SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Delphine Salort

Propriétés dispersives pour des équations cinétiques et applications à l'équation de Vlasov-Poisson

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° IX, 16 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A9_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n^o IX, 1-16

Propriétés dispersives pour des équations cinétiques et applications à l'équation de Vlasov-Poisson

Delphine Salort *

17 février 2009

Résumé

On considère l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 3. On montre des résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles de l'équation de Vlasov-Poisson avec densité bornée pour des données initiales ayant strictement moins de six moments dans $L^1_{x,\xi}$. La preuve est basée sur une nouvelle approche qui consiste à établir des effets de moments a priori pour des équations de transport avec des termes de force peu réguliers.

1 Introduction

On considère l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 3 donnée par

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \nabla_x f \pm E\cdot \nabla_\xi f = 0 \\ f(0,x,\xi) = f^{in}(x,\xi) \end{cases} \tag{1}$$

où f^{in} est une fonction positive mesurable, avec $E = \varphi * \rho$,

$$\varphi(x) = \frac{x}{|x|^3} \quad \text{et} \quad \rho(t,x) = \int f(t,x,\xi)d\xi.$$

Cette équation modélise l'évolution, dans l'espace des phases, d'un système de particules en interaction et soumises au champ E dont l'intensité dépend de la densité de particules ρ dans tout l'espace. La solution $f(t,x,\xi)$ modélise la densité microscopique de particules qui sont au temps t, à la position x avec la vitesse ξ, et $\rho(t,x)$ modélise la probabilité de trouver une particule au temps t à la position x. Enfin, $E(t,x)$ modélise le potentiel créé par ρ.

Une fois cette équation résolue, on peut considérer l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée qui est une équation de transport linéaire avec un terme de force F donnée par

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \nabla_x f + F\cdot \nabla_\xi f = 0 \\ f(0,x,\xi) = f^{in}(x,\xi) \end{cases} \tag{2}$$

où pour retrouver l'équation de Vlasov-Poisson, on prend $F = \pm E$.

L'objectif de cet article est de montrer de nouveaux résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles pour l'équation de Vlasov-Poisson (1).

*Institut Jacques Monod, Université Paris-Diderot, 4 place Jussieu 75005 Paris, FRANCE ; salort.delphine@ijm.jussieu.fr

– La stratégie générale adoptée passe par une approche dispersive. Plus précisément, l'amélioration des résultats de Cauchy pour l'équation de Vlasov-Poisson passe en partie par l'élaboration de nouveaux résultats dispersifs pour l'équation de transport (2) où le terme de force F est peu régulier (la bonne régularité à imposer sur F sera précisée par la suite ; voir section 3.2.1). Notons que les estimations dispersives obtenues ici sont des estimations a priori i.e F est supposé être régulier afin de bien définir les trajectoires, mais toutes les estimations ne font intervenir que des normes de faible régularité sur F.
– L'équation (1) a un terme non linéaire E qui fait apparaître le noyau singulier en 0 donné par $\frac{x}{|x|^3}$; singularité qu'il va falloir gérer par la suite pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité. La faible régularité qu'il faudra imposer sur F est directement liée à ce noyau singulier.
– Enfin, la dynamique de l'équation de Vlasov-Poisson (1) est donnée (du moins si la solution est assez régulière) par ce que l'on appelle les caractéristiques de l'équation ; i.e la solution de l'équation (2) (ou (1) en prenant $F = \pm E$) s'écrit explicitement en fonction de la donnée initiale par

$$f(t,x,\xi) = f^{in}(X(t,x,\xi), V(t,x,\xi))$$

où (X, V) est solution du système

$$\begin{cases} \dot{X}(t,x,\xi) = V(t,x,\xi) \\ \dot{V}(t,x,\xi) = F(t, X(t,x,\xi)) \end{cases} \tag{3}$$

avec

$$X(0,x,\xi) = x \quad \text{et} \quad V(0,x,\xi) = \xi.$$

Dans cet article, les résultats obtenus sur l'équation de Vlasov-Poisson se font directement à travers l'étude précise d'une part de ces trajectoires et d'autre part du champ E le long de ces trajectoires.

Pour mener à bien cet objectif,
– Dans un premier temps on rappelle les trois principales estimations dispersives connues pour l'équation de transport (2) dans le cas où $F = 0$ (transport libre) ainsi que leurs applications à l'équation de Vlasov-Poisson. On explique intuitivement laquelle de ces trois estimations pourrait le mieux s'adapter au cadre d'une équation de transport avec un terme de force peu régulier.
– Dans la deuxième partie, on rappelle les résultats connus sur l'équation de Vlasov-Poisson qui sont directement liés au résultat principal de cet article.
– Enfin, la dernière partie est consacrée à l'énoncé et l'idée de preuve du théorème principal.

Notation : Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans cet article, $x + 0$ et $x - 0$ désigne $x + \varepsilon$ et $x - \varepsilon$ respectivement où $\varepsilon > 0$ peut être pris arbitrairement petit.

2 Estimations dispersives pour le transport libre.

Dans cette section, on présente les trois principales propriétés dispersives et leur éventuelles applications pour le cas simple de l'équation de transport libre ($F = 0$)

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f = 0$$

et on explique, parmi ces propriétés dispersives, quelle est celle qui s'adapterait le mieux à notre contexte.

Le principe général des méthodes dispersives pour les équations d'évolution est en général le suivant : on exploite la façon dont la solution s'étale dans l'espace au cours du temps afin de montrer que l'on a, même avec des données initiales peu régulières, des solutions régulières, quitte à accepter d'intégrer en temps ou à se localiser en espace. Un des intérêts majeurs de ces estimations interviennent donc lorsque l'on cherche à montrer des résultats d'existence et d'unicité pour des équations non linéaires associées à des équations linéaires dispersives avec des données initiales peu régulières.

Les trois estimations dispersives principales pour le transport libre sont :
- 1. Les estimations de dispersion ponctuelle (vérifiées pour très peu d'équations dispersives)
- 2. Les estimations de Strichartz (moyennées en temps)
- 3. Les effets de moments (moyennées en temps et localisées en espace).

