Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

William Bordeaux Montrieux

Loi de Weyl presque sûre pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints et estimations de résolvante près du bord de l'image du symbole

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° IV, 18 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A4_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n$^{\text{o}}$ IV, 1-18

Loi de Weyl presque sûre pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints et estimations de résolvante près du bord de l'image du symbole

William Bordeaux Montrieux

Table des matières

1 Loi de Weyl presque sûre pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints

Depuis les travaux de L.N. Trepheten [14], E.B Davies [2] et M. Zworski [15], nous savons que la norme de la résolvante peut être très grande, même loin du spectre. Dit autrement, le spectre est très instable sous petite perturbation. Une question naturelle est de comprendre comment le spectre bouge quand l'opérateur est perturbé, et notamment d'étudier l'effet des perturbations aléatoires.

Mildred Hager [6] a étudié une large classe d'opérateurs h-pseudo-différentiels non-autoadjoints sur la droite réelle avec des perturbations multiplicatives aléatoires et montre, avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque $h \to 0$ que les valeurs propres se distribuent dans l'intérieur de l'image du symbole selon une loi de Weyl (bien connu dans le cas autoadjoint). La méthode impose une condition de non-annulation du crochet de Poisson $\{p, \bar{p}\}$.

Hager et Sjöstrand [8], en se fondant sur une nouvelle approche ont étendu ce résultat aux cas des opérateurs sur $\mathbb{R}^n$; l'hypothèse de non-annulation du crochet de Poisson a été remplacée par une condition plus faible sur les volumes. La classe de perturbation étudiée est différente de [6].

Dans ce travail, on se propose de continuer la série des travaux sur les distributions spectrales de perturbations aléatoires d'opérateurs non-autoadjoints. Nous étudions un système elliptique sur S^1 avec une perturbation aléatoire de rang inférieur. Sous des hypothèses additionnelles nous montrons que les grandes valeurs propres se distribuent **presque sûrement** selon une loi de Weyl. Notre analyse est principalement basée sur une réduction semiclassique, où on utilisera et étendra les méthodes de Hager [6] au cas des systèmes, puis l'utilisation du lemme de Borel-Cantelli.
Remerciements : Ce travail fait partie de la thèse de Doctorat de l'auteur préparée sous la direction de J. Sjöstrand.

1.1 Résultats

Par simplicité nous ne considérons que le cas scalaire, les grandes idées demeurant.

Cas semiclassique Considérons l'opérateur différentiel non-autoadjoint sur $L^2(S^1, \mathbb{R})$.

$$P = \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x)(hD_x)^\alpha, \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

muni du domaine

$$H^m_{sc} := \{u \in L^2(S^1); \quad \|u\|_{H^m_{sc}} := \sum_{\alpha \leq m} \|(hD_x)^\alpha u\| < \infty\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme L^2. a_α est supposé lisse.

Hypothèse 1.1 *P est elliptique au sens où $a_m(x) \neq 0$.*

Sous cette condition, $P - z : \mathcal{D}(P) \to L^2(S^1)$ est Fredholm d'indice zéro.

La perturbation aléatoire est de la forme δQ_ω où δ est un petit paramètre et

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} q_\alpha(x)(hD_x)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \leq m-1,$$

où q_α est une série de Fourier aléatoire satisfaisant

$$q_\alpha(x) = \sum q_{\alpha,k}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad q_{\alpha,k} \sim \mathcal{N}(0, (\sigma_{\alpha,k})^2). \tag{1.1}$$

Toutes nos variables aléatoires sont indépendantes. On rajoute aussi une hypothèse de sommabilité sur les variances.

Hypothèse 1.2 • *Pour tout* $\alpha, \sigma_{\alpha,k} \leq C\langle k\rangle^{-\rho}$, $\rho > 1$,
- $\sigma_{\alpha_1,k} \geq \frac{1}{C}\langle k\rangle^{-\rho}$.

Sous ces hypothèses, Q_ω est presque sûrement borné comme opérateur de $\mathcal{D}(P) \to L^2$.

Nous introduisons l'ensemble $\Lambda(p)$ des points z qui vérifient $\{p, \bar{p}\}(\rho) \neq 0$ si $\rho \in p^{-1}(z)$, nous avons donc

$$\Lambda(p) = p(T^*S^1) \setminus \{z,\ \exists \rho \in T^*S^1 \text{ avec } p(\rho) = z,\ \{p, \bar{p}\}(\rho) = 0\}. \tag{1.2}$$

Nous pouvons montrer que pour tout point z de $\Lambda(p)$ nous avons

$$p^{-1}(z) = \{\rho_+^j(z), \rho_-^j(z);\ j = 1, \ldots, \beta(z)\}, \quad \pm\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_\pm) > 0, \tag{1.3}$$

où $\beta(z)$ est constant sur chaque composante connexe de $\Lambda(p)$.

On rajoute aussi des hypothèses additionnelles.

Hypothèse 1.3 *Pour tout* z *appartenant à* $\Gamma \Subset \Lambda(p)$, *on demande que*

$$\rho_\pm^j(z) = (x^j, \xi_\pm^j), \text{ et } x^j \neq x^k,\ j \neq k.$$

L'opérateur perturbé aléatoirement est noté

$$P_\delta := P - \delta Q_\omega. \tag{1.4}$$

Théorème 1.4 *Soit* $\Gamma \Subset \Lambda(p)$ *avec* $\partial\Gamma$ *lisse. Soit* $N_0 > 0$ *et* $\epsilon > 0$. *Il existe* $C > 0$ *tel que si* $h^{N_0} \leq \delta \leq h^{(\rho+\epsilon+\frac{1}{4})\beta+1}$, *nous avons avec une probabilité* $\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h \ln h^{-1}}}$, *que le spectre de* P_δ *est discret et*

$$|\#(\sigma(P_\delta) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h}\operatorname{vol} p^{-1}(\Gamma)| \leq C\frac{\sqrt{h \ln(\frac{1}{\delta})}}{h}.$$

La probabilité est intéressante si $\epsilon > 1/4$.

