j|\leq m} \partial_v^j g_j, \tag{1.1}$$

avec $a \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}_v^M, \mathbb{R}_x^N)$ *pour* $m \in \mathbb{N}$. *Soit* $\psi \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}_v^M)$ *avec un support compact. Soit* $A > 0$ *tel que le support de* ψ *est inclus dans* $[-A,A]^M$. *Supposons l'hypothèse de non-dégénérescence suivante sur* $a(\cdot)$ *: il existe* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout* $(u,\sigma) \in S^N$ *et* $\varepsilon > 0$,

$$\mathit{mes}\ \Big(\{v \in [-A,A]^M\,;\ u - \varepsilon < a(v)\cdot\sigma < u + \varepsilon\}\Big) \leq C\varepsilon^\alpha. \tag{1.2}$$

Alors $\rho_\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^M} f(t,x,v)\psi(v)\,dv$ *appartient à* $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ *où* $s = \frac{\alpha}{(m+1)p'}$, p' *étant l'exposant conjugué de* p.

La régularité de f elle-même est aussi un sujet d'étude, par exemple en supposant de la régularité en v, voir [4], [20] et [1].

Pour l'équation (1.1), la régularité obtenue est optimale, voir [23], [24] et [11].
Le théorème précédent dit, dans le cas $m = 1$, que pour l'équation

$$\partial_t f + a(v)\cdot\nabla_x f = g - F(t,x,v)\cdot\nabla_v \tilde{g}, \tag{1.3}$$

la régularité obtenue est $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ avec $s = \frac{\alpha}{2p'}$. Si on considère l'équation

$$\partial_t f + a(v)\cdot\nabla_x f + F(t,x,v)\cdot\nabla_v f = g, \tag{1.4}$$

c'est-à-dire avec $\tilde{g} = f$, il est classique de considérer le terme $F(t,x,v)\cdot\nabla_v f$ comme une partie du second membre et la régularité obtenue est $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ avec $s = \frac{\alpha}{2p'}$. Mais pour (1.4), la dérivation par rapport à v porte seulement sur f via l'équation de transport et non sur un terme arbitraire $\tilde{g}$. Il n'y a donc pas de raison de perdre de l'information car ce terme est une partie de l'opérateur différentiel et les termes du second membre sont dans L^2 (second membre avec $m = 0$ et non $m = 1$) et la bonne régularité devrait donc être $W^{s,p}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ avec $s = \frac{\alpha}{p'}$. Ceci explique la motivation des travaux présentés ensuite et dont les détails se trouvent dans [2]. Les résultats obtenues généralisent ceux obtenues dans [12] et [14] pour le cas transversal. Les résultats que nous obtenons se généralisent dans L^p pour $1 < p \leq 2$ par des méthodes d'interpolation. Nous présentons deux techniques de preuve : par des changements de variables locaux ou par des méthodes de phases stationnaires.

2 Preuve par changements de variables locaux

Traitons tout d'abord le cas où F est régulier par une méthode de changements de variables locaux. Dans ce cas, l'hypothèse de non-dégénérescence utilisée est la même que dans les résultats précédents.

Définition 1 ($\alpha-$condition) *Soit $\alpha > 0$, $A > 0$, la fonction $a(\cdot)$ est dite vérifier l'$\alpha-$condition sur $\{v,\ |v| \leq A\}$ si $\exists\, C > 0$ tel que $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $\forall \sigma \in S^{N-1}$ et $\forall\, \varepsilon > 0$,*

$$mes\ \Big(\{v \in [-A, A]^M\,;\ |a(v)\cdot\sigma - u| < \varepsilon\}\Big) \leq C\varepsilon^\alpha.$$

Le résultat que nous présentons est le suivant.

Théorème 1 *Soit $a \in C^{N+3}(\mathbb{R}_v^M, \mathbb{R}_x^N)$, $F \in C^{N+3}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^M, \mathbb{R}_v^M)$, $f, g \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^M)$, vérifiant (1.4). Soit $A > 0$ et $\psi \in C_c^{N+2}(\mathbb{R}_v^M)$ tel que le support de ψ est inclu dans $[-A, A]^M$. Supposons qu'il existe $0 < \alpha \leq 1$ tel que $a(\cdot)$ vérifie l'$\alpha-$condition sur $\{v,\ |v| \leq A\}$. Alors la moyenne*

$$\rho_\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^M} f(t, x, v)\psi(v)\, dv$$

est dans $H_{loc}^{\alpha/2}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$.

