Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Frédéric Bernicot

Perturbation stochastique de processus de rafle

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° XIX, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A19_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n° XIX, 1-13

PERTURBATION STOCHASTIQUE DE PROCESSUS DE RAFLE

par

Frédéric Bernicot

Résumé. — Lors de cet exposé, nous nous intéressons à l'étude de perturbations stochastiques de certaines inclusions différentielles du premier ordre : les processus de rafle par des ensembles uniformément prox-réguliers. Ce travail nous amène à combiner la théorie des processus de rafle et celle traitant de la reflexion d'un mouvement brownien sur la frontière d'un ensemble. Nous donnerons des résultats traitant du caractère bien-posé de ces inclusions différentielles stochastiques et de leur stabilité.

Table des matières

Le point de départ de ce travail se situe dans le prolongement d'un travail, dû à J. Venel [**31**], consacré à l'étude de certains *processus de rafle* et de schémas numériques associés. Plus précisément, on s'intéresse ici à l'ajout d'une perturbation stochastique pour ces processus de rafle. Cet exposé se place à l'intersection de deux théories : celle sur les processus de rafle et celle

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35A07; 35B35 ; 35B05 ; 37L50 ; 35Q55.
Mots clefs. — Processus de rafle, inclusion différentielle, équation différentielle stochastique.

sur la reflexion d'un mouvement brownien. Nous présentons ici un travail en collaboration avec J. Venel et renvoyons à l'article [**5**] pour plus de précisions.

Ces deux théories sont basées sur une notion commune : *la prox-régularité.* Nous commençons tout d'abord par décrire cette notion puis nous détaillerons ces deux théories. Nous finirons ensuite par décrire dans quel cadre nous avons réussi à combiner ces deux points de vue et nous donnerons quelques résultats (d'existence, d'unicité et de stabilité) sur des perturbations stochastiques de processus de rafle.

1. La prox-régularité

Considérons $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure Euclidienne et un sous-ensemble C fermé de $\mathbb{R}^d$. L'opération importante, qui sera nécessaire dans la suite, consiste à pouvoir projeter un point proche de cet ensemble sur celui-ci. Cette propriété fait appel au cône proximal normal, qui décrit l'ensemble des "bonnes directions" selon lesquelles on peut projeter :

Définition 1.1. — *Pour tout $x \in C$, soit $\mathrm{N}(C,x)$ le cône proximal normal de C en x défini par :*

$$\mathrm{N}(C,x) := \left\{ v \in \mathbb{R}^d,\ \exists s > 0,\ x \in \mathrm{P}_C(x+sv) \right\},$$

où P_C est la projection Euclidienne sur l'ensemble C.

On peut alors définir la notion d'ensemble uniformément prox-régulier :

Définition 1.2. — *Pour $\eta > 0$, l'ensemble C est dit η-prox-régulier si pour tout $x \in C$ et $v \in \mathrm{N}(C,x) \setminus \{0\}$*

$$B\left(x + \eta\frac{v}{|v|}, \eta\right) \cap C = \emptyset.$$

La notion de prox-régularité a été initialement définie par H. Federer (1959,[**15**]) dans $\mathbb{R}^d$ sous l'appellation "positively reached sets". Elle fut ensuite étendue aux espaces de Hilbert par F.H. Clarke, R.J. Stern et P.R. Wolenski (∼90, [**10**]) puis par R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar et L.Thibault (∼00, [**22**]) et très récemment dans des espaces de Banach par F. Bernard, L. Thibault et N. Zlateva ([**3, 4**]).

Cette propriété peut être décrite de manière géométrique : un ensemble C est η-prox-régulier si on peut faire "rouler" une boule de rayon η continûment sur toute la frontière ∂C. Elle est équivalente à la propriété suivante : la projection P_C est monovaluée et continue en tout point x à distance $d_C(x) < \eta$.