On dit deux mots pour le cas matriciel : On introduit les ensembles

$$\Sigma := \bigcup_{(x,\xi)\in T^*S^1} \sigma(p(x, \xi)), \quad \sigma(p(x, \xi)) := \text{spectre de } p(x, \xi)$$

$$\Phi = \{z \in \Sigma;\ \exists \rho \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p(\rho)), \{q_z, \bar{q}_z\}(\rho) = 0\}$$

où $q_z(x, \xi) = \det(p(x, \xi) - z)$. Dans le théorème final, les domaines Γ sont inclus dans $\Sigma \setminus \Phi$ (dans le cas scalaire, on retrouve $\Lambda(p) = \Sigma \setminus \Phi$). $\operatorname{vol} p^{-1}(\Gamma)$ est alors remplacé par $\iint m_\Gamma(x, \xi) dx d\xi$, où $m_\Gamma(x, \xi) = \#(\sigma(p(x, \xi)) \cap \Gamma)$.

Hautes fréquences Nous considérons l'opérateur non-autoadjoint dans $L^2(S^1)$

$$P = \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

muni du domaine $\mathcal{D}(P) := H^m$, qui est l'espace de Sobolev usuel. a_α est supposé lisse.

Nous notons $p_m := a_m \xi^m$ son symbole principal classique.

Hypothèse 1.5 *P est elliptique au sens où $a_m(x) \neq 0$.*

Sous cette condition, $P - z : \mathcal{D}(P) \to L^2(S^1)$ est Fredholm d'indice zéro. Nous introduisons l'ensemble ouvert qui est un **cône**

$$\Lambda(p_m) = p(T^*S^1) \setminus \{z; \exists \rho \in T^*S^1 \text{ avec } p_m(\rho) = z, \{p_m, \overline{p_m}\}(\rho) = 0\}.$$

Pour tout point de $\Lambda(p_m)$, nous pouvons montrer que

$$p_m^{-1}(z) = \{\rho_+^j(z), \rho_-^j(z), j = 1, \ldots, \beta(z)\}, \quad \pm\frac{1}{i}\{p_m, \overline{p_m}\}(\rho_\pm) > 0,$$

où $\beta(z)$ est constant sur chaque composante connexe de $\Lambda(p_m)$.

Notre perturbation aléatoire Q_ω est d'ordre inférieur

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} q_\alpha(x) D_x^\alpha \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq m - 1,$$

où q_α est une série de Fourier aléatoire

$$q_\alpha(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_{\alpha,k} e^{ikx}, \quad q_{\alpha,k} \sim \mathcal{N}(0, (\sigma_{\alpha,k})^2).$$

Toutes les variables aléatoires sont supposées indépendantes. On ajoute deux conditions sur les variances.

Hypothèse 1.6 *Il existe $C > 0$ tel que*
- $\sigma_{\alpha,k} \leq C\langle k\rangle^{-\rho}$, $\rho > 1$,
- *pour tout α,* $\sigma_{\alpha_1,k} \geq \frac{1}{C}\langle k\rangle^{-\rho}$.

Nous rajoutons ensuite des hypothèses sur les point $\rho_\pm$.

Hypothèse 1.7 *Pour tout z appartenant à $\Lambda(p_m)$, on demande que $\rho_\pm^j(z) = (x^j, \xi_\pm^j)$, et que $x^j \neq x^k$, $j \neq k$.*

Nous étudions alors la distribution des grandes valeurs propres de $P - Q_\omega$. Soit $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Soit $g \in C^\infty([\theta_1, \theta_2],]0, \infty[)$. Nous définissons un profil conique comme étant un ensemble de la forme

$$\Gamma_{\theta_1,\theta_2}^g = \{re^{i\theta}; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad 0 \leq r \leq g(\theta)\}.$$

Théorème 1.8 *Soit* Γ *un profil conique* $\Subset \Lambda(p_m)$*. Si* $m - \alpha_1 - \rho - \frac{3}{4} > 0$*, alors il existe* $\tilde{M}$ *un ensemble de mesure 1,* $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$*, tel que* $\forall \omega \in \tilde{M}$*, le spectre de* $P - Q_\omega$ *est discret, et on a,* $\forall \lambda > 0$*,*

$$|\#(\sigma(P - Q_\omega) \cap \lambda\Gamma) - \frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}\, p^{-1}(\lambda\Gamma)| \leq C(\omega) + \tilde{C}\lambda^{1/(2m)}\sqrt{\ln \lambda}.$$

1.2 Idées des preuves

Problème de Grushin et stratégie de Hager [6] Nous commençons par rappeler un lemme de constructions de quasimodes.

Lemme 1.9 P *un opérateur* h*-pseudodifférentiel sur* $\mathbb{R}$*, de symbole principal* p*. Si* $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R})$ *avec*

$$p(\rho_0) = z, \quad \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_0) = \{\mathrm{Im}\, p, \mathrm{Re}\, p\}(\rho_0) > 0,$$

alors il existe une solution BKW, u normalisée, microlocalement concentrée près de ρ*, de la forme* $u = h^{-1/4}a(h)\chi(x - x_0)e^{\frac{i}{h}\phi(x)}$*,* $\phi'_+(x_0) = \xi_0$*,* $a(h) \sim a_0 + ha_1 + \dots$*,* $a_0 \neq 0$*, telle que*

$$\|(P - z)u\| = \mathcal{O}(h^\infty).$$

$\chi \in C_0^\infty(\mathrm{Vois}(0, \mathbb{R}))$.

Pour la preuve on consultera [4].

Dans la suite P est l'opérateur h-différentiel évoqué plus haut. Soit $z \in \Gamma \subset\subset \Lambda(p)$.

On choisit dans le lemme χ avec un support de longueur $< 2\pi$ et on identifie les intervalles de longueur $< 2\pi$ à des intervalles de S^1.

On note e_+^j le quasimode normalisé de $P - z$ microlocalement concentré près de ρ_+^j, et e_-^j le quasimode normalisé de $(P - z)^*$ microlocalement concentré près de ρ_-^j.