2.1 Estimations de dispersion ponctuelle.

L'estimation de dispersion ponctuelle donnée par

$$\|f(t)\|_{L^\infty_x(L^1_\xi)} \leq C|t|^{-d}\|f^{in}\|_{L^1_x(L^\infty_\xi)}$$

est liée au fait que la solution s'étale dans tout l'espace et de façon uniforme dans toutes les directions. Plus précisément, ici la preuve repose sur la formulation explicite $f(t,x,\xi) = f^{in}(x-t\xi,\xi)$ et le changement de variable $x-t\xi \to \eta$ par rapport à ξ. Notons que cette condition d'uniformité de propagation des trajectoires dans toutes les directions rend cette estimation dispersive très exigente (elle implique en particulier les deux autres principales estimations dispersives) et peu adaptable à d'autres contextes. Elle est en générale fausse lorsque l'on s'intéresse à des dynamiques où les phénomènes de dispersion sont plus compliqués que pour le transport libre (voir [15] et les références de l'article) et n'est donc pas un bon candidat pour notre étude. Cependant, cette estimation a été utilisée dans de nombreux contextes pour les équations cinétiques non linéaires, notamment pour le théorème de propagation des moments dû à Lions et Perthame dans [14] pour l'équation de Vlasov-Poisson, théorème sur lequel on reviendra dans la suite de l'article.

2.2 Estimations de Strichartz.

Dans le cas du transport libre, les estimations de Strichartz sont dûes à Castella et Perthame (voir [7]) et résultent de la combinaison de l'estimation dispersive ponctuelle et des propriétés conservatives pour tout $p \in [1,+\infty]$

$$\|f(t)\|_{L^p_{x,\xi}} = \|f^{in}\|_{L^p_{x,\xi}}.$$

Elles sont données par

Estimations de Strichartz	Propriétés conservatives
$\|f\|_{L^p_t(L^q_x(L^r_\xi))} \leq C\|f^{in}\|_{L^a}$	$\|f\|_{L^\infty_t(L^q_x(L^q_\xi)} \leq C\|(1+\|\xi\|)^q f^{in}\|_{L^q_{x,\xi}}$
$\frac{2}{p} = d\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\Big),\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{q}\Big),\ p > 2 \geq a.$	$\|f\|_{L^\infty_t(L^q_x(L^r_\xi))} \leq C\|(1+\|\xi\|)^{\frac{2}{p}} f^{in}\|_{L^q_{x,\xi}}$

Ces estimations sont l'équivalent des estimations de Strichartz bien connues pour le modèle quantique associé à l'équation de transport libre qui est l'équation de Schrödinger. Elles nous permettent de gagner $\frac{2}{p}$ moments sur la donnée initiale par rapport aux propriétés conservatives quitte à intégrer en temps. De plus, elles ont l'avantage d'être plus adaptables à d'autres contextes que les estimations de dispersion et peuvent être vérifiées même si la dispersion ponctuelle ne l'est pas (voir par exemple [15] et les références de cet article pour l'équivalent de ces résultats dans le cadre de l'équation de Schrödinger). De ce point de vue elles apparaissent comme un meilleur candidat pour être utilisé dans notre étude que l'estimation de dispersion ponctuelle. Néanmoins, ces estimations ne sont pas évidentes à utiliser :

- Contrairement au cas de l'équation de Schrödinger où les estimations de Strichartz ont été très utilisées pour la résolution de nombreux problèmes de Cauchy, dans le cadre cinétique, ces estimations n'ont été utilisées que très récemment (en 2005) dans un seul contexte : un modèle cinétique modélisant un phénomène de chemotaxis étudié par Bournaveas Calvez Gutierrez et Perthame dans [5].
- Si on revient au cas de l'équation de Vlasov-Poisson, aujourd'hui aucun résultat n'a été obtenu par l'intermédiaire de ces estimations. Notons que la structure de l'équation de Vlasov-Poisson est très différente de celle de l'équation en chemotaxis étudié dans [5] et l'utilisation de ces estimations s'avèrent au premier abord difficiles à utiliser pour l'équation de Vlasov-Poisson, surtout si l'on s'intéresse à des solutions faibles.

On ne choisira donc pas d'essayer d'utiliser ce type d'estimations dans notre cadre.

2.3 Effets de moments.

Les effets de moment (l'équivalent pour l'équation de Schrödinger sont les effets régularisants) sont donnés par la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction à support compact. Alors, il existe une constante C telle que pour tout $p \in [1, +\infty[$ on ait*

$$\||\xi|^{\frac{1}{p}}\gamma f\|_{L^p_{t,x,\xi}} \leq C\|f^{in}\|_{L^p_{x,\xi}}.$$

Ces estimations sont très intéressantes autant d'un point de vue des applications que dans l'optique d'une généralisation à un cadre plus général où F est peu régulier au lieu d'être nul.

Concernant la possibilité des applications éventuelles :

- Ces estimations nous permettent de gagner des moments sur la solution quitte à accepter d'intégrer en temps et se localiser en espace.
- Elles ont été utilisées dans le cas de l'équation de Vlasov-Poisson pour montrer des résulats de propagation des moments en 2001 par Gasser, Jabin et Perthame dans [11].

Concernant l'optique d'une généralisation potentielle au cas F peu régulier, ces estimations sont essentiellement dûes au fait que chaque trajectoire prise une à une ne reste pas longtemps dans un compact (sauf si au départ la vitesse est nulle). Plus précisément, dans le cas du transport libre la seule information que l'on utilise est

$$\mu\{t \in \mathbb{R} \text{ tels que } X(t,x,\xi) = x - t\xi \in B\} \leq C(\mu\{B\})|\xi|^{-1}$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue et où B est une boule quelconque de $\mathbb{R}^d$. On en déduit que

- Ces estimations sont beaucoup moins exigeantes que l'estimation de dispersion ponctuelle dans la mesure où elles ne requièrent pas d'uniformité de propagation dans toutes les directions : elles nécéssitent juste que chaque trajectoire prise une à une ne reste pas longtemps dans un compact. C'est donc en quelque sorte une estimation de dimension 1.
- La condition imposée sur les trajectoires pour avoir des effets de moments est une condition qui ne fait intervenir que la mesure d'un ensemble ; en l'occurence pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ l'ensemble

  $$\{t \in \mathbb{R} \text{ tels que } X(t,x,\xi) \in B.\}$$

  Aucune régularité n'est donc demandée sur les trajectoires, et ceci paraît bien adapté au fait de considérer des termes de force peu réguliers.