La preuve de ce résultat consiste en deux étapes : généraliser un lemme de moyenne "classique" aux fonctions tests qui dépendent de (t, x), puis faire des changements de coordonnées pour se ramener localement à un opérateur sans dérivée en v.

2.1 Lemme de moyenne avec (t, x, v)

Afin de prouver ce résultat, nous partons du résultat classique suivant (voir [15], [6]).

Proposition 1 (Golse, Lions, Perthame, Sentis) *Soit $a \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$, $f, g \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^M)$, tel que*

$$\partial_t f + a(v) \cdot \nabla_x f = g. \tag{2.1}$$

Soit $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}_v^M)$, avec un support compact dans $[-A,A]^M$, pour lequel il existe $0 < \alpha \leq 1$ tel que $a(\cdot)$ vérifie l'$\alpha-$condition sur $\{v,\ |v| \leq A\}$. Alors la moyenne

$$\rho_\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^M} f(t,x,v)\psi(v)\,dv$$

est dans $H^{\alpha/2}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ avec l'estimation

$$\|\rho_\psi\|_{H^{\alpha/2}} \leq \tilde{C}(N)\left(\|\psi\|_{L^2} + \sqrt{K}\|\psi\|_{L^\infty}\right)(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}).$$

Nous améliorons ce lemme pour prouver un résultat avec des fonctions tests dépendant de (t,x,v).

Proposition 2 (Lemme de moyenne avec fonction test en (X,v)) *Soit $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_v^M, \mathbb{R}_x^N)$, $f,g \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^M)$ tel que*

$$\partial_t f + a(v)\cdot\nabla_x f = g. \tag{2.2}$$

Soit $\psi \in L_c^\infty(\mathbb{R}_v^M, W^{N+2,\infty}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N))$ avec un support compact par rapport à v dans $[-A,A]^M$. Supposons qu'il existe $0 < \alpha \leq 1$ tel que $a(\cdot)$ vérifie l'$\alpha-$condition sur $\{v,\ |v| \leq A\}$. Alors, pour tout compact K, il existe une constante $C(N,K)$ telle que la moyenne

$$\rho_\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)\psi(t,x,v)\,dv$$

est dans $H^{\alpha/2}_{loc}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ avec la borne

$$\|\rho_\psi\|_{H_K^{\alpha/2}} \leq C(N,K)(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})\,\|\psi\|_{(L^2\cap L^\infty)_v(W_{tx}^{N+2,\infty})}.$$

Preuve de la Proposition 2. On pose $X = (t,x)$. Fixons K un compact en la variable X. Notons $\tilde{\psi} = \psi\chi_K$. La série de Fourier par rapport à la variable X donne

$$\tilde{\psi}(X,v) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{N+1}} c_\beta(v)e^{iS\beta\cdot X} = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{N+1}} ((1+|\beta|^r)c_\beta(v)) \cdot \frac{e^{iS\beta\cdot X}}{1+|\beta|^r}$$

avec $r = N/2+1$. Posons $\phi_\beta(X) = \dfrac{e^{iS\beta\cdot X}}{1+|\beta|^r}$ et $\psi_\beta(v) = (1+|\beta|^r)c_\beta(v)$. On souhaite appliquer Fubini dans la formule suivante

$$\rho_{\tilde{\psi}}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^M} f(t,x,v) \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{N+1}} \phi_\beta(X)\psi_\beta(v)\,dv.$$

Pour cela, notons que

$$\int_{\mathbb{R}^M} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} |f(X,v)\phi_\beta(X)\psi_\beta(v)|\,dv$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{\mathbb{R}^M} |f(X,v)| \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} |\phi_\beta(X)\psi_\beta(v)|\, dv \\
&\le \sqrt{\int_{\mathbb{R}^M} |f(X,v)|^2\, dv}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^M}\left(\sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} |\phi_\beta(X)\psi_\beta(v)|\right)^2 dv} \\
&\le \|f(X,\cdot)\|_{L^2_v}\sqrt{\sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} |\phi_\beta(X)|^2 \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} |\psi_\beta(v)|^2\, dv.}
\end{aligned}
$$