Exemple 1.3. — *Cette notion permet de généraliser et d'affaiblir une hypothèse de convexité. Un ensemble fermé C est convexe si et seulement si il est ∞-prox-régulier.*

La propriété principale d'un ensemble prox-régulier est décrite en terme de monotonie du cône proximal normal, considéré en tant qu'opérateur multivalué :

Proposition 1.4. — *Si C est un ensemble η-prox-régulier, l'opérateur multivalué $\mathrm{N}(C,\cdot)$ est hypomonotone : pour tout $x, y \in C$, $u \in \mathrm{N}(C,x)$ et $v \in \mathrm{N}(C,y)$*

$$\langle x-y, u-v\rangle \geq -\frac{|u|+|v|}{2\eta}|x-y|^2.$$

Cette propriété est spécifique à la structure Hilbertienne, mais admet néanmoins une description (plus compliquée) dans un cadre banachique ([**3, 4**]).

Ayant décrit cette notion importante d'analyse convexe, nous allons maintenant décrire les résultats récents sur les processus de rafle.

2. Les processus de rafle

Soit $\mathcal{I} = [0,T]$ un interval de temps borné, $C : \mathcal{I} \rightrightarrows \mathcal{B}$ une multi-fonction prenant comme valeurs des ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$ et soit $F : \mathcal{I} \times \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{B}$ une multi-fonction à valeurs compactes et convexes. L'étude des processus de rafle associés correspond à la résolution de l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + \mathrm{N}(C(t), x(t)) - F(t, x(t)) \ni 0 \\ x(t) \in C(t) \\ x(0) = x_0\ , \end{cases} \tag{2.1}$$

avec une donnée initiale $x_0 \in C(0)$.

Cette inclusion différentielle peut être interpretée de la manière suivante : le point $x(t)$, soumis au champ de force $F(t, x(t))$, doit rester dans l'ensemble mobile $C(t)$.

Le problème de "processus de rafle" a été introduit par J.J. Moreau dans les années 70 (e.g. [**21**]), dans le cas où les ensembles $C(t)$ sont supposés convexes et avec aucune perturbation ($F \equiv 0$). Pour résoudre ce problème, J.J. Moreau apporta une nouvelle idée très importante : l'algorithme de rattrapage ("*catching-up algorithm*").

Depuis, de nombreuses améliorations ont été apportées dans la littérature : pour ajouter une perturbation F comme écrit dans (2.1), pour diminuer l'hypothèse de convexité des ensembles $C(t)$, pour obtenir des résultats dans un contexte banachique (et pas seulement dans des espaces de Hilbert), ...
Principalement, nous citons les travaux C. Castaing, T.X. Dúc Hā et M. Valadier [**8**] ainsi que ceux de C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques [**9**], où les auteurs résolvent cette inclusion différentielle avec $x \in BV(\mathcal{I})$ en supposant une hypothèse de croissance linéaire compacte

$$F(t,x) \subset \beta(t)(1+|x|)\overline{B(0,1)}\,,\ \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

De plus la multi-fonction $C(\cdot)$ était supposée Hausdorff-continue et vérifiant une condition "de boule intérieure" :

$$\exists r > 0\,,\ B(0,r) \subset C(t)\,,\ \forall t \in I. \tag{2.3}$$

Puis une importante amélioration fut apportée pour contourner l'hypothèse de convexité des ensembles $C(t)$ grâce à la notion d'ensemble prox-régulier. De nombreux travaux traitent des processus de rafle par des ensembles uniformément prox-réguliers. Le cas sans perturbation ($F \equiv 0$) a été tout d'abord traité par G. Colombo, V.V. Goncharov [**11**], par H. Benabdellah [**1**] et ensuite par L. Thibault [**28**] et G. Colombo, M.D.P. Monteiro Marques [**12**] dans un cadre Hilbertien. Dans le cadre d'un espace de Hilbert de dimension infinie, le problème perturbé a été étudié par M. Bounkhel, J.F. Edmond et L. Thibault [**7, 28, 13, 14**] et récemment dans un cadre Banachique par l'auteur et J. Venel [**6**].