Ce sont donc les effets de moment qui seront les estimations cruciales dans la suite de l'article.

2.4 Résultats connus pour l'équation de Vlasov-Poisson.

Dans cette section, on rappelle les résultats connus pour les solutions faibles de l'équation de Vlasov-Poisson. En particulier, on explique pourquoi le résultat de propagation des moments dans [14] dûs à Lions et Perthame permet de donner une première condition sur la donnée initiale pour avoir existence et unicité globale du problème de Cauchy. Cette partie est importante pour comprendre le théorème principal qui sera énoncé dans la section d'après.

2.4.1 Existence de solutions faibles.

L'existence de solutions faibles de l'équation de Vlasov-Poisson (1) se fait en utilisant les estimations de base issues de la physique i.e :

- la conservation de la masse et le principe de Liouville qui affirme que pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $p \in [1,+\infty]$

  $$\|f(t)\|_{L^p_{x,\xi}} = \|f^{in}\|_{L^p_{x,\xi}}$$

- la conservation d'énergie

$$\int \frac{|\xi|^2}{2} f(t,x,\xi)dxd\xi \pm \int \frac{1}{2}|E(t,x)|^2dx = C.$$

Plus précisément, sous les conditions naturelles

$$f^{in} \in L^1_{x,\xi} \cap L^\infty_{x,\xi} \quad \text{and} \quad \int \frac{|\xi|^2}{2} f^{in}(x,\xi)dxd\xi < +\infty \tag{4}$$

Arsen'ev dans [2], [3], Hörst et Hunze dans [13] ont montré l'existence globale de solutions faibles. Il est possible d'affaiblir les conditions ci-dessus en considérant non plus des solutions

au sens des distributions, mais des solutions renormalisées de l'équation (1). A cet égard, DiPerna et Lions (voir [10] et [9]) ont montré l'existence globale de solutions renormalisées sous les conditions $f^{in} \in L^1_{x,\xi}$, $f^{in} log(f^{in}) \in L^1_{x,\xi}$ et $|\xi|^2 f^{in} \in L^1_{x,\xi}$. Dans cet article, on s'intéresse uniquement aux solutions faibles au sens des distributions de (1) avec f^{in} vérifiant les conditions (4).
La question est alors de savoir si ces solutions faibles sont uniques.

2.4.2 Résultats d'unicité.

On ne sait pas montrer l'unicité de solutions faibles en utilisant juste les estimations de base issues de la physique. Il va donc falloir aller chercher d'autres informations sur les solutions de cette équation.
Le premier théorème qui nous sera utile par la suite est un critère donnant une condition suffisante permettant de s'assurer de l'unicité de solutions faibles de l'équation de Vlasov-Poisson (1). Ce résultat dû à Loeper (voir [12]) est le suivant.

Théorème 1 *[12]*
Soit f^{in} une mesure positive bornée ; et soit $T > 0$. Alors, il existe au plus une solution faible de l'équation de Vlasov-Poisson (1) telle que

$$\rho \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3).$$

Si on utilise ce théorème, la question de l'unicité se ramène donc au fait de savoir quand est-il possible de montrer que pour tout $T > 0$,

$$\rho \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)? \tag{5}$$

Il existe deux éléments de réponse à cette question
- le premier est donné par l'intermédiaire des effets de moments (Lions et Perthame dans [14])
- le deuxième fait l'objet du théorème principal de cet article et donne bien sûr des conditions différentes de celles apportées par la première approche.

Avant de passer au théorème principal, on décrit ce que sont les effets de moments et pourquoi ils permettent d'obtenir une première condition pour que (5) soit vérifiée. Cette partie est importante pour comprendre le théorè]me principal.

Le théorème de propagation des moments est le suivant :

Théorème 2 *[14]*
Supposons que l'on ait une donnée initiale $f^{in} \in L^\infty_{x,\xi}$ et que pour tout $m > 3$

$$\|(1 + |\xi|)^{m_0} f^{in}\|_{L^1_{x,\xi}} < +\infty \quad \textit{pour tout} \quad m_0 < m.$$

Alors, il existe une solution faible de l'équation de Vlasov-Poisson (1) telle que pour tout $T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(1 + |\xi|)^{m_0} f(t)\|_{L^1_{x,\xi}} < C(T) \quad \textit{et}$$

$$E \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)(L^q(\mathbb{R}^3)) \quad si \quad \frac{3}{2} < q < \frac{3(3+m)}{6-m} \quad et \quad m < 6$$
$$E \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)(\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) \quad si \quad \alpha < \frac{m-6}{3+m} \quad et \quad m > 6\cdot$$

Ces estimations sont intéressantes dans la mesure où elles nous permettent d'avoir une correspondance entre la régularité du terme non linéaire E, génant pour montrer l'unicité, et le nombre de moments que l'on impose sur la condition initiale. Plus précisément, on remarque que le nombre de moments $m = 6$ est critique pour la régularité de E :

- si $m < 6$, alors E est peu régulier et non borné
- en revanche, dès que $m > 6$, E est continu et en particulier borné.