La décroissance de coefficients de Fourier dans $W^{N+2,\infty}(\mathbb{R}^{N+1}_X)$ donne

$$
|c_\beta(v)| \le \frac{C_1}{(S|\beta|)^{N+2}}\|\tilde{\psi}(\cdot,v)\|_{W_X^{N+2,\infty}},
$$

ce qui permet de majorer

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^M} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} |\psi_\beta(v)|^2\, dv \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} (1+|\beta|^r)^2 |c_\beta(v)|^2\, dv \\
\le\;& \frac{C_2}{S^{2N+4}} \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} \frac{4|\beta|^{2r}}{|\beta|^{2N+4}} \|\tilde{\psi}(\cdot,v)\|^2_{W_X^{N+2,\infty}}\, dv \\
\le\;& \frac{4C_2}{S^{2N+4}} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} \frac{1}{|\beta|^{N+2}} \|\psi\|^2_{L^2_v(W_X^{N+2,\infty})}.
\end{aligned}
$$

Il vient alors

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^M} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} |f(X,v)\phi_\beta(X)\psi_\beta(v)|\, dv \\
\le\;& C_3\|f(X,\cdot)\|_{L^2_v}\sqrt{\sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} \frac{1}{(1+|\beta|^r)^2} \sum_{\beta\in(\mathbb{Z}^{N+1})^*} \frac{1}{|\beta|^{N+2}} \|\psi\|^2_{L^2_v(W_X^{N+2,\infty})}} \\
<\;& +\infty
\end{aligned}
$$

car $2r > N+1$. Ainsi il est possible d'intervertir l'intégrale et la somme, et nous obtenons

$$
\rho_{\tilde{\psi}}(X) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{N+1}} \phi_\beta(X) \int_{\mathbb{R}^M} f(X,v)\psi_\beta(v)\, dv.
$$

Ceci fait apparaître des ρ_{ψ_β} avec des fonctions tests ψ_β dépendant seulement de v. Le lemme de moyenne classique donne

$$
\|\rho_{\psi_\beta}\|_{H_K^{\alpha/2}} \le \tilde{C}(N)\left(\|\psi_\beta\|_{L^2} + \sqrt{C}\|\psi_\beta\|_{L^\infty}\right)(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}).
$$

Nous utilisons alors le résultat suivant : pour $u_1 \in C^s(\Omega)$, $u_2 \in H^s(\Omega)$, avec $s \in]0,1[$, et Ω borné de $\mathbb{R}^{N+1}$, on a $u_1 u_2 \in H^s(\Omega)$ avec $\|u_1 u_2\|_{H^s} \leq C_3 \|u_1\|_{C^s} \|u_2\|_{H^s}$.

Pour $s = \alpha/2$, ceci donne

$$\|\rho_\psi\|_{H_K^{\alpha/2}} \leq C_4 \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{N+1}} \|\phi_\beta\|_{C_K^{\alpha/2}} \|\rho_{\psi_\beta}\|_{H_K^{\alpha/2}}$$

$$\leq \; C_5 \left(1 + \sum_{\beta \in (\mathbb{Z}^{N+1})^*} \frac{1}{|\beta|^{N+2-\alpha/2}} \right) (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}) \, \|\psi\|_{(L^2 \cap L^\infty)_v (W_X^{N+2,\infty})}$$

Comme $N + 2 - \alpha/2 > N + 1$, on conclut. □

2.2 Changements de variables locaux

La seconde partie de la preuve du Théorème 1 consiste à faire des changements de coordonnées locaux pour se ramener localement à un opérateur sans dérivée en v.

Notant $X = (t, x)$ et $b(v) = (1, a(v))$, l'équation s'écrit

$$b(v) \cdot \nabla_X f + F(X, v) \cdot \nabla_v f = g,$$

Faisons le changement $(X, w) \mapsto (X, V(X, w))$ tel que l'équation devienne

$$\tilde{b}(w) \cdot \nabla_X \tilde{f} + 0 = \tilde{g},$$

où $\tilde{f}(X, w) = f(X, V(X, w))$, $\tilde{g}(X, w) = g(X, V(X, w))$ et $\tilde{b}(w) = b(V(X, w))$.

Localement $V = V(X, w)$ est solution du système non-linéaire suivant

$$b(V) \cdot \nabla_X V = F(X, V)$$

car

$$\nabla_X \tilde{f} = \nabla_X (f(X, V)) = \nabla_X f(X, V) + \nabla_X V \cdot \nabla_v f(X, V).$$

Etudions maintenant l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{B}_l & \to & \mathcal{B}', \\ & (X, w) & \mapsto & (X, V(X, w)). \end{array}$$

Par la méthode des caractéristiques, avec $V(t_0, x; w) = w$, pour tout w, il existe un voisinage de (t_0, x_0) où V est bien définie et régulière. Les caractéristiques sont régulières par rapport au paramètre w, donc $V(t, x, w)$ est bien définie sur un voisinage de $(t_0, x_0; v_0)$. Comme $\partial_w V(t_0, x; w) = id_{\mathbb{R}^M}$, et $\det(D\Phi) = \det(\partial_w V)$, quitte à réduire le voisinage, Φ est un difféomorphisme sur un $\mathcal{B}_l$.