Décrivons tout d'abord une version (un peu simplifiée) du résultat principal issu de [**13**] :

Théorème 2.1. — *Soit $C : t \in \mathcal{I} \to C(t)$ une multi-fonction définie sur I prenant pour valeurs des ensembles η-prox-reguliers de $\mathbb{R}^d$. Supposons que $C(\cdot)$ varie de manière absolument continue, c'est à dire qu'il existe une fonction absolument continue $w : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in H$ et $s,t \in I$*

$$|d(y,C(t)) - d(y,C(s))| \leq |w(t) - w(s)|. \tag{2.4}$$

Soit $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une perturbation bornée et Lipschitz par rapport à la deuxième variable : il existe L telle que pour tout $t \in \mathcal{I}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|. \tag{L}$$

Alors pour toute donnée initiale $x_0 \in C(0)$, l'inclusion différentielle

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}(t) + \mathrm{N}(C(t), x(t)) \ni f(t, x(t)), & p.p.t.\ t \in \mathcal{I} \\ x(0) = x_0\ . & \end{array} \right. \tag{2.5}$$

a une unique solution x absolument continue.

Ce résultat admet une extension dans le cadre de perturbation multivaluée et est décrite dans un cadre Hilbertien. L'auteur et J. Venel ont étendu ce résultat dans le cadre de certains espaces de Banach ([**6**]).

Remarque 2.2. — *L'équation (2.5) se réécrit en terme de mesure temporelle :*

$$dx + \mathrm{N}(C(t), x(t))dt \ni f(t, x(t))dt.$$

Le cas, où l'ensemble C est constant, permet d'obtenir certaines propriétés supplémentaires.

Théorème 2.3 **(**[**6**]**)**. — *Si l'ensemble $C(t) = C$ est constant à un ensemble C uniformément prox-régulier alors l'inclusion différentielle (2.5) est équivalente à l'équation différentielle :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt}(t) + \mathrm{P}_{\mathrm{N}(C,x(t))}[f(t,x(t))] = f(t,x(t)) \\ x(0) = x_0 \in C. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Remarque 2.4. — *Nous renvoyons le lecteur à* [**6**] *pour la définition "d'une prox-régularité directionelle", permettant de conclure à l'existence de solution pour (2.6). Cette notion est plus faible que l'uniforme prox-régularité.*

Remarque 2.5. — *Nous finissons cette brève description de certains résultats en mentionnant l'étude d'un schéma numérique pour résoudre l'inclusion différentielle (2.5). Dans* [**29**]*, J. Venel présente un schéma numérique et montre sa convergence, en "convexifiant" les ensembles uniformément prox-réguliers $C(t)$.*

3. Reflexion d'un mouvement Brownien

Nous allons dans cette section décrire différents travaux et résultats sur le problème suivant. Considérons un ensemble C et un mouvement brownien à l'intérieur de cet ensemble, on impose à la trajectoire de se reflechir sur la frontière ∂C de sorte que celle-ci reste à l'intérieur de l'ensemble C. Deux questions se posent alors : sous quelles conditions sur l'ensemble C, existe-t-il de telles trajectoires et quelles sont leur régularités ?

Fixons un ensemble C de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ et un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ et d'un mouvement Brownien réel $(B_t)_{t>0}$ associé à cette filtration. La réflexion d'un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ sur ∂C issu d'un point $x_0 \in C$ est décrite par un processus stochastique X solution de :

$$\begin{cases} dX_t + \mathrm{N}(C, X_t)dt \ni f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est le "champ" subi par la trajectoire brownienne X et $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ correspond à un facteur de la perturbation stochastique $(dB_t)_{t>0}$.

La première difficulté est de donner un sens précis à cette inclusion différentielle stochastique et principalement au terme "$\mathrm{N}(C, X_t)dt$". On reprend alors la définition suivante :

Définition 3.1 (**[18]**). — *Un processus continu $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de (3.1) s'il existe un autre processus $(K_t)_{t\geq 0}$ tel que :*

a) *$(X_t)_{t\geq 0}$ soit adapté avec des chemins continus à valeurs dans C;*
b) *$(K_t)_{t\geq 0}$ soit adapté avec des chemins continus et à variation bornée;*
c) *Les deux processus X et K vérifient*

$$dX_t + dK_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t; \tag{3.2}$$

d) *La condition initiale en temps $X_0 = u_0$ p.p.;*
e) *Le processus dK_t est uniquement supporté en temps lorque $X_t \in \partial C$*

$$|K|_t = \int_0^t \mathbf{1}_{X_s \in \partial C} d|K|_s, \qquad K_t = \int_0^t \xi(s) d|K|_s, \tag{3.3}$$

avec $\xi(s) \in \mathrm{N}(C, X_s)$.