La propagation des moments permet de traiter le cas $m > 6$. En effet, dans ce cas, E est dans $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ pour tout $T > 0$, et en conséquence, les caractéristiques (X, V) de l'équation de Vlasov-Poisson (1) sont une petite perturbation de celles données par le transport libre :

$$X(t,x,\xi) = x + t\xi + R_1(t,x,\xi) \quad \text{et} \quad V(t,x,\xi) = \xi + R_2(t,x,\xi)$$

où

$$R_1(t,x,\xi) = \int_0^t (t-s)E(s, X(s,x,\xi))ds \quad \text{et} \quad R_2(t,x,\xi) = \int_0^t E(s, X(s,x,\xi))ds.$$

Lions et Perthame ont pu ainsi avoir le contrôle suivant pour tout $T > 0$ et $t \in [0,T]$

$$\|R_1(t)\|_{L^\infty_{x,\xi}} \leq |t|^2 \|E\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)} \quad \text{and} \quad \|R_2(t)\|_{L^\infty_{x,\xi}} \leq |t| \|E\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)}. \tag{6}$$

Ce contrôle leur permet de donner une première condition suffisante pour avoir l'estimation (5) :

Théorème 3 *[14]*
Supposons que $f^{in} \in L^\infty_{x,\xi}$ et que

$$\|(1+|\xi|)^{6+0} f^{in}\|_{L^1_{x,\xi}} < +\infty.$$

Supposons de plus que pour tout $R > 0$ et tout $T > 0$

$$supess\Big\{f^{in}(y+t\xi, w), |x-y| \leq Rt^2, |\xi - w| \leq Rt\Big\} \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3_x(L^1_\xi)). \tag{7}$$

Alors, il existe une solution faible de l'équation de Vlasov-Poisson (1) telle que pour tout $T > 0$, $\rho \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3_x)$.

3 Résultat principal et idées de la preuve.

3.1 Résultat principal.

Dans le résultat principal, on se place en dessous du seuil critique $m = 6$ i.e le terme non linéaire est a priori peu régulier. On montre que si $m < 6$ et pas trop petit, alors les trajectoires de l'équation de Vlasov-Poisson sont quand même une petite perturbation du transport libre même si E est non borné. On en déduit ainsi de nouvelles conditions sur la donnée initiale pour s'assurer de l'existence et unicité de solutions faibles.

Théorème 4 *Soit $p \in [3, +\infty[$ et $f^{in} \in L^\infty_{x,\xi}$. Alors, il existe $m(p) < 6$ tel que si*

$$\|(1+|\xi|)^{m(p)} f^{in}\|_{L^1_{x,\xi}} < +\infty,$$

alors on a une petite perturbation des trajectoires par le transport libre

$$|X(t,x,\xi) - x - t\xi| \leq C|t|^{\frac{1}{p'}+1} \quad et \quad |V(t,x,\xi) - \xi| \leq C|t|^{\frac{1}{p'}}. \tag{8}$$

Si de plus, pour tout $T_0 > 0$, $R > 0$,

$$supess\Big\{f^{in}(y+t\xi, w), |x-y| \leq R|t|^{\frac{1}{p'}+1}, |\xi - w| \leq R|t|^{\frac{1}{p'}}\Big\} \in L^\infty([0,T_0] \times \mathbb{R}^3_x(L^1_\xi)) \tag{9}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors, il existe une unique solution de l'équation de Vlasov-Poisson (1) telle que $\rho \in L^\infty([0,T_0] \times \mathbb{R}^3_x)$ pour tout $T_0 > 0$.

Faisons deux remarques sur ce théorème :

- Le théorème 4 nous permet de montrer que $\rho \in L^\infty([0,T_0] \times \mathbb{R}^3)$ pour tout $T_0 > 0$, pour des données initiales bornées, satisfaisant la condition (9) et qui ont $m(p) < 6$ moments dans $L^1_{x,\xi}$. Ici, le contrôle que l'on obtient sur les caractéristiques est légèrement plus faible que si l'on avait $E \in L^\infty([0,T_0] \times \mathbb{R}^3)$; on est donc obligé d'adapter la condition (7), en imposant la contrainte (9). Cependant, en terme de décroissance par rapport à ξ, aussi bien la condition (7) que la condition (9) ne sont pas contraignantes. En effet, ces deux conditions sont vérifiées dès que
$$|f^{in}(x,\xi)| \leq \frac{C}{(1+|\xi|)^{3+0}}.$$
- Avec cette méthode, on peut choisir p tel que $m(p) < 6 - \frac{1}{2}$, mais on ne pourra pas faire beaucoup mieux. Par ailleurs, il est possible de calculer le $m(p)$ optimal via cette méthode. Cependant, cela n'est pas fait dans la mesure où d'une part ce calcul serait assez technique et d'autre part, l'estimation du dessus $\exists\ p,\ m(p) < 6 - \frac{1}{2}$ donne une bonne approximation de ce que l'on peut faire de mieux.

3.2 Idées de la preuve du théorème principal.

Avant de donner les étapes de la preuve du théorème 4, faisons d'abord les remarques suivantes :

- La preuve du théorème 4 se réduit au fait de montrer que les trajectoires de l'équation de Vlasov-Poisson (1) sont une petite perturbation du transport libre i.e que l'estimation (8) est vérifiée ; le reste découlant directement de l'estimation (8).
- Pour avoir le contrôle voulu sur R_1 et R_2, on n'a pas besoin que E soit borné, mais que E pris le long de chaque trajectoire soit contrôlé par
$$\sup_{x_0,\xi_0} \int_0^t |E(s, X(s,x_0,\xi_0))|^p ds \leq C(t) \tag{10}$$
pour des données initiales ayant strictement moins de six moments dans L^1. Cette condition est beaucoup moins exigeante que le fait de demander que E soit borné et c'est grâce à cela que l'on va gagner des moments. Par ailleurs, il est aisé de voir que l'estimation (8) et donc la preuve du théorème 4 se réduit donc à celle de l'estimation (10).

– Dans la preuve qui suit, on montre l'estimation (10) pour p assez petit. On peut en déduire que cette estimation est également vraie pour tout $p < +\infty$ (voir [16]) par des arguments d'interpolation, mais on ne le détaillera pas dans cet article car cette partie est technique et ne fait pas partie des principaux arguments clés nouveaux de la preuve.