Soit K un compact $\mathbb{R}_X^{N+1}$. Posons $\mathcal{K} = K \times [-A, A]^M$. Comme $\mathcal{K}$ est compact, il existe $\{(X_l, v_l)\}_{l=1,\cdots,L}$, avec les difféomorphismes $\Phi_l : \mathcal{B}_l \to \mathcal{B}^l$, $\Phi_l(X, w) = (X, V_l(X, w))$, tels que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{l=1,\cdots,L} \mathcal{B}^l$.

Utilisant une partition de l'unité pour ce recouvrement, il vient

$$\rho_\psi(X) = \sum_{l=1}^{L} \int_{\mathbb{R}^M} f(X,v)\chi_l(X,v)\psi(v)\,dv$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \int_{\{v\in\mathbb{R}^M\,;\,(X,v)\in B^l\}} f(X,v)\chi_l(X,v)\psi(v)\,dv$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \int_{\{w\in\mathbb{R}^M\,;\,(X,w)\in B_l\}} \tilde{f}(X,w)\chi_l(X,V_l(X,w))\psi(V_l(X,w))J_l(X,w)\,dw$$

par le changement de variable $v \mapsto w = V_l(X,v)$ sur chaque voisinage $\mathcal{B}^l$ correspondant à l. Ceci termine la preuve du Théorème.

3 Par des méthodes de phases stationnaires

Dans le cas où le champ de force F est constant non nul, nous présentons une seconde approche qui conduit à une régularité globale pour des fonctions tests moins régulières.

Depuis [2], nous avons noté que ce résultat s'étend très simplement au cas $F(v)$ régulière non nulle. Voir la remarque à la fin de la section.

L'hypothèse de non-dégénérescence associée à cette technique de phases stationnaires. est la suivante.

Notons $D = F \cdot \nabla_v$.

Définition 2 ($\gamma F-$condition) *La fonction $a(\cdot)$ satisfait la γF-condition s'il existe $\gamma \in \mathbb{N}^*$ tel que* $\forall (v,\sigma) \in \mathbb{R}^M \times S^N, \quad \sigma = (\sigma_0, \widetilde{\sigma}), \quad \widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \cdots, \sigma_N),$

$$|\sigma_0 + a(v).\widetilde{\sigma}| + \sum_{k=1}^{\gamma-1} \left| D^k a(v) \cdot \widetilde{\sigma} \right| > 0. \qquad (\gamma ND)$$

Dans le cas $M = 1$, la condition (γND) est similaire à une conditionde non-dégénérescence donnée dans [13] pour la moyenne d'opérateurs avec des symboles principaux réels.

Le résultat que nous obtenons est le suivant.

Théorème 2 *Soit $a \in C^\gamma(\mathbb{R}_v^M, \mathbb{R}_x^N)$, $F(t,x,v) = F \in \mathbb{R}^M$, $F \neq 0$, f, $g \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^M)$ vérifiant (1.4) où nous supposons qu'il existe γ un entier positif tel que $a(\cdot)$ satisfait la γF-condition. Soit $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}_v^M)$, alors la moyenne*

$$\rho_\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^M} f(t,x,v)\psi(v)\,dv$$

est dans $H^{1/\gamma}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$.

Notons que le cas d'un champ de force non nul constant n'est pas sans intérêt car il s'agit par exemple de considérer la gravité dans ces équations.

Pour prouver ce résultat, utilisant la transformée de Fourier dans la direction v_1 telle que $F \cdot \nabla_v = |F|\partial_{v_1}$, nous sommes ramené à estimer des intégrales oscillantes. Pour cela, nous utilisons un résultat de phase stationnaire de [27] qui donne précisément une majoration d'intégrales oscillantes par le terme dominant dans la méthode de phase stationnaire.