Comme dans [6], nous allons poser un problème de Grushin. Si nous définissons $R_+ : H_{sc}^m \to \mathbb{C}^\beta$, $R_- : \mathbb{C}^\beta \to L^2$, par $(R_+u)_j = (u|e_+^j)$, $R_-u_- = \sum_j u_-^j e_-^j$, alors

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{sc}^m \times \mathbb{C}^\beta \to L^2 \times \mathbb{C}^\beta$$

est bijectif d'inverse

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F_+ \\ G_- & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où

– $(G_-v)_j = (u|e_-^j)$,
– $F_+u_+ = \sum_j v_+^j e_+^j$, et $\|E\|_{L^2\to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}})$.

Nous travaillons sous les hypothèses du théorème 1.4.

Considérons maintenant l'opérateur perturbé.

Lemme 1.10 *Il existe $C>0$ tel que pour tout $0<h\ll 1$ nous avons*

$$\mathbb{P}(\|Q\|_{H^m_{sc}} \leq 1/\sqrt{h}) \geq 1 - Ce^{-1/(Ch)}.$$

Si la norme de la perturbation δQ_ω est $\ll \sqrt{h}$, (soit $\|\delta Q_\omega\|_{H^m_{sc}} \ll \sqrt{h}$) la matrice de Grushin perturbée

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} P - z + \delta Q_\omega & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix},$$

a un inverse borné

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}\left(1 - \delta\begin{pmatrix} QE & QE_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} E^\delta & E^\delta_+ \\ E^\delta_- & E^\delta_{-+} \end{pmatrix}$$

et nous avons des séries de Neumann pour les différentes entrées, en particulier,

$$E^\delta_{-+} = E_{-+} + \delta E_- Q E_+ + \delta^2 E_- QEQE_+ + \dots .$$

Et nous obtenons que

$$z \in \sigma(P_\delta) \iff \det E^\delta_{-+}(z) = 0.$$

Proposition 1.11 *Nous avons*

$$\partial_{\bar z} \det E_{-+}(z) + f(z)\det E_{-+}(z) = 0, \tag{1.5}$$

où $f(z) := f_+(z) + f_-(z)$,

$$f_+(z) = \operatorname{tr}((\partial_{\bar z} R_+)E_+), \quad f_-(z) = \operatorname{tr}(E_-\partial_{\bar z}R_-). \tag{1.6}$$

Donc

$$\partial_{\bar z}(e^{F(z)/h}E_{-+}(z)) = 0 \ \textit{si}\ \frac{1}{h}\partial_{\bar z}F(z) = f(z). \tag{1.7}$$

De plus nous avons

$$\frac{1}{h}(\Delta \operatorname{Re} F(z)) d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z = \frac{1}{h}\sum_{1\leq j\leq\beta}(d\xi^j_- \wedge dx^j_- - d\xi^j_+ \wedge dx^j_+) + \mathcal{O}(1). \tag{1.8}$$

Preuve. Pour la démonstration, nous suivons le cours de J. Sjöstrand [12] (Séville ou Xedp) qui est une variante de celle de Hager [6] ou de l'auteur [1]. (1.5) et (1.6) suit de $\partial_{\bar{z}}\mathcal{E} + \mathcal{E}(\partial_{\bar{z}}\mathcal{P})\mathcal{E} = 0$. Nous avons

$$f_+(z) = \sum_{1\leq j\leq \beta} \langle e_+^j, \partial_z e_+^j\rangle + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Utilisant le fait que e_+ est comme une gaussienne, avec un maximum au point $x_+(z)$, nous pouvons appliquer une variante de la phase stationnaire pour avoir

$$\langle e_+^j, \partial_z e_+^j\rangle = -\frac{i}{h}\overline{(\partial_z \phi_+^j)(x_+^j(z), z)} + \mathcal{O}(1),$$

ϕ_+ a été introduit au lemme 1.9. Utilisant que $\phi(x_+(z), z) = 0$, $\phi'_x(x_+(z), z) = \xi_+(z)$, et après avoir appliquer ∂_z à $\phi(x_+(z), z) = 0$ nous obtenons que $(\partial_z\phi)(x_+(z), z) = -\xi_+\partial_z x_+(z)$. De $p(x_+(z), \xi_+(z)) = z$ nous en tirons que

$$\partial_{\bar{z}} x_+ = \frac{p'_\xi}{\{p, \bar{p}\}}(\rho_+), \quad \partial_{\bar{z}}\xi_+ = \frac{-p'_x}{\{p, \bar{p}\}}(\rho_+).$$

Nous avons un résultat analogue pour f_- (1.6). Ce qui donne

$$\frac{1}{h}(\Delta \operatorname{Re} F(z)) = \operatorname{Re} 4\partial_z f = \frac{2}{h}\sum_{1\leq j\leq\beta}\left(\frac{1}{\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\}(\rho_+^j)} - \frac{1}{\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\}(\rho_-^j)}\right) + \mathcal{O}(1). \tag{1.9}$$

En écrivant $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, nous avons

$$d\xi_+ \wedge dx_+ = \frac{-2}{\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\}(\rho_+)} d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z.$$

On a aussi un résultat similaire avec $d\xi_- \wedge dx_-$. $\square$

Comme pour $\det E_{-+}$ nous avons l'équation (1.5) pour $\det E^\delta_{-+}$

$$\partial_{\bar{z}} \det E^\delta_{-+}(z) + f^\delta(z) \det E^\delta_{-+}(z) = 0, \tag{1.10}$$

où

$$f^\delta(z) = f(z) + \mathcal{O}(\frac{\delta}{h^2}).$$

Aussi $\frac{1}{h}\partial_{\bar{z}} F^\delta(z) = f^\delta(z)$, avec $F^\delta = F + \mathcal{O}(\frac{\delta}{h})$. On a finalement trouvé une fonction holomorphe $e^{F^\delta/h}\det E^\delta_{-+}$ avec les mêmes zéros que E^δ_{-+}. On termine comme chez Hager [6].