La preuve de l'estimation (10) se fait en trois étapes :

– 1. Dans un premier temps, on montre des effets de moments pour l'équation de transport avec des termes de force peu réguliers (2) ; ce qui nous permet de contrôler pour $\alpha > 0$, p et T assez petits
$$\sup_{\mu\{B\}\leq 1} \|E\|_{L^p_{T_0}(C^\alpha(B))} \tag{11}$$
avec des données initiales ayant strictement moins de six moments dans L^1. Ceci nous permet d'obtenir une première approximation des trajectoires de l'équation de Vlasov-Poisson par le transport libre si T assez petit. Notons que, à ce stade, l'approximation des trajectoires obtenue est beaucoup moins fine que celle donnée par l'estimation (8).
– 2. Dans un second temps, à l'aide des résultats précédents, on montre un deuxième effet de moment le long des trajectoires de l'équation de Vlasov-Poisson ; ce qui nous permet d'avoir l'approximation voulue des trajectoires par le transport libre (8) si T assez petit.
– 3. Malheureusement, la méthode dispersive utilisée dans 1 et 2 ne donne que des résultats locaux en temps. Pour globaliser en temps ces estimations, on fait une interpolation entre les résultats obtenus par la méthode dispersive et la propagation des moments obtenue par Lions et Perthame dans [14]. Ceci est l'objet du troisième point.

3.2.1 Effets de moments pour l'équation de transport (2).

On va dans un premier temps montrer quelle est la bonne régularité à imposer sur F dans l'équation (2) pour l'appliquer à notre cadre, puis on va énoncer les effets de moments obtenus pour l'équation (2) ainsi que l'idée de la preuve.

Bonne régularité à imposer sur F.

La stratégie pour utiliser des effets de moments est de localiser la singularité du noyau sur une petite boule. On se donne donc une fonction $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ avec $\gamma(0) = 1$ et on pose pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
$$E(t, x) = E^1(t, x) + E^2(t, x)$$
avec
$$E^1(t, x) = \int \varphi(y)(1 - \gamma)(y)\rho(t, x - y)dy.$$

• Le terme E^1 est la convolution entre une fonction régulière et la densité de probabilité ρ. Ainsi, E^1 est facilement contrôlé par
$$\|E^1\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \leq \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \left| \int \varphi(y)(1 - \gamma(y))\rho(x - y)dy\right| \leq C\|f^{in}\|_{L^1_{x,\xi}}. \tag{12}$$

•. Le terme E^2 est plus dur à gérer dans la mesure où c'est une convolution entre ρ et la fonction $\gamma\varphi$ qui est singulière en 0. En utilisant les inégalités de Hölder, on obtient pour tout

$p \geq 3$

$$|E^2(t,x)| \leq C\|\widetilde{\gamma}\varphi\|_{L^{p'-0}}\|\gamma(x-\cdot\,)\rho\|_{L^{p+0}}.$$

Comme $p \geq 3$, il existe une constante C telle que

$$\|\widetilde{\gamma}\varphi\|_{L^{p'-0}} \leq C.$$

On en déduit que

$$\Big|\int \varphi(y)\gamma(y)\rho(x-y)dy\Big| \leq C\|\gamma(x-\cdot\,)\rho\|_{L^{p+0}}. \tag{13}$$

En utilisant une nouvelle fois les inégalités de Hölder, on en déduit que

$$\|\gamma(x-\cdot\,)\rho\|_{L^{p+0}} = \|\gamma(x-\cdot\,)f\|_{L_x^{p+0}(L^1_\xi)} \leq C\|\gamma(x-\cdot\,)(1+|\xi|^{\frac{3}{p'}+0})f\|_{L^{p+0}_{x,\xi}}$$

et donc pour tout $p \geq 3$

$$|E^2(t,x)| \leq C\|\gamma(x-\cdot\,)(1+|\xi|^{\frac{3}{p'}+0})f\|_{L^{p+0}_{x,\xi}}. \tag{14}$$

Par la suite, on va prendre $p = 3$ afin de gagner le maximum de moments. Le fait de prendre $p > 3$ est aussi utile car cela nous permet de contrôler E dans des espaces C^α plus réguliers que L^∞, quitte à intégrer en temps et se localiser sur une boule), mais on ne détaillera pas ici cette partie car les arguments supplémentaires utilisés sont essentiellement techniques. On réfère à l'article [16] pour plus de détails.

A ce stade, deux possibilités s'offrent :

- Soit on prend sur le terme de gauche de l'équation (14) le sup sur tous les $x \in \mathbb{R}^3$. Cela nous donne un contrôle de E dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ sur l'espace entier, mais en contre partie, sur le terme de droite, le rôle de la fonction de troncature devient inexistant et on a (avec $p = 3$ dans (14))

  $$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|E^2(t,x)| \leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\|\gamma(x-\cdot\,)(1+|\xi|^{2+0})f\|_{L^{3+0}_{x,\xi}} \leq C(\|f\|_{L^\infty_{x,\xi}}, \|(1+|\xi|)^{6+0}f\|_{L^1_{x,\xi}})$$

  et on retrouve la condition où il faut imposer strictement plus de 6 moments sur la donnée initiale pour contrôler E dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$.
- Soit on est un peu moins gourmand et on prend sur le terme de gauche de l'équation (14) le sup sur une boule B de $\mathbb{R}^3$. On a

  $$\sup_{x\in B}|E^2(t,x)| \leq C\sup_{x\in B}\|\gamma(x-\cdot\,)(1+|\xi|^{2+0})f\|_{L^{3+0}_{x,\xi}}. \tag{15}$$

  Dans ce cas, sur le terme de droite le rôle de la fonction de troncature reste toujours présent et prendre le sup en x sur une boule revient juste au fait de tronquer en espace le terme de droite sur une boule un peu plus grande. Maintenant, (on ne sait pas si c'est le cas), supposons que les trajectoires de l'équation de Vlasov-Poisson dispersent comme le transport libre. Alors, les effets de moments de la proposition 1 sont vérifiés et si l'on intègre en temps dans L^{3+0} l'estimation (15), on obtient que

  $$\|\sup_{x\in B}|E^2(t,x)|\|_{L^{3+0}(0,T)} \leq C(\|f\|_{L^\infty_{x,\xi}}, \|(1+|\xi|)^{m(3)}f\|_{L^1_{x,\xi}})$$

  avec $m(3) < 6$; ce qui donne un gain de moments.