Preuve du Théorème 2. Utilisons les notations $X = (t, x_1, \cdots, x_N)$ et $b(v) = (1, a_1(v), \cdots, a_N(v))$. Par un changement de repère orthogonal, on se ramène à

$$D = F \cdot \nabla_v = |F| \frac{\partial}{\partial v_1}.$$

Alors l'équation devient

$$b(v) \cdot \nabla_X f + |F| \frac{\partial f}{\partial v_1} = g.$$

Notons $\widehat{f}$ la Transformée de Fourier de f par rapport à X et Y la variable duale de X. L'équation devient alors l'équation différentielle suivante avec le paramètre Y

$$|F| \frac{\partial}{\partial v_1} \widehat{f} + i(b(v) \cdot Y)\widehat{f} = \widehat{g}.$$

Notons $v = (v_1; w)$. Considérons $v_1^0 \in]0, 1[$ tel que

$$\int |\widehat{f}|^2(Y, v_1^0; w) dY dw \leq \int \int |\widehat{f}|^2(Y, v_1; w) dY dw dv_1,$$

et posons

$$B(v) = B(v_1; w) = -\int_{v_1^0}^{v_1} \frac{b(u; w)}{|F|} du,$$

il vient

$$\begin{aligned} \widehat{f}(Y, v) &= \widehat{f}(Y, v_1^0; w) \exp(iB(v) \cdot Y) \\ &\quad + \frac{1}{|F|} \int_{v_1^0}^{v_1} \widehat{g}(Y, u; w) \exp(i(B(v_1; w) - B(u; w)) \cdot Y) du. \end{aligned}$$

On décompose $\rho_\psi(t, x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^M} f(t, x, v)\psi(v)\, dv$ en deux parties selon l'expression de $\widehat{f}$ que l'on vient d'obtenir, une partie avec la donnée "initiale" et la seconde avec le terme g :

$$\widehat{\rho}_\psi = \widehat{\rho}_f + \widehat{\rho}_g.$$

Le premier terme s'écrit

$$\widehat{\rho}_f(Y) = \int_{\mathbb{R}_w^{M-1}} \widehat{f}(Y, v_1^0; w) \int_{\mathbb{R}_u} \psi(u; w) e^{iB(u;w)\cdot Y} du dw.$$

Dans cette intégrale, une intégrale oscillante apparaît. La phase étant

$$\phi(w, \sigma) = |Y| B(u; w) \cdot \sigma, \qquad \sigma = \frac{Y}{|Y|}.$$

Nous utilisons alors les résultats suivants.

Proposition 3 (Stein) *Supposons $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que, pour $k \geq 1$,*

$$\frac{d^k\phi}{dv_1^k}(v_1) \geq 1, \qquad \forall v_1 \in]\alpha,\beta[,$$

alors il existe $c_k > 0$ tel que

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{i\lambda\phi(v_1)}dv_1\right| \leq c_k \cdot \frac{1}{|\lambda|^{1/k}}$$

avec

1. *$k \geq 2$ ou*
2. *$k = 1$ et ϕ' est monotone.*

De plus, la borne c_k est indépendante de λ, $|\beta-\alpha|$ et ϕ.

Il s'en déduit le Corollaire suivant.

Corollaire 1 *Soit $\psi \in W^{1,1}(]\alpha,\beta[)$, $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\delta > 0$ et $k \geq 1$ tels que*

$$\left|\frac{d^k\phi}{dv_1^k}(v_1)\right| \geq \delta, \quad \forall v_1 \in]\alpha,\beta[.$$

Alors

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta \psi(v_1)e^{i\lambda\phi(v_1)}dv_1\right| \\ \leq\quad & \frac{\max(|\beta-\alpha|,\widetilde{c}_k)}{\min(1,\delta^{1/k})\max(1,|\lambda|^{1/k}))}\left(\|\psi\|_{L^\infty(]\alpha,\beta[)} + \|\psi'\|_{L^1(]\alpha,\beta[)}\right),\end{aligned}$$

avec $\widetilde{c}_k$ indépendant de λ, ϕ, ψ et $]\alpha,\beta[$ pour $k \geq 2$, et $\widetilde{c}_1 = 2+\delta^{-1}\int_\alpha^\beta |\phi"(v)|dv$.

Généralisons ceci au cas avec paramètres.