Proposition 1.12 *Avec une probabilité* $\geq 1 - Ce^{-1/(Ch)}$, *nous avons*

$$\ln|u_\delta| \leq \frac{1}{h}(\operatorname{Re} F(z)),\ \forall z\in\Gamma; \quad u_\delta := e^{F^\delta/h}\det E^\delta_{-+}. \tag{1.11}$$

Soit $\epsilon > 0$. Supposons $h^{N_0} \leq \delta \leq h^{(\rho+\epsilon+\frac{1}{4})\beta+1}$. Nous avons, pour chaque z dans Γ, avec une probabilité $\geq 1 - Ch^{2\epsilon}$,

$$\ln|u_\delta| \geq \frac{1}{h}(\operatorname{Re} F(z) - Ch\ln((h\delta)^{-1}). \tag{1.12}$$

Pour avoir le théorème 1.4, nous appliquons ensuite un résultat de comptage de zéros de fonctions holomorphes : proposition 1.8.1 [7].

L'idée principale derrière (1.12) est de montrer avec une grande probabilité que $E_-Q_\omega E_+$ est dominant dans l'expression E^δ_{-+}. On peut alors écrire $\det E^\delta_{-+}$ sous la forme

$$\det E^\delta_{-+} = \delta^\beta \prod_j \langle Qe^j_+, e^j_-\rangle + \mathcal{O}(\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h}).$$

On remarque ensuite que $\langle Qe_+, e_-\rangle$ peut être écrit comme une somme de variables gaussiennes centrées indépendantes : $\langle Qe_+, e_-\rangle \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Appliquant la formule standard pour la variance de somme de gaussiennes, nous obtenons pour la variance σ^2

$$\sigma^2 = \sum_{\alpha,k} (\sigma_{\alpha,k})^2 |\langle e_k (hD_x)^\alpha e_+, e_-\rangle|^2,$$

où $e_k := e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$. On peut montrer que $\sigma^2 \asymp h^{2\rho-1/2}$.

Hautes fréquences Nous faisons maintenant les hypothèses du théorème 1.8.

On introduit l'ensemble

$$\Lambda(p_m) \Supset \Gamma_{r_1,r_2} = \{re^{i\theta};\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ r_1 \leq r \leq r_2\}$$

pour $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ et $0 < r_1 < r_2 < \infty$. On donne ici les idées de la preuve de notre théorème pour des profils coniques de la forme $\Gamma_{0,\lambda}$.

Nous souhaitons compter les valeurs propres de $P - Q_\omega$ dans $\Gamma_{1,\lambda}$ quand $\lambda \to \infty$.

Soit $k(\lambda)$ le plus grand entier k pour lequel $2^k \leq \lambda$, et décomposons $\Gamma_{1,\lambda}$ sous la forme suivante

$$\Gamma_{1,\lambda} = (\bigcup_0^{k(\lambda)-1} \Gamma_{2^k,2^{k+1}}) \cup \Gamma_{2^{k(\lambda)},\lambda}.$$

On commence par compter les valeurs propres de $P - Q_\omega$ dans $\Gamma_{2^k,2^{k+1}}$. Si on définit h par $h^m 2^k = 1$ (réduction semiclassique), on a

$$\begin{gathered}\#(\sigma(P-Q) \cap \Gamma_{2^k,2^{k+1}}) = \#(\sigma(h^m(P-Q)) \cap \Gamma_{1,2})\\ \frac{1}{2\pi}\operatorname{vol} p_m^{-1}(\Gamma_{2^k,2^{k+1}}) = \frac{1}{2\pi h}\operatorname{vol} p_m^{-1}(\Gamma_{1,2}),\end{gathered}$$

On rappelle que p_m est le symbole principal classique de P.

Nous pouvons ensuite appliquer les résultats du cas semiclassique. Alors, si $m - \alpha_1 - \rho - \frac{3}{4} > 0$, avec une probabilité $\geq 1 - \epsilon_k$, ($\epsilon_k \to 0$ quand $k \to \infty$, et vérifiant $\sum \epsilon_k < \infty$) nous avons

$$|\#(\sigma(P-Q) \cap \Gamma_{2^k, 2^{k+1}}) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{vol}\, p_m^{-1}(\Gamma_{2^k,2^{k+1}})| \leq C 2^{k/(2m)} O(k). \tag{1.13}$$

Similairement, avec une probabilité $\geq 1 - \epsilon_{k(\lambda)}$, nous avons simultanément pour tout $\tilde{\lambda} \in [\lambda, 2\lambda[$

$$|\#(\sigma(P-Q) \cap \Gamma_{2^{k(\lambda)}, \tilde{\lambda}}) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{vol}\, p_m^{-1}(\Gamma_{2^{k(\lambda)},\tilde{\lambda}})| \leq C \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}. \tag{1.14}$$

Pour avoir (1.14), il est important que le théorème 1.4 soit aussi vérifié uniformément pour une famille de domaine Γ. Puisque la somme $\sum_0^{+\infty} \epsilon_k$ est finie, le lemme de Borel-Cantelli implique que, presque sûrement ; il existe un entier $k(\omega)$ tel que pour tout $\lambda \geq 2^{k(\omega)}$, nous avons

$$|\#(\sigma(P-Q) \cap \Gamma_{2^{k(\omega)}, \lambda}) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{vol}\, p_m^{-1}(\Gamma_{2^{k(\omega)},\lambda}))| \leq \widetilde{C} \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}. \tag{1.15}$$

Ce qui implique le théorème principal, puisque le spectre de $P - Q_\omega$ est presque sûrement discret.