On note $|K|_t$ pour la variation du processus K sur $[0, t]$.

Remarque 3.2. — *L'EDS (3.2) se réécrit sous la version intégrale suivante :*

$$X_t + K_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{3.4}$$

La relation (3.3) décrit de manière rigoureuse : "$dK_t \in \mathrm{N}(C, X_t)dt$".

Nous allons tout d'abord faire un bref historique de l'étude de tels problèmes. Les premiers résultats sont dus à plusieurs travaux de A.V. Skorohod [**24, 25**], N. Ikeda et S. Watanabe [**16, 32**] et N. El Karoui [**17**] ... dans le cas particulier où C est un demi-plan ou une demi-droite. Puis le problème a été traité par D.W. Stroock et S.R.S. Varadhan [**26**] dans le cadre d'un ensemble C régulier. Plus tard A. Bensoussan et J.L. Lions [**2**] et H. Tanaka [**27**] ont démontré l'existence de solution dans le cas d'ensembles C non lisses mais supposés convexes. En 1984, P.L. Lions et A.S. Sznitman ([**18**]) ont donné une preuve de l'existence de solutions pour de telles inclusions différentielles stochastiques et ont décrit les premiers résultats dans le cas où C est un ensemble prox-régulier borné (en faisant une hypothèse supplémentaire d'"admissibilité", voir Définition 3.3). Quelques années plus tard, Y. Saisho ([**23**]) a étendu la preuve pour des ensembles non bornés. L'idée principale est de résoudre tout d'abord le problème déterministe de Skorohod et ensuite d'appliquer une méthode de point fixe, suggérée par (3.4).

Avant de décrire ce qu'est le problème de Skorohod, nous donnons la définition importante d'ensemble admissible :

Définition 3.3 **([18])**. — *Un ensemble fermé C de $\mathbb{R}^d$ est dit admissible s'il existe $\delta > 0$, $\beta > 0$ et une famille de vecteurs normalisés $(l_x)_{x\in\partial C}$ tels que :*

$$\forall x \in \partial C,\ \forall y \in \partial C \cap B(x, \delta),\ \forall v \in \mathrm{N}(C, y), \quad \langle l_x, v\rangle \geq \beta |v|.$$

Définition 3.4. — *Pour C un ensemble fermé et $h \in C^0([0, T], \mathbb{R}^d)$, une solution x du problème de Skorohod (Sk, h) est une fonction $x \in C^0([0, T], C)$ telle qu'il existe $k \in BV([0, T])$ avec :*

- *x et k solutions de "l'équation intégrale" :*
$$x(t) + k(t) = x(0) + h(t).$$
- *La condition initiale en temps $k(0) = 0$;*
- *La distribution dk est uniquement supportée sur $\{t,\ x(t) \in \partial C\}$ et*
$$|k|_t = \int_0^t \mathbf{1}_{x(s)\in\partial C} d|k|_s, \qquad k(t) = \int_0^t \xi(s) d|k|_s,$$
avec $\xi(s) \in \mathrm{N}(C, x(s))$.

Remarque 3.5. — *Pour* $h \in W^{1,1}([0,T])$ *le problème de Skorohod* (Sk, h) *est équivalent à l'inclusion différentielle décrivant un processus de rafle avec une perturbation* $f = \frac{dh}{dt}$. *Le problème est donc le suivant :*

- *Comment passer des fonctions* $h \in W^{1,1}([0,T])$ *aux fonctions* $h \in C^0([0,T])$.
- *Comment montrer l'existence et l'unicité de telles solutions ?*
- *Comment borner la variation de la fonction* k *en fonction de* $h \in C^0([0,T], \mathbb{R}^d)$ *pour utiliser un raisonnement par densité ?*

Ces questions ont été résolues par P.L. Lions et A.S. Sznitman ([**18**]) à l'aide de la notion d'ensemble admissible :

Théorème 3.6 **(P.L. Lions - A.S. Sznitman [18] ; Y. Saisho [23])**
Soit C *un ensemble uniformément prox-régulier et admissible. Si on sait résoudre le problème de Skorohod* (Sk, h) *pour toutes fonctions* $h \in C^\infty([0,T])$, *alors on sait le résoudre pour toutes fonctions* $h \in C^0([0,T])$. *De plus la variation totale de la fonction* k *est bornée par* $\|h\|_\infty$ *et son module de continuité. Conséquence : Le problème de Skorokhod* (Sk, h) *est bien posé pour toute fonction* $h \in C^0([0,T])$.