Proposition 4 *Soit P un ensemble compact de paramètres p, $A > 0$, $\psi(v_1;p) \in L_p^\infty(P, W_{v_1}^{1,1}(]-A,A[))$ et $\phi(v_1;p) \in C^{\gamma+1}(\mathbb{R}_{v_1} \times P_p, \mathbb{R})$, tel que, $\forall (v_1,p) \in K = [-A,A] \times P$,*

$$\sum_{k=1}^{\gamma}\left|\frac{\partial^k\phi}{\partial v_1^k}\right|(v_1;p) > 0.$$

Alors $\exists\, d_\gamma > 0$ tel que $\forall]\alpha,\beta[\subset]-A,A[$:

$$\left|\int_\alpha^\beta \psi(v_1;p)e^{i\lambda\phi(v_1;p)}dv_1\right| \leq d_\gamma \min\left(1,|\lambda|^{-1/\gamma}\right)\left(\|\psi\|_{L^\infty} + \|\partial_{v_1}\psi\|_{L_p^\infty L_{v_1}^1}\right).$$

La preuve de cette Proposition se fait de la façon suivante. Comme K est compact, il existe $0 < \delta \leq 1$ tel que sur K, $0 < \delta < \dfrac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{\gamma}\left|\dfrac{\partial^k \phi}{\partial u^k}\right|(u;p)$. Posant $Z_k = \{(u;p),\ |\partial_u^k \phi(u;p)| > \delta\}$, alors $K \subset \bigcup_{k=1}^{\gamma} Z_k$. Utilisant une partition de l'unité adaptée, l'intégrale s'écrit comme la somme de termes de la forme $I_k(p) = \int_a^b \psi_k(u;p)e^{i\lambda\phi(u;p)}du$. Le résultat de Stein donne alors

$$|I_k| \leq \frac{\max(2A, \widetilde{c}_k)}{\delta^{1/k}\max(1, |\lambda|^{1/k})}\sup_P \left(\|\psi_k(.,p)\|_{L^\infty(]-A,A[)} + \|\psi_k'(.,p)\|_{L^1(]-A,A[)}\right).$$

Pour p fixé, on conclut en majorant

$$\begin{array}{rl} & (\|\psi_k(.,p)\|_{L^\infty} + \|\psi_k'(.,p)\|_{L^1}) \\ \leq & (\|\rho_k\|_{L^\infty} + \|\rho_k'\|_{L^1})\,(\|\psi(.,p)\|_{L^\infty} + \|\psi'(.,p)\|_{L^1}). \end{array}$$

Ceci termine la preuve de la Proposition et nous allons l'utiliser pour terminer la preuve du Théorème. Les paramètres sont ici $p = (\sigma, w)$. La condition à vérifier est

$$\sum_{k=1}^{\gamma}\left|\frac{\partial^k B(u;w)}{\partial u^k}\cdot\sigma\right| > 0,$$

il s'agit de la $\gamma F-$condition. Il vient une borne de la forme

$$\max(1, |Y|^{1/\gamma})\left|\int_\alpha^\beta \psi(u;w)e^{i\lambda B(u;w)\cdot\sigma}du\right| \leq L,$$

et donc

$$\max(1, |Y|^{1/\gamma})|\widehat{\rho}_f(Y)| \leq L\int_{[-A,A]^{M-1}} |\widehat{f}(Y, v_1^0; w)|dw.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\max(1, |Y|^{2/\gamma})|\widehat{\rho}_f(Y)|^2 \leq (2A)^{M-1}L^2\int_{[-A,A]^{M-1}} |\widehat{f}(Y, v_1^0; w)|^2dw.$$

Intégrant par rapport à Y et utilisant la propriété choisie pour v_1^0, il vient

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \max(1, |Y|^{2/\gamma})|\widehat{\rho}_f(Y)|^2dY \\ \leq & \displaystyle(2A)^{M-1}L^2\int_{\mathbb{R}^{N+1}\times\mathbb{R}^M} |\widehat{f}(Y,v)|^2dvdY, \end{array}$$

soit $\widehat{\rho}_f \in H^{1/\gamma}$.

Le terme avec g est

$$\widehat{\rho}_g(Y) = \int_{\mathbb{R}^{M-1}} H(Y,w)dw$$

avec

$$H(Y,w) = \frac{1}{|F|}\int_{-A}^{A}\int_{v_1^0}^{v_1} \mathcal{F}(g)(Y,u;w)e^{i(B(v_1;w)-B(u;w))\cdot Y}dudv_1.$$