La bonne condition de régularité à imposer sur le terme de force F est donc

$$S_{T,p}(F) := \sup_{|B|\leq 1} \|F\|_{L^p_T(L^\infty(B))} < +\infty. \tag{16}$$

Effets de moments pour l'équation (2) avec F vérifiant (16).

La proposition suivante est vérifiée.

Proposition 2 *Soit $T > 0$ et $p \geq 1$ tels que $S_{T,p}(F) < +\infty$. Alors, il existe $C > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, et $(x,\xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,*

$$|X(t,x,\xi) - x + t\xi| \leq C(1 + S_{T,p})^{1+\frac{1}{p}}(1 + |\xi|)^{\frac{1}{p}} \tag{17}$$

et

$$|V(t,x,\xi) - \xi| \leq C(1 + S_{T,p})^{1+\frac{1}{p}}(1 + |\xi|)^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

Soit $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Alors, pour tout $(q,p) \geq 1$, $\alpha \geq 0$, il existe une constante C telle que pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^d$ de taille 1 on ait

$$\| \sup_{x\in B} \gamma(x - \cdot\,)(1 + |\xi|)^{\alpha + \frac{1}{qp'}} f(t)\|_{L^q_{T,x,\xi}} \leq C(1 + S_{T,p})^{1+\beta}\|(1 + |\xi|)^\alpha f^{in}\|_{L^q_{x,\xi}}. \tag{19}$$

L'idée de preuve de la proposition 2 est la suivante :

– Pour montrer les estimations sur les trajectoires (17) et (18), on utilise un découpage en temps par rapport à la vitesse ξ sur des intervalles de temps dont la taille est de l'ordre de $\frac{1}{|\xi|}$ et on montre que sur chacun de ces petits intervalles, la trajectoire X reste bien dans une petite boule. Puis, on recolle les morceaux. Notons que cet argument de découpage temps/vitesse ou temps/fréquence a été utilisé dans de nombreux contextes pour des équations dispersives. Ce type de technique a été introduit par Bahouri et Chemin dans [4] pour les équations d'ondes, puis utilisé dans l'article de Burq, Gérard et Tzvetkov dans [6] pour l'équation de Schrödinger (puis par la suite par de nombreux auteurs pour l'équation de Schrödinger) et dans [15] pour l'équation de Liouville.
– Pour montrer les effets de moment (19), on utilise les estimations sur les trajectoires qui nous montre que dès que $p > 1$, alors la mesure des temps t tels qu'une trajectoire reste dans un compact est relativement petite. PLus précisément, on a pour $|\xi| > 1$

$$\mu\Big\{t \in [0,T], X(t,x,\xi) \in B\Big\} \leq \frac{(1 + S_{p,T})^{1+\frac{1}{p}} C(\mu\{B\})}{(1 + |\xi|)^{\frac{1}{p'}}}.$$

Remarque 1 *Ce sont des estimations a priori : le terme de force $F \in C_t(C^\infty_b(\mathbb{R}^d))$ est supposé régulier pour rendre tous les calculs licites. Mais on appelle quand même cela équation de transport avec des termes de force peu régulier car toutes les estimations ne dépendent de F que par l'intermédiaire de $S_{T,p}(F)$. Ces estimations a priori sont suffisantes pour conclure au théorème 4 (en faisant au préalable un procédé d'approximation classique de l'équation de Vlasov-Poisson où le terme E est régularisé).*

Application des effets de moments pour l'équation (2) à l'équation de Vlasov-Poisson.

La proposition suivante est vérifiée

Proposition 3 *Soit* $f^{in} \in L^{\infty}_{x,\xi}$ *et soit* $p \in]3, +\infty[$. *Alors, il existe* $m(p) < 6$ *tel que si*

$$\|f^{in}\|_{L^{1,m(p)}_{x,\xi}} < +\infty.$$

Alors, il existe $T_0 > 0$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$\sup_{\mu\{B\}\leq 1} \|E\|_{L^p_{T_0}(L^\infty(B))} \leq C. \tag{20}$$

De plus, pour tout $p \in]3, +\infty[$, *il existe* $m(p) < 6$ *et* $\alpha > 0$ *tels que*

$$\sup_{\mu\{B\}\leq 1} \|E\|_{L^p_{T_0}(C^\alpha(B))} \leq C. \tag{21}$$

Idée de preuve de la proposition 3.
La preuve du premier point (20) pour p assez proche de 3 se fait en reprenant les calculs qui aboutissent à l'estimation (15) et en utilisant les effets de moment de la proposition 2. La conclusion se fait par un argument de bootstrap qui permet d'avoir le contrôle voulu pour T assez petit. Le cas général $p \in]3, +\infty[$ se déduit à l'aide du cas p proche de 3 par interpolation (voir la fin de l'article [16] pour plus de détails sur les arguments utilisés). Pour la preuve de la deuxième estimation (21), on réfère également à l'article [16]. Notons que d'un point de vue intuitif, si l'on regarde la structure de

$$\nabla E = \nabla(\frac{x}{|x|^3}) * \rho,$$

on remarque qu'il a la même structure que E sauf que le noyau à l'origine est encore plus singulier en 0 (il faut donc plus de moments sur la donnée initiale pour le contrôler). La preuve de (21) reprend donc les arguments utilisés pour montrer l'estimation (20) modulo essentiellement des arguments techniques utilisant la décomposition de Littlewood-Paley (voir par exemple les livres de Chemin [8] ou Alinhac et Gérard [1] pour des références concernant la théorie de Littlewood-Paley). □

Cette première étude nous permet donc, tant que $S_{T,p}(E)$ est borné (ce qui est le cas pour T assez petit) de montrer que les trajectoires de l'équation de Vlasov-Poisson sont une perturbation du transport libre au sens de l'estimation (17) de la proposition 2. Malheureusement, cette approximation est loin de l'approximation (8) demandée dans le théorème 4. En particulier plus la vitesse ξ est grande, plus l'approximation donnée des trajectoires par le transport libre est mauvaise. La section suivante consiste, à l'aide des résultats de cette partie, à montrer un deuxième effet de moment le long des trajectoires de l'équation de Vlasov-Poisson, afin d'obtenir l'estimation (8) tant que $S_{T,p}(E) < +\infty$.