À l'aide de ce résultat déterministe, ils obtiennent le résultat suivant sur le problème stochastique :

Théorème 3.7 **(P.L. Lions - A.S. Sznitman [18] ; Y. Saisho [23])**
Soit C *un ensemble uniformément prox-régulier et admissible, alors le problème (3.1) est bien posé dans*

$$H := L^4(\Omega, L^\infty([0,T]))$$

pour tout $T < \infty$.

La preuve repose sur la continuité de l'intégrale stochastique et une méthode de point fixe, appliquée à (3.4).

Ayant décrit ces deux théories : la première sur les processus de rafle et la seconde sur la reflexion d'un mouvement brownien à l'intérieur d'un ensemble, nous allons maintenant voir comment on peut combiner les différents arguments pour répondre au problème initial : résoudre une perturbation stochastique de processus de rafle.

4. Perturbation stochastique de certains processus de rafle

Nous cherchons donc à résoudre l'inclusion différentielle stochastique suivante :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} dX_t + \mathrm{N}(C(t), X_t)dt \ni f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

où $C(\cdot)$ est une multi-fonction.

Pour plus de détails et les démonstrations, nous renvoyons le lecteur à l'article [**5**] (co-écrit avec J. Venel).

Pour appliquer les résultats précédents, il nous faut assurer l'admissibilité des ensembles $C(t)$ et il faut traiter la dépendance en temps de ces derniers. Pour cela, nous allons nous placer dans un cadre un peu particulier :

Soit $\mathcal{I} := [0, T]$ et $g_i : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions convexes (en la variable d'espace) pour $i = 1...p$. On pose alors

$$C(t) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d,\ \forall i, \quad g_i(t, x) \geq 0 \right\},$$

qui représente "l'ensemble des points admissibles sous les contraintes $g_i(t, \cdot)$". On suppose qu'il existe des constantes $\alpha, \beta, M, \kappa > 0$ telles que $g_i \in C^2\left(\mathcal{I} \times \mathbb{R}^d\right)$ et

$$(A1) \qquad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d, \qquad \alpha \leq |\nabla_x g_i(t, x)| \leq \beta,$$

$$(A2) \qquad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d, \qquad |\partial_t g_i(t, x)| \leq \beta,$$

$$(A3) \qquad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d, \qquad |D_x^2 g_i(t, x)| \leq M.$$

Afin de pouvoir vérifier la prox-régularité des ensembles $C(t)$ et leur admissibilité, on fait l'hypothèse suivante : il existe $\rho, \gamma > 0$ tel que

$$(R_\rho) \qquad \forall \lambda_i \geq 0, \qquad \sum_{i \in I_\rho(t,x)} \lambda_i |\nabla_x g_i(t, x)| \leq \gamma \left| \sum_{i \in I_\rho(t,x)} \lambda_i \nabla_x g_i(t, x) \right|.$$

avec

$$I_\rho(t, x) := \{i,\ g_i(t, x) \leq \rho\}.$$

Cette inégalité triangulaire inverse sur les gradients traduit une certaine "indépendance uniforme" de ces vecteurs sous combinaisons linéaires positives. Nous renvoyons le lecteur au travail de J. Venel [**31**] pour plus de détails sur une telle hypothèse et pour une description d'exemples où celle-ci est vérifée.