On intervertit en utilisant Fubini, ce qui donne deux intégrales oscillantes

$$\begin{aligned} & H(Y,w) \\ = \ & \frac{1}{|F|}\int_{v_1^0}^{A}\mathcal{F}(g)(Y,u;w)e^{-iB(u;w)\cdot Y}\left(\int_u^A \psi(v_1;w)e^{iB(v_1;w)\cdot Y}dv_1\right)du \\ & +\frac{1}{|F|}\int_{-A}^{v_1^0}\mathcal{F}(g)(Y,u;w)e^{-iB(u;w)\cdot Y}\left(\int_{-A}^u \psi(v_1;w)e^{iB(v_1;w)\cdot Y}dv_1\right)du. \end{aligned}$$

On obtient par les mêmes techniques que précédement $\widehat{\rho}_g \in H^{1/\gamma}$ et finalement $\widehat{\rho}_\psi \in H^{1/\gamma}$. □

Remarque 3.1 Le résultat dans le cas F constant de l'article [2] se généralise au cas $F = F(v)$ régulier et qui ne s'annule pas (Force de Lorentz pour un champ magnétique constant). La condition de non-dégénérescence est la même en remplaçant $D = F\cdot\nabla_v$ par $D = F(v)\cdot\nabla_v$. Il vient alors la même régularité mais le résultat est local. Pour le voir, il suffit de considérer les caractéristiques associées à l'opérateur à coefficients variables $D = F(v)\cdot\nabla_v$. Dans ces nouvelles coordonnées, on est ramené au problème précédent avec $F =$ constante.

4 Comparaison des régularités obtenues

Le Théorème 1 donne une régularité $H^{\alpha/2}_{loc}$ et le Théorème 2 donne une régularité $H^{1/\gamma}$. Comparons $\alpha/2$ et $1/\gamma$ selon les valeurs de N et M.

Pour faire bref, on dira que pour $M = 1$ et $N \geq 2$, l'effet régularisant du Théorème 2 est meilleur que celui du Théorème 1 et que c'est le contraire pour $N \leq M$.

Pour être plus précis, comparons

$$\alpha_{opt}(N,M) = \sup_{a(.)\in C^\infty([-A,A]_v^M,\mathbb{R}_x^N)} \alpha,$$

et

$$\gamma_{opt}(N,M) = \min_{a(.)\in C^\infty(\mathbb{R}_v^M,\mathbb{R}_x^N),\, F\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \gamma.$$

Nous prouvons les résultats suivants.

Proposition 5 *Pour tout N, M, on a $\gamma_{opt}(N,M) = N+1$.*

En effet, la (γF)-condition implique $\gamma \geq N+1$. De plus $N+1$ est une valeur possible pour γ en prenant par exemple $D = \dfrac{\partial}{\partial v_1}$, $b(v) = (1, v_1, v_1^2, \cdots, v_1^N)$, avec $v = (v_1, v_2, \cdots, v_M)$.

Proposition 6 *Pour $M = 1$, on a $\alpha_{opt}(N,1) = \dfrac{1}{N}$.*

Pour cela, on montre que $\alpha_{opt}(N,1) \le 1/N$ (c'est la propriété la plus difficile, voir [2] pour la preuve) et pour $a(v) = (v^1, v^2, \cdots, v^N)$, on a $\alpha_{a(.)} = 1/N$.

Ainsi, il vient

Proposition 7 *Pour $N \ge 2$ et $M = 1$, $\dfrac{1}{\gamma_{opt}} = \dfrac{1}{N+1} > \dfrac{\alpha_{opt}}{2} = \dfrac{1}{2N}$.*

De plus

Proposition 8 *Pour $N \le M$, on a $\alpha_{opt}(N,M) = 1$.*

Proof. La preuve pour $N = M$ entraîne le cas $N \le M$. Pour $N = M$, la preuve est la suivante. Soit $a(.) : \mathbb{R}_v^N \to \mathbb{R}_x^N$ un difféomorphisme global. Soit $(u,\sigma) \in S^N$ et $\phi(v) = a(v)\cdot\sigma - u$. Soit $Z(\phi,\varepsilon) = \{|v| \le A, |\phi(v)| \le \varepsilon\}$. Il existe δ tel que $0 < \delta < |\nabla_v \phi(v)| < 1/\delta$, $\forall |v| \le A, u^2 + |\sigma|^2 = 1$. Alors $\delta|v - v'| \le |\phi(v) - \phi(v')| \le \dfrac{|v-v'|}{\delta}$ et

$$\bigcup_{z \in Z(\phi,0)} B(z, \delta\varepsilon) \subset Z(\phi,\varepsilon) \subset \bigcup_{z \in Z(\phi,0)} B(z, \varepsilon/\delta)$$

et donc il existe $C > 0$, tel que $0 < C\varepsilon < mes(Z(\phi,\varepsilon))\varepsilon < C^{-1}\varepsilon$. $\square$