2 Estimations de résolvante

Une question intéressante est d'étudier la norme d'opérateur, P, h-pseudo-différentiel non-autoadjoint. Nous savons qu'en général, nous avons un quasimode lorsque le paramètre spectral se promène dans l'intérieur de l'image du symbole principal, dans le sens suivant : Il existe une famille de fonctions $u(h) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ normalisées dans L^2 telles que $\|(P-z)u(h)\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^\infty)$, impliquant que

$$\|(P-z)^{-1}\| \geq \frac{1}{C_N h^N}$$

(en adoptant la convention que la $\|(P-z)\| = \infty$ si z appartient au spectre de P). Une autre question est donc de comprendre ce qui se passe quand z est proche du bord de l'image du symbole. N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski [4] ont montré pour certain point du bord, la résolvante à une croissance $1/h^{(k/k+1)}$ dans des disques de rayon $\mathcal{O}(h^{(k/k+1)})$, centrés en certain point du bord, où $k \in 2, 4, \ldots$. Nous améliorons ce résulat dans le cas $k = 2$ pour un opérateur modèle $hD_x + g(x)$ où $g \in C^\infty(S^1)$. La clé principale réside dans la construction de quasimode très près du point du bord. Certaines généralisations ont été ensuite obtenues par J. Sjöstrand [11]. On citera aussi J. Martinet [10] et Almog-Helffer-Pan [9].

2.1 Résultat

Nous considérons l'opérateur modèle non-autoadjoint, étudié par M. Hager [5], dans $L^2(S^1)$:

$$P = hD_x + g(x), \quad h \in (0,1], \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

muni du domaine $H^1_{sc}(S^1) := \{u \in L^2(S^1); \quad \|u\| + \|hD_x u\| < +\infty\}$. Nous imposons :

Hypothèse 2.1 $\operatorname{Im} g' \neq 0$, *sauf en deux points critiques deux* S^1, *a et b, tels que, pour tout point x du cercle,*

$$\operatorname{Im} g(a) \leq \operatorname{Im} g(x) \leq \operatorname{Im} g(b).$$

Nous imposons $\operatorname{Im} g''(a) > 0$, *c'est à dire que p est de type fini d'ordre 2 au sens de [4], sur la partie de* $\partial\Sigma$ *donnée par* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} g(a)$, *où* $\Sigma = \{\operatorname{Im} g(a) \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} g(b)\}$.

Pour simplifier, nous avons pris $a = 0$, $\operatorname{Im} g(a) = 0$ et $\operatorname{Im} g(b) > 1$. Le spectre est discret et porté par la droite d'équation $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(x)dx$.

Dans ces conditions, pour tout z dans l'intérieur de Σ, il existe $\rho_\pm = (x_\pm, \xi_\pm)$ tels que

$$\rho_\pm(z) \in p^{-1}(z), \quad \pm\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = \mp \operatorname{Im} g'(x_\pm) > 0.$$

Proposition 2.2 *Soit* $P = hD_x + g(x)$ *comme ci-dessus. Soit K un compact contenu dans* $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(x)dx\}$. *Nous avons les assertions suivantes :*
i) ([4]) Il existe $\tilde{C} > 0$ *et* $C > 0$ *tel que*

$$\forall z \in K \ \text{avec} \ \operatorname{Im} z \leq h^{2/3}/C, \quad \|(P-z)^{-1}\| \leq \tilde{C} h^{-2/3}.$$

ii) Pour tout z de K, vérifiant $\operatorname{Im} z \gg h^{2/3}$, *nous avons la résolvante qui satisfait*

$$\|(P-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{h}(\operatorname{Im} z)^{1/4}} \mathcal{O}(1) e^{C\frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{2}}.$$

2.2 Idée de la preuve

On restreint notre étude au cas : $h^{2/3} \ll \operatorname{Im} z \ll 1$. Nous notons e_+, e_- les quasimodes respectifs de $P-z$ et $(P-z)^*$. Comme dans la section précédente, grâce à l'existence de quasimodes, nous allons pouvoir formuler un problème de Grushin.

Nous restreignons le paramètre spectral z à un domaine compact K_h inclus dans Σ, disjoint et situé en dessous de la droite contenant le spectre, et tel que $\operatorname{Im} z$ vérifie $\operatorname{Im} z \gg h^{2/3}$. On remarque alors que les points $x_+(z)$ et $x_-(z)$ vont se rapprocher lorsque $\operatorname{Im} z \to 0$. Nous avons, en effet,

$$x_-(z) - x_+(z) \asymp (\operatorname{Im} z)^{1/2}.$$

Remarque 2.3 On identifiera fréquemment les intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur $< 2\pi$ à des intervalles de S^1.

On peut trouver des intervalles J_+ et J_- tels que

$$x_\pm(K_h) \subset J_\pm, \quad \operatorname{dist}(J_+, J_-) > \frac{1}{C} h^{1/3}.$$

On pose $I_\pm = S^1 \setminus \overline{J_\mp}$, de plus nous notons $I_+ = (a_+, b_+)$, $a_+ < 0$ peut être choisi indépendant de h tandis que $b_+ > 0$ est d'ordre $\simeq h^{1/3}$, et $I_- = (b_-, a_-)$, avec $a_- > 0$ indépendant de h, et $0 > b_- \simeq -h^{1/3}$.

Considérons sur I_+, la fonction

$$e_+ := c_+(z,h) e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x} (g(y)-z)dy} = c_+ e^{\frac{i}{h}\varphi_+}. \tag{2.1}$$

Lemme 2.4 *On désigne par $e_+ \in H^1_{sc}(I_+)$ la solution normalisée dans $L^2(I_+)$ de $(P - z)e_+ = 0$ sur I_+. Nous avons la représentation asymptotique suivante pour $h^{2/3} \ll \operatorname{Im} z \ll 1$,*

$$e_+ \sim \frac{(\operatorname{Im} z)^{1/8}}{h^{1/4}} \left(\mathrm{cst} + \mathcal{O}(\frac{h}{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}) \right) e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x} (g(y)-z)dy}.$$

En fait, de manière plus précise, nous avons

$$e_+ \sim \frac{\phi_+''(x_+)^{1/4}}{(\pi h)^{1/4}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{h}{x_+^3} \right) \right) e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x} (g(y)-z)dy}. \tag{2.2}$$

Rappelons que,

$$x_+ \asymp \operatorname{Im} z^{1/2} \text{ et } \phi_+(x) := \operatorname{Im} \varphi_+(x), \quad \phi_+''(x_+) \asymp |x_+| \asymp \operatorname{Im} z^{1/2}.$$

De manière analogue nous avons :

Lemme 2.5 *On désigne par $H^1_{sc}(I_-) \ni e_- = c_- e^{\frac{i}{h}\varphi_-}$ la solution normalisée dans $L^2(I_-)$ de $(P - z)^* e_- = 0$ sur I_-. e_- admet la représentation asymptotique suivante pour $h \to 0$ et $h^{2/3} \ll \operatorname{Im} z \to 0$,*

$$e_- \sim \frac{(\operatorname{Im} z)^{1/8}}{h^{1/4}} \left(\mathrm{cst} + \mathcal{O}(\frac{h}{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}) \right) e^{-\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x} \overline{(g(y)-z)}\, dy}.$$

De manière précise, on a une formule équivalente à (2.2).