3.2.2 Effets de moments le long des trajectoires et preuve de l'estimation (8).

On a la proposition suivante.

Proposition 4 *Soit $f^{in} \in L^1_{x,\xi} \cap L^\infty_{x,\xi}$, et $p \in [3, +\infty[$. Supposons que $S_{p,T}(E) < +\infty$. Alors, il existe $m(p) < 6$ tel que si*

$$\|f^{in}\|_{L^{1,m(p)}_{x,\xi}} < +\infty,$$

alors, il existe une constante C telle que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $t \in [0, T]$ on ait

$$\sup_{(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^6} \|E^2(s, X(s, x_0, \xi_0))\|_{L^p([0,T])} \leq C.$$

On en déduit que

$$|X(t, x, \xi) - x - t\xi| \leq C|t|^{\frac{1}{p'}+1} \quad et \quad |V(t, x, \xi) - \xi| \leq C|t|^{\frac{1}{p'}}.$$

Idée de preuve de la proposition 4.
Donnons l'idée pour $p = 3 + 0$. En reprenant les calculs qui aboutissent à l'estimation (13), on obtient que

$$|E^2(s, X(s, x_0, \xi_0))| \leq C\|\gamma(X(s, x_0, \xi_0) - \cdot\,)\rho\|_{L^{3+0}}.$$

Pour gagner des moments sur la donnée initiale, il faudrait maintenant montrer que

$$s \to X(s, 0, x, \xi) - X(0, s, x_0, \xi_0)$$

ne reste pas longtemps dans un compact. Pour comprendre ce qu'il se passe, regardons le cas simple du transport libre i.e lorsque $F = 0$. Les idées sont les mêmes que lorsque $S_{T,p}(F)$: en effet, ici les informations que l'on va utiliser sont que les trajectoires de l'équation (2) sont une perturbation du transport libre au sens de des estimations (17) et (18). Cette simplification sur F nous permet d'éviter de gérer les termes de reste.
Si l'on regarde le cas plus simple de l'équation de transport libre

$$\widetilde{X}(s, x, \xi) : s \to x - x_0 + s(\xi + \xi_0).$$

On remarque que
- si $\xi \sim -\xi_0 \Rightarrow$ pas de dispersion
- si ξ est assez loin de $-\xi_0 \Rightarrow$ dispersion.

La stratégie consiste donc à découper ρ en deux parties

$$\rho(t, x) = \rho^1(t, x) + \rho^2(t, x) \quad \text{avec} \quad \rho^1(t, x) = \int_{B(-\xi_0, |\xi_0|^\alpha)} f(t, x, \xi) d\xi$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre judicieusement choisi et qui dépend de la qualité d'approximation des trajectoires par le transport libre que l'on a avec les estimations (17) et (18).
- Dans la première zone, la dispersion est mauvaise, mais un calcul montre que la taille de cette zone est relativement petite. On obtient donc un gain de moments directement avec les inégalités de Hölder.
- Dans le deuxième zone, ξ est assez loin de $-\xi_0$, on peut prouver des effets de moments et reprendre les arguments utilisés précédemment sur les effets de moment

ce qui termine l'idée de la preuve de la proposition 4. □.

3.2.3 Obtention des estimations globales en temps.

Pour l'instant, on n'a montré le théorème 4 que localement en temps, car on ne sait a priori estimer $S_{T,p}(E)$ que si T est assez petit. Pour obtenir des estimations globales en temps et terminer la preuve du théorème 4, il suffit de montrer que $S_{T,p}(E) < +\infty$ pour tout $T > 0$. Le problème est le suivant :
Les méthodes dispersives nous permet d'avoir l'estimation

$$\sup_{\mu\{B\}\leq 1} \|E\|_{L^p_{T_0}(L^\infty(B))} \leq C(T, \|f^{in}\|_{L^{1,m(p)}})(1+S_{T,p})^{1+\beta}$$

où $\beta > 0$ ce qui permettait de conclure par un argument de Bootstrap pour T assez petit. On a en fait la proposition suivante qui permet d'obtenir le théorème 4 globalement en temps.

Proposition 5 *Pour tout $p \in [3, +\infty[$, il existe $m(p) < 6$ tel que pour tout $T > 0$*

$$\sup_{\mu\{B\}\leq 1} \|E\|_{L^p_{T_0}(L^\infty(B))} \leq C(T, \|f^{in}\|_{L^{1,m(p)}})(1+S_{T,p})^{1-0}.$$

Idée de preuve de la proposition 5.
On va interpoler les estimations obtenues via la méthode dispersive qui a l'avantage de nous donner un contrôle de E pour des données initiales ayant strictement moins de 6 moments dans $L^1_{x,\xi}$ dans un espace C^α plus regulier que L^∞, quitte à se localiser en temps et en espace, avec le résultat de propagation des moments obtenu par Lions et Perthame (voir théorème 2) qui a l'avantage de donner des estimations globales en temps ne faisant pas apparaître le terme $S_{T,p}(E)$. La difficulté consiste ici à gérer le terme non linéaire E lors de l'interpolation. On découpe E comme une somme de fonctions localisées en fréquence sur des couronnes via la décomposition de Littlewood-Paley :

$$E := \Delta_0 E + \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta_k E$$

où Δ_0 est l'opérateur de localisation en fréquence sur une boule centrée en 0 et où pour $k \geq 1$, Δ_k sont des opérateurs de localisation en fréquence sur des couronnes de taille 2^k (voir [1] ou [8] pour une définition précise de ces opérateurs). On a pour tout $\theta \in [0,1]$

$$\|\Delta_k E\|_{L^\infty(B)} \leq \|\Delta_k E\|^\theta_{L^\infty(B)} \|\Delta_k E\|^{1-\theta}_{L^\infty(B)}. \tag{22}$$