Finalement, il vient

Proposition 9 *Pour $N \ge 2$ et $N \le M$, $\dfrac{1}{\gamma_{opt}} = \dfrac{1}{N+1} < \dfrac{\alpha_{opt}}{2} = \dfrac{1}{2}$.*

Remarque 4.1 Dans le cas d'une vitesse scalaire ($v \in \mathbb{R}$, $M = 1$), on caractérise le meilleur α dans la condition de non-dégénérescence (1.2). Cette caractérisation est mentionnée dans peu de travaux, voir [26, 19], mais la preuve d'optimalité est nouvelle. Ce type de caractérisation donne également de nouveaux résultats pour les lois de conservation scalaires, voir [21].

Références

[1] F. Berthelin, F. Bouchut, Relaxation to isentropic gas dynamics for a BGK system with single kinetic entropy, Methods and Applications of Analysis, 9(2) (2002) 313-327.

[2] F. Berthelin, F. Junca, Averaging lemmas with a force term in the transport equation, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol 93, Issue 2 (2010), 113-131.

[3] M. Bézard, Régularité L^p précisée des moyennes dans les équations de transport, Bull. Soc. Math. France 122 (1994), no. 1, 29–76.

[4] F. Bouchut, Hypoelliptic regularity in kinetic equations, J. Math. Pures Appl., 81(11) :1135–1159, 2002.

[5] F. Bouchut, L. Desvillettes, Averaging lemmas without time Fourier transform and application to discretized kinetic equations, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 129A, 19-36 (1999).

[6] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, Kinetic equations and asymptotic theory, Series in Appl. Math., Gauthiers-Villars, 2000.

[7] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability, Ann. of Math. (2) 130 (1989), no. 2, 321–366.

[8] R.J. Di Perna, P.-L. Lions, Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems, Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989), no. 6, 729–757.

[9] R.J. Di Perna, P.-L. Lions, Y. Meyer, L^p regularity of velocity averages, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 8 (1991), n^0 3-4, 271-287.

[10] P. Gérard, Microlocal defect measures, Comm. Partial Differential Equations 16 (1991), no. 11, 1761–1794.

[11] P. Gérard, Moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1986–1987, Exp. No. XI, 9 pp., École Polytech., Palaiseau, 1987.

[12] P. Gérard, F. Golse, Averaging regularity results for PDEs under transversality assumptions, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no. 1, 1–26.

[13] O. Goffaux, Moyennisation pour des opérateurs à symboles complexes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327 (1998), no. 11, 923–926.

[14] F. Golse, Quelques résultats de moyennisation pour les équations aux dérivées partielles, Nonlinear hyperbolic equations in applied sciences, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1988, Special Issue, 101–123 (1989).

[15] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, Regularity of the moments of the solution of a transport equation, J. Funct. Anal., 76, (1988), 110–125.

[16] F. Golse, L. Saint-Raymond, The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels, Invent. Math. 155 (2004), no. 1, 81–161.

[17] F. Golse, L. Saint-Raymond, The Navier-Stokes Limit for the Boltzmann Equation, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 333 (2001) 897–902.

[18] F. Golse, L. Saint-Raymond, Velocity averaging in L^1 for the transport equation, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002), 557–562.

[19] P.-E. Jabin, Some regularizing methods for transport equations and the regularity of solutions to scalar conservations laws, Seminaire X-EDP, Exp. No. 16, 15p., 2009.

[20] P.-E. Jabin, B. Perthame, Regularity in kinetic formulations via averaging lemmas, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 8, 761-774 (2002).

[21] S. Junca, Maximal smoothing effect for nonlinear scalar conservation laws, preprint 2009.

[22] B. Perthame, P.E. Souganidis, A limiting case for velocity averaging, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31 (1998), no. 4, 591–598.

[23] P.-L. Lions, Régularité optimale des moyennes en vitesses, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320 (1995), no. 8, 911–915.

[24] P.-L. Lions, Régularité optimale des moyennes en vitesses, II., C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 326 (1998), no. 8, 945–948.

[25] P.-L. Lions, B. Perthame, Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 314 (1992), 801-806.

[26] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations. J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), no. 1, 169–191.

[27] E.M. Stein, Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Mathematical Series, 43, Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.