La preuve de ces lemmes résultera du même changement de variable que l'on fera plus loin, combiné avec le lemme de la phase stationnaire (voir ci après). Dans le cas de la phase φ_+, on obtient

$$\int e^{-\frac{2}{h}\operatorname{Im}\varphi_+}\chi_+ dx \sim \frac{(\pi h)^{1/2}}{(\operatorname{Im}\varphi_+''(x_+))^{1/2}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{h}{x_+^3}\right)\right), \tag{2.3}$$

où χ_+ est une troncature sur I_+.

Proposition 2.6 (Phase stationnaire) *1) Soit $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que $0 \in K = \operatorname{supp}(a)$ et*

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) \neq 0, \quad \operatorname{Im}\varphi \geq 0.$$

Supposons en plus que $\varphi'(x) \neq 0$ sur $K - \{0\}$. Posons $g(x) = \varphi(x) - \varphi''(0)x^2/2$. Alors, nous avons le développement asymptotique explicite, lorsque h tend vers zéro

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\varphi(x)/h}a(x)dx \sim$$
$$\left(\frac{2\pi i h}{\varphi''(0)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq 0}\left(\frac{h}{2i\varphi''(0)}\right)^k \frac{1}{\ell!}\frac{1}{k!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}((i/h)^\ell g^\ell a)(0). \tag{2.4}$$

En particulier, nous voyons que le premier terme est

$$(2\pi i h)^{1/2}\varphi''(0)^{-1/2}a(0)$$

et que le second est

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\frac{ih}{\varphi''(0)}\right)^{3/2}&\Bigg(c_0a''(0) + c_1a'(0)(\frac{\varphi'''(0)}{\varphi''(0)})\\ &+ a(0)(c_3\frac{\varphi''''(0)}{\varphi''(0)} + c_4\frac{\varphi'''(0)^2}{\varphi''(0)^2})\Bigg), 2.8\end{aligned} \tag{2.5}$$

pour certains c_j. 2) On impose maintenant que $x_0 =: \alpha \ll 1$. Supposons que $x_0 \in K = \operatorname{supp}(a)$ et

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0, \quad \varphi''(x_0) \neq 0, \quad \operatorname{Im}\varphi \geq 0, \\ &h \ll \alpha^3 \ll 1, \quad \operatorname{Im}\varphi''(\alpha) \sim C\alpha.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Supposons en outre que $\varphi'(x) \neq 0$ sur $K - \{x_0\}$. Alors, on a la formule suivante lorsque $h \ll \alpha^3 \ll 1$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\varphi(x)/h}a(x)dx \sim \frac{(2\pi i h)^{1/2}}{(\varphi_+''(x_+))^{1/2}}(1+\mathcal{O}(\frac{h}{\alpha^3})). \tag{2.7}$$

Pour une preuve de 1) on pourra consulter [13] p.36. Pour 2) (on considère pour simplifier le cas imginaire, c'est-à-dire $\mathrm{Re}\,\varphi = 0$), après un changement de variable linéaire, on se ramène au cas où

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = C\alpha.$$

Donc $\phi(x) = C_0\alpha x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ dans la limite quand x tend vers zéro. Sans perte de généralité, on suppose que $\phi(x) = C_0\alpha x^2 + C_1 x^3$. Un changement de variable $\alpha y = x$ donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{i\varphi(x)/h} a(x+x_0)dx &= \int e^{C_0\frac{i\alpha}{h}x^2 + C_1\frac{1}{h}x^3} a(x+x_0)dx \\ &= \alpha \int e^{\frac{i\alpha^3}{h}(C_0x^2+C_1x^3)} a(\alpha x + x_0))dx.\end{aligned}$$

Donc, $h \ll \alpha^3 \ll 1$, l'intégrale au dessus admet un développement asymptotique.

On remarquera que le terme $\mathcal{O}(\frac{h}{\alpha^3})$ dans (2.7) provient en fait du dernier terme dans (2.8) : $\frac{\varphi'''(0)^2}{\varphi''(0)^2}$. $\square$

Problème de Grushin

Proposition 2.7 *Pour $v \in L^2(I_+)$, $v_+ \in \mathbb{C}$, le problème de Cauchy $(P - z)u = v, u(x_+) = 0$, admet la solution unique $u = \tilde{F}v$ avec*

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\,z)^{1/4}}. \tag{2.8}$$

Nous allons donner une intuition de l'estimation (2.8) avec la “fausse” preuve suivante. Considérons l'opérateur $Q = hD_x + ix^2$ on sait que la solution du problème de Cauchy admet une unique solution telle que $\|F\| \leq 1/\sqrt{h}$ (voir Hager [6]). Le changement de variable $y = \sqrt{\mathrm{Im}\,z}\,x$ (ici $x_+(z) = -\sqrt{\mathrm{Im}\,z}$) nous permet d'identifer $Q - z$ avec $(\mathrm{Im}\,z)Q_0$, où Q_0 vérifie

$$\frac{h}{\mathrm{Im}\,z^{3/2}}D_x + ix^2 - \frac{\mathrm{Re}\,z}{\mathrm{Im}\,z} - i.$$

Donc, si $h^{2/3} \ll \mathrm{Im}\,z$, le problème de Cauchy de Q admet une solution unique telle que

$$\|F\| \leq \frac{C(\mathrm{Im}\,z)^{3/4}}{\sqrt{h}\,\mathrm{Im}\,z} = \frac{C}{\sqrt{h}(\mathrm{Im}\,z)^{1/4}}. \qquad \square$$

Soit $\chi_\pm \in C_0^\infty(I_\pm)$ avec $\chi_\pm = 1$ sur $J_\pm$ tels que $\mathrm{supp}\,\chi_+ \cap \mathrm{supp}\,\chi_- = \emptyset$.