Il y a deux façons d'estimer $\|\Delta_k E\|_{L^\infty(B)}$:

• La première utilise le théorème 2 de Lions et Perthame et les inégalités de Bernstein (voir l'article de Chemin dans [8]). On obtient que pour tout $q \in]\frac{3}{2}, +\infty[$, il existe $m(q) < 6$ tel que si

$$\|f^{in}\|_{L^{1,m(q)}_{x,\xi}} < +\infty,$$

alors, pour tout $T > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\|\Delta_k E\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)} \leq C 2^{\frac{3k}{q}} \|\Delta_k E\|_{L^\infty_{[0,T]}(L^q)} \leq C 2^{\frac{3k}{q}}. \tag{23}$$

L'estimation (23) est intéressante pour deux raisons.

– D'abord, ces estimations sont vérifiées pour des données initiales ayant strictement moins de 6 moments dans $L^1_{x,\xi}$.
– Ensuite, le terme $S_{T,p}(E)$ n'apparaît pas dans les estimations.

Le seul problème de cette estimation est que la norme dans laquelle est estimée E est plus faible que L^∞, ce qui fait apparaître une puissance positive de 2^k dans les estimations.

• La deuxième façon d'estimer $\|\Delta_k E\|_{L^\infty(B)}$ est d'utiliser notre approche qui nous permet de contrôler E dans un espace de type C^α pour des données initiales ayant strictement moins de 6 moments dans $L^1_{x,\xi}$ avec $\alpha > 0$ assez petit. Plus précisément, en reprenant les arguments énoncés ici, il est montré dans [16], que pour tout $p \in]3, \frac{10+\sqrt{88}}{6}[$ il existe $m(p) < 6$ tel que

$$\|f^{in}\|_{L^{1,m(p)}_{x,\xi}} < +\infty,$$

alors, pour tout $T_0 > 0$ il existe une constante C telle que pour tout $t \in [0, T_0]$

$$\|\Delta_k E^2(t)\|_{L^\infty(B)} \leq C 2^{q(-1+\frac{3}{p+0})} \Big[\sup_{x\in B_2} \|\widetilde{\gamma}(x-\cdot\,)\rho(t)\|_{L^{p+0}} + 1\Big] \tag{24}$$

où B_2 est une boule de taille un peu plus grande que B.

En combinant les estimations (24) et (23) avec q qui sera pris assez grand par rapport à θ, et en appliquant l'estimation (22), on en déduit que pour tout $p \in]3, \frac{10+\sqrt{88}}{6}[$, il existe $m(p) < 6$ tel que si

$$\|f^{in}\|_{L^{1,m(p)}_{x,\xi}} < +\infty,$$

alors, pour tout $T_0 > 0$ il existe une contante C telle que pour tout $t \in [0, T_0]$

$$\|\Delta_k E(t)\|_{L^\infty(B)} \leq C 2^{-k(0+0)} (\sup_{x\in B_2} \|\widetilde{\gamma}(x-\cdot\,)\rho(t)\|^{\theta}_{L^{p+0}} + 1). \tag{25}$$

Maintenant, en reprenant les estimations obtenues pour montrer l'estimation (20), on a

$$\sup_{x\in B_2} \|\widetilde{\gamma}(x-\cdot\,)\rho(t)\|_{L^{p+0}} \leq C((1 + S_{T,p}(E))^{1+\beta}$$

où $\beta > 0$. Pour terminer l'idée de preuve, on choisit θ assez petit de telle sorte que $(1+\beta)\theta < 1$ ce qui permet d'obtenir la proposition 5. □

Références

[1] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* Savoirs Actuels. [Current Scholarship]. InterEditions, Paris, 1991.

[2] A. A. Arsen′ev. Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations. *U.S.S.R. Comput. Math. Phys.*, 15 :131–143, 1975.

[3] A. A. Arsen′ev. Some estimates for the solution of the Vlasov equation. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 25(1) :80–87, 159, 1985.

[4] H. Bahouri and J.-Y. Chemin. Équations d'ondes quasilinéaires et estimations de Strichartz. *Amer. J. Math.*, 121(6) :1337–1377, 1999.

[5] N. Bournaveas, V. Calvez, S. Gutierrez, and B. Perthame. Global existence for a kinetic model of chemotaxis via dispersion and Strichartz estimates. *Submitted*, 2006.

[6] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, 126(3) :569–605, 2004.

[7] F. Castella and B. Perthame. Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(6) :535–540, 1996.

[8] J.-Y. Chemin. *Perfect incompressible fluids*, volume 14 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1995 French original by Isabelle Gallagher and Dragos Iftimie.

[9] R. DiPerna and P.-L. Lions. Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(12) :655–658, 1988.

[10] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(6) :729–757, 1989.

[11] I. Gasser, P.-E. Jabin, and B. Perthame. Regularity and propagation of moments in some nonlinear Vlasov systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 130(6) :1259–1273, 2000.

[12] R. Glassey and J. Schaeffer. On global symmetric solutions to the relativistic vlasov–poisson equation in three space dimensions. *Math. Method. Appl. Sci.*, 24 :143–157, 2001.

[13] E. Horst and R. Hunze. Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 6(2) :262–279, 1984.

[14] P.-L. Lions and B. Perthame. Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system. *Invent. Math.*, 105(2) :415–430, 1991.

[15] D. Salort. Dispersion and Strichartz estimates for the Liouville equation. *J. Differential Equations*, 233(2) :543–584, 2007.

[16] D. Salort. Transport equation with undbounded fields and applications to the Vlasov-Poisson equation. *A paraître dans M3AS*, 2008.