On montre alors le résultat suivant

Théorème 4.1 **([31])**. — *Sous (R_0), l'ensemble $C(t)$ est uniformément prox-régulier (avec une constante indépendante de $t\in\mathcal{I}$).*

Théorème 4.2 **([5])**. — *Sous les hypothèses de régularité et (R_ρ), la multi-fonction $C(\cdot)$ est Lipschitzienne. De plus, l'ensemble $C(t)$ est admissible (de manière uniforme en temps).*

Remarque 4.3. — *Dans un cadre général, l'hypothèse (R_0) ne suffit pas pour obtenir le résultat précédent. Néanmoins si $\bigcup_t C(t)$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$, alors (R_0) suffit par des arguments de compacité.*

On peut alors résoudre le problème de Skorohod déterministe associé (avec un ensemble mobile $Q(t)$) $x_t+k_t=h_t$ déterministe en utilisant la théorie des processus de rafle pour $h\in W^{1,1}(\mathcal{I})$ (voir première section). L'admissibilité des ensembles $Q(t)$ permet alors d'utiliser les arguments de [**18**] pour le résoudre avec toutes fonctions $h\in C^0(\mathcal{I})$.
On peut maintenant appliquer la méthode de point fixe stochastique, pour obtenir :

Théorème 4.4 **([5])**. — *Sous les hypothèses précédentes, le problème (4.1) est bien posé dans*

$$H=L^4(\Omega,L^\infty(\mathcal{I})).$$

Après ce résultat d'existence et d'unicité, nous souhaitons décrire un résultat de stabilité, par rapport à la perturbation stochastique $\sigma(t,X_t)dB_t$.

Théorème 4.5 **([5])**. — *On note X^σ l'unique processus, solution de (4.1), associé à la perturbation stochastique σdB_t. Soit X^0 le processus déterministe solution de (4.1) pour $\sigma=0$. Alors X^σ converge vers X^0 lorsque σ tend vers 0 dans $L^\infty(\mathcal{I}\times\mathbb{R}^d)$:*

$$\left\|X^\sigma-X^0\right\|_H\leq C_{u_0}\|\sigma\|_{L^\infty(\mathcal{I}\times\mathbb{R}^d)}.$$

La preuve repose sur l'utilisation du théorème de point fixe à paramètre et l'utilisation d'inégalités maximales de Doob pour obtenir la continuité des intégrales stochastiques par rapport à la perturbation σ.

Nous finissons cet exposé en mentionnant que dans [**5**], les auteurs proposent et étudient la convergence d'un schéma numérique afin d'approcher la solution stochastique de (4.1). Celui-ci correspond à la version stochastique du schéma proposé dans [**31**] dans le cas déterministe. Celui-ci consiste en une amélioration de l'algorythme de rattrapage (proposé par J.J. Moreau [**21**]), défini pour un paramètre h par :

$$X_{n+1}^h := \mathrm{P}_C(t_{n+1}) \left[X_n^h + hf(t_{n+1}, X_n^h) + \sigma(t_{n+1}, X_n^h) \left(B_{t_{n+1}} - B_{t_n} \right) \right],$$

où $(t_n)_n$ est une subdivision de $\mathcal{I}$ de pas h et $X_0^h = x_0$. La suite des processus ainsi définie par morceaux converge vers l'unique solution de (4.1) pour $h \to 0$. L'algorithme proposé par J. Venel dans le cas déterministe, que nous étendons au cas stochastique, consiste à remplacer la projection $\mathrm{P}_{C(t_{n+1})}$ par une projection sur un "bon" ensemble convexe $Q(t_{n+1})$. D'un point de vue numérique, cette opération est importante car il existe de nombreux algorithmes efficaces pour caluler la projection sur un ensemble convexe. L'idée est donc de remplacer les ensembles prox-réguliers $C(t_{n+1})$ par une bonne approximation convexe $Q(t_{n+1})$, tout en conservant la convergence de l'algorithme. Nous renvoyons le lecteur vers l'article [**31**] pour une étude précise du cas déterministe et vers [**5**] pour son adaptation au cas stochastique.

Nous renvoyons le lecteur à l'article pour des exemples d'applications. Notament, nous signalons que le cadre et les hypothèses $(A1)$, $(A2)$ et $(A3)$ sont vérifiées pour le modèle de mouvement de foule étudié par J. Venel dans sa thèse (e.g. [**30, 20, 19, 31**] ...).