Il est clair que les troncatures $\chi_\pm$ dépendent de $\mathrm{Im}\,z$, et par conséquent de h. Etant donné que la distance qui sépare $J_\pm$ de l'origine est de l'ordre de

$h^{1/3}$, les troncatures $\chi_\pm$ peuvent être choisies de telle sorte qu'au voisinage de 0 nous avons $\mathrm{supp}(\chi_+) \subset (-C, 0)$ et $\mathrm{supp}(\chi_-) \subset (0, C)$, avec

$$|\chi_\pm^{(n)}| = \mathcal{O}(h^{-n/3}). \tag{2.9}$$

Nous définissons l'opérateur $R_+ : L^2(I_+) \to \mathbb{C}$ par

$$R_+ u := \langle u, \chi_+ e_+ \rangle = \int_{I_+} u(x)\chi_+ \overline{e_+}(x)dx. \tag{2.10}$$

Corollaire 2.8 *Pour $v \in L^2(I_+)$, $v_+ \in \mathbb{C}$ le problème*

$$\begin{cases} (P-z)u = v \\ R_+ u = v_+ \end{cases} \tag{2.11}$$

admet la solution unique

$$u = Fv + F_+ v_+ \in H^1_{sc}(I_+)$$

où

$$F_+ v_+ := \frac{1}{\langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle} v_+ e_+ =: \frac{1}{D_+} v_+ e_+, \quad Fv = (1 - F_+ R_+)\tilde{F} v. \tag{2.12}$$

De plus,

$$\|F\|_{L^2(I_+) \to H^1_{sc}(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\, z)^{1/4}}, \quad \|F_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}(I_+)} = \mathcal{O}(1). \tag{2.13}$$

Près de x_- la situation de $(P-z)^*$ est analogue à $(P-z)$ pour x_+. On procède comme dans la proposition 2.7 et en se référant au lemme 1.2.3 de [7] pour montrer :

Proposition 2.9 *Pour $v \in L^2_{\mathrm{comp}}(I_-)$ le problème*

$$(P-z)u + R_- u_- = v$$

où

$$R_- u_- := u_- \chi_- e_-, \quad u_- \in \mathbb{C}$$

admet la solution unique $(u, u_-) \in H^1_{sc,\,\mathrm{comp}}(I_-) \times \mathbb{C}$

$$u = Gv, \quad u_- = G_- v.$$

où

$$G_- v := \frac{1}{\langle \chi_- e_-, e_- \rangle} \langle v, e_- \rangle = \frac{1}{D_-} \langle v, e_- \rangle.$$

De plus, en tant qu'opérateur $L^2_{\mathrm{comp}}(I_-) \to H^1_{\mathrm{comp}}(I_-)$,

$$\|G\|_{L^2 \to H^1_{sc}} \leq \frac{C}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}$$

et en tant qu'opérateur $L^2_{\mathrm{comp}}(I_-) \to \mathbb{C}$,

$$\|G_-\|_{L^2 \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(1).$$

On reproduit les arguments de la section "1.2.3 Inverse global" de [7] pour construire un inverse à droite.

Nous choisissons une partition de l'unité $\psi_\pm \in C_0^\infty(I_\pm)$, telle que $\chi_\pm \prec \psi_\pm$, où $\psi \prec \phi$ signifie

$$\operatorname{supp}(\psi) \cap \operatorname{supp}(1-\phi) = \emptyset.$$

Proposition 2.10 *Pour tout* $z \in K_h$.

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P-z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible d'inverse

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
E &= G\left(\psi_- + \frac{h}{i}\chi_-' F\psi_+\right) + (1-\chi_-)F\psi_+ && (2.14)\\
E_+ &= (1-\chi_-)F_+ + G\frac{h}{i}\chi_-' F_+ \\
E_- &= G_-(\psi_- + \frac{h}{i}\chi_-' F\psi_+) \\
E_{-+} &= G_-\frac{h}{i}\chi_-' F_+ = -\frac{h}{iD_-D_+}\langle \chi_-' e_+, e_-\rangle.
\end{aligned}$$

Les normes vérifient

$$\|E\|_{L^2 \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}),\ \|E_+\| = \mathcal{O}(1),\ \|E_-\| = \mathcal{O}(1), \tag{2.15}$$

$$\|E_{-+}\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4} e^{-\frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{Ch}}\right). \tag{2.16}$$

Preuve. Pour (2.14), ce n'est autre que la proposition 1.2.4, [7], pour laquelle on a reproduit les arguments. Nous avons donc

$$\begin{aligned} E_{-+} =& -\frac{hc_+\bar{c}_-}{iD_+D_-}\Big(\int_{I_+\cap I_-} \chi'_- e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x_+}(g(y)-z)\,dy} dx \\ &+ \int_{(I_+ +2\pi)\cap I_-} \chi'_- e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+ +2\pi}^{x_-}(g(y)-z)\,dy} dx\Big), \\ =& -\frac{hc_+\bar{c}_-}{iD_+D_-}\big(e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x_+}(g(y)-z)\,dy} - e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+ +2\pi}^{x_-}(g(y)-z)\,dy}\big), \end{aligned} \tag{2.17}$$

puisque l'intégrale sur χ'_- donne 1 sur $I_+\cap I_-$ et 1 sur $(I_+ + 2\pi)\cap I_-$. $\square$

Pour avoir le théorème 2.2, il suffit de remarquer que $(P-z)^{-1}$ s'écrit sous la forme $E - E_+E_{-+}^{-1}E_-$.