Références

[1] H. Benabdellah. Existence of solutions to the nonconvex sweeping process. *J. Diff. Equations*, 164:286–295, 2000.

[2] A. Bensoussan and J.L. Lions. *Contrôl impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles.* Dunod., 1982.

[3] F. Bernard, L. Thibault, and N. Zlateva. Characterizations of Prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces. *J. Convex Anal.*, 13:525–560, 2006.

[4] F. Bernard, L. Thibault, and N. Zlateva. Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces : various regularities and other properties. *submitted*, 2008.

[5] F. Bernicot and J. Venel. Stochastic perturbation of sweeping process. *Preprint*, 2009.

[6] F. Bernicot and J. Venel. Differential inclusions with proximal normal cones in Banach spaces. *J. Convex Anal.*, 2010.

[7] M. Bounkhel and L. Thibault. Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 6:359–374, 2001.

[8] C. Castaing, T.X. Dúc Hā, and M. Valadier. Evolution equations governed by the sweeping process. *Set-Valued Anal.*, 1:109–139, 1993.

[9] C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques. BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets. *Set-Valued Anal.*, 3(4):381–399, 1995.

[10] F.H. Clarke, R.J. Stern, and P.R. Wolenski. Proximal smoothness and the lower-C^2 property. *J. Convex Anal.*, 2:117–144, 1995.

[11] G. Colombo and V.V. Goncharov. The sweeping processes without convexity. *Set-Valued Anal.*, 7:357–374, 1999.

[12] G. Colombo and M.D.P. Monteiro Marques. Sweeping by a continuous prox-regular set. *J. Diff. Equations*, 187(1):46–62, 2003.

[13] J.F. Edmond and L. Thibault. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. *Math. Program, Ser. B*, 104(2-3):347–373, 2005.

[14] J.F. Edmond and L. Thibault. BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation. *J. Diff. Equations*, 226(1):135–179, 2006.

[15] H. Federer. Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:418–491, 1959.

[16] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North. Holland, Amsterdam, 1981.

[17] N. El Karoui. Processus de reflexion sur $\mathbb{R}^n$. *Séminaire de probabilités IX, Lect. notes in Math.*, 465, 1975.

[18] P.L. Lions and A.S. Sznitman. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. on Pures and Appl. Math.*, 37:511–527, 1984.

[19] B. Maury and J. Venel. A discrete contact model for crowd motion. *submitted, http://arxiv.org/abs/0901.0984*, 2008.

[20] B. Maury and J. Venel. A microscopic model of crowd motion. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser.I*, 346:1245–1250, 2008.

[21] J.J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Diff. Equations*, 26(3):347–374, 1977.

[22] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar, and L.Thibault. Local differentiability of distance functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352:5231–5249, 2000.

[23] Y. Saisho. Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. *Prob. Theory and Rel. Fields*, 74(3):455–477, 1987.

[24] A.V. Skorohod. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region 1. *Theor. Veroyatnost. i Primenen*, 6:264–274, 1961.

[25] A.V. Skorohod. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region 2. *Theor. Veroyatnost. i Primenen*, 7:3–23, 1962.

[26] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan. Diffusion processes with boundary conditions. *Comm. Pures Appl. Math.*, 24:147–225, 1971.

[27] H. Tanaka. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math. J.*, 9:163–177, 1979.

[28] L. Thibault. Sweeping process with regular and nonregular sets. *J. Differential Equations*, 193(1):1–26, 2003.

[29] M. Valadier. Quelques problèmes d'entraînement unilatéral en dimension finie. *Séminaire d'Analyse Convexe*, 18(8):Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1988.

[30] J. Venel. *Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2008. available at http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00346035/fr.

[31] J. Venel. A numerical scheme for a first order differential inclusion. *submitted, http://arxiv.org/abs/0904.2694*, 2009.

[32] S. Watanabe. On stochastic differential equations for multidimensional diffusion processes with boundary conditions. *J. Math. Kyoto. Univ.*, 11:155–167,553–563, 1971.

Frédéric Bernicot, Université Paris-Sud XI, 91405 Orsay, France.
E-mail : `frederic.bernicot@math.u-psud.fr`
Url : `http://www.math.u-psud.fr/~bernicot/`