3 Complément par rapport à l'exposé oral

Pour donner un texte relativement compact, nous n'avons pas abordé les estimations de résolvante après perturbations aléatoires. Nous souhaitons nous en servir dans des problèmes d'évolution avec déformation de contour.

Deuxièmement, de l'expression exacte de E_{-+} (proposition 2.10) et des asymptotiques des quasimodes e_+, e_- (lemmes 2.4 et 2.5) découle, en fait, directement une estimation de résolvante qui précise l'estimation déjà obtenue, proposition 2.2. On espère qu'une telle formule peut se maintenir dans des cas plus généraux. Cette dernière (proposition 3.1 *ii*) a été obtenue après l'exposé oral de l'auteur.

Proposition 3.1 *Soit* $P = hD_x + g(x)$ *comme ci-dessus. Soit* K *contenu dans* $\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\, g(x)dx\}$. *Nous avons les assertions suivantes :*
i) ([4]) Il existe $\tilde{C} > 0$ *et* $C > 0$ *tel que*

$$\forall z\in K \text{ avec } \mathrm{Im}\, z \le h^{2/3}/C, \quad \|(P-z)^{-1}\| \le \tilde{C}h^{-2/3}.$$

ii) Pour tout z *de* K, *vérifiant* $\mathrm{Im}\, z \gg h^{2/3}$, *nous avons l'estimation*

$$\begin{aligned} \|(P-z)^{-1}\| \sim & \frac{\sqrt{\pi}\exp(\frac{1}{h}\mathrm{Im}\,\ell_0(z))}{h^{1/2}(\frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}(\rho_+))^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2i}\{\bar{p},p\}(\rho_-))^{\frac{1}{4}}}(1+\mathcal{O}(\tilde{h})) \\ & + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{h}\ \mathrm{Im}\, z^{1/4}}\Big), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\tilde{h} \asymp \frac{h}{\mathrm{Im}\, z^{3/2}}$, *et* ℓ_0 *est défini par*

$$\ell_0 = \int_{x_-}^{x_+}(g(x)-z)dx = \int_{x_-}^{x_+}\xi\, dx, \tag{3.2}$$
$$\xi + g - z = 0,\ (x,\xi)\in p^{-1}(z).$$

Preuve. Pour démontrer le point ii), il faut remarquer que le second membre de (2.17) est exponentiellement petit, ensuite que $D_+D_- = 1 + \mathcal{O}(\tilde{h}^\infty)$, et que c_+ est donné par

$$\begin{aligned} c_+ &= \frac{\phi_+''(x_+)^{1/4}}{(\pi h)^{1/4}}(1+\mathcal{O}(\tilde{h})), \quad \phi_+''(x_+) = \operatorname{Im} g_+'(x_+), \\ &= \frac{(\frac{-1}{2i}\{p,\bar{p}\}(\rho_+))^{\frac{1}{4}}}{(\pi h)^{1/4}}(1+\mathcal{O}(\tilde{h})). \end{aligned}$$

On a une formule similaire pour c_-. Donc

$$E_{-+}^{-1} \sim \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{h}\operatorname{Im}\ell_0(z)}}{h^{1/2}\phi_+''(x_+)^{1/4}\overline{\phi_-''(x_-)^{1/4}}}(1+\mathcal{O}(\tilde{h})). \tag{3.3}$$

Enfin, $E_+E_{-+}^{-1}E_-$ s'écrit aussi $(E_{-+}^{-1})E_+E_-$ (E_{-+}^{-1} est scalaire) où $\|E_+E_-\| = 1 + \mathcal{O}(e^{-C/\tilde{h}})$. $\square$

Références

[1] W. Bordeaux Montrieux, *Loi de Weyl presque sûre et résolvante pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints,* thèse, CMLS, Ecole Polytechnique, 2008.

[2] E.B. Davies, *Semi-classical states for non-self-adjoint Schrodinger operators,* Comm. Math. Phys. 200(1)(1999), 35-41.

[3] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit,* LMS LN 268, Cambrigde University Press (1999).

[4] N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski, *Pseudospectra of (pseudo) differential operators,* Comm. Pure Appl. Math., 57(2004), 384-415.

[5] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique pour des opérateurs non-autoadjoints I : un modèle,* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Sér. 6, 15 no. 2 (2006), p. 243-280.

[6] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints II :* Ann. Henri Poincaré, 2006, vol 7, n°6, 1035-1064.

[7] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints,* thèse, CMLS, Ecole Polytechnique, 2005.
`http://tel.ccsd.cnrs.fr/docs/00/04/87/08/PDF/tel-00010848.pdf`

[8] M. Hager, J. Sjöstrand, *Eigenvalue asymptotics for randomly perturbed non-selfadjoint operators,* Math. Ann. 342 (2008), no. 1, 177-243. `http://arxiv.org/abs/math/0601381`

[9] B. Helffer, *On spectral problems related to a time dependent model in superconductivity with electric current,* Proceedings of the coference in PDE in Evian, Juin 2009, à paraître.

[10] J. Martinet, *Sur les propriétés spectrales d'opérateurs non-autoadjoints provenant de la mécanique des fluides*, Thèse de doctorat (en préparation).

[11] J. Sjöstrand, *Resolvent estimates for non-self-adjoint operators via semi-groups,* `http://arxiv.org/abs/0906.0094`

[12] J. Sjöstrand, *Non-self-adjoint differential operators, spectral instability and random perturbations,* Seville, Juin 2008, non-publié,
Spectral properties of non-self-adjoint operators ; mini-cours au colloque des EDP à Evian, Juin 2009, à paraître.

[13] M. Zworski, L.C. Evans, *Lectures on semiclassical analysis, version 0.3,* `http://math.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf`

[14] L.N. Trefethen, *Pseudospectra of linear operators,* SIAM Rev. 39(3)(1997), 383-406.

[15] M. Zworski, *A remark on a paper of E.B Davies,* Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957.