Thomas Duyckaerts et Frank Merle

Dégénérescence du comportement linéaire pour l'équation des ondes semi-linéaire focalisante critique

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° XII, 9 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A12_0>

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n° XII, 1-9

DÉGÉNÉRESCENCE DU COMPORTEMENT LINÉAIRE POUR L'ÉQUATION DES ONDES SEMI-LINÉAIRE FOCALISANTE CRITIQUE

THOMAS DUYCKAERTS (COLLABORATION AVEC FRANK MERLE)

Table des matières

1. Position du problème et résultat

1.1. **Equation.** Considérons l'équation des ondes quintique dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u \pm u^5 = 0, & (t,x) \in I \times \mathbb{R}^3 \\ u_{\restriction t=0} = u_0 \in \dot{H}^1, & \partial_t u_{\restriction t=0} = u_1 \in L^2, \end{cases} \tag{1}$$

où $\dot{H}^1 = \left\{ f \in L^6\left(\mathbb{R}^3\right),\ \int |\nabla f|^2 < \infty \right\}$, $\|f\|^2_{\dot{H}^1} = \int |\nabla f|^2$. Le signe "$-$" correspond à l'équation focalisante et le signe "$+$" à l'équation défocalisante.

L'équation est localement bien posée dans $\dot{H}^1 \times L^2$ (cf [Pec84], [GSV92] et [SS94]) et admet une énergie

$$E(u(t), \partial_t u(t)) = \frac{1}{2} \int |\nabla u(t)|^2 + \frac{1}{2} \int |\partial_t u(t)|^2 \pm \frac{1}{6} \int |u(t)|^6$$

conservée au cours du temps. De plus si $\lambda_0 > 0$ et u est solution de l'équation,

$$(t,x) \mapsto \lambda_0^{1/2} u(\lambda_0 t, \lambda_0 x)$$

est aussi une solution. L'équation est critique pour l'énergie : le changement d'échelle conserve E.

L'espace $L^8_{t,x} = L^8(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ va jouer un rôle important dans cet exposé. Si

$$\partial_t^2 v - \Delta v = f, \quad v_{\restriction t=0} = v_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3), \quad \partial_t v_{\restriction t=0} = v_1 \in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{2}$$

on obtient, en combinant les inégalités de Strichartz et Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |v(t,x)|^8 dxdt\right)^{\frac{1}{8}} \leq C\left[\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |v_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \left|D_x^{1/2} f\right|^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{3}{8}}\right].$$

Soit T_+ le temps maximal d'existence positif de l'équation. La théorie de l'existence locale, reposant notamment sur l'inégalité précédente implique

$$K \Subset [0,T_+) \Longrightarrow \int_K \int_{\mathbb{R}^3} |u|^8 < \infty$$

et le critère d'explosion suivant :

$$T_+ < \infty \Longrightarrow \int_0^{T_+} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^8 = +\infty.$$

Remarquons que du fait du caractère critique du problème il n'y a pas de critère d'explosion dans $\dot{H}^1 \times L^2$. Dans le cas focalisant, Krieger, Schlag et Tataru ont construit dans [KST09] des solutions bornées dans l'espace d'énergie et qui explosent en temps fini.

1.2. **Scattering des solutions.** Dans cet exposé nous nous intéresserons principalement aux solutions de (1) ayant un comportement linéaire (*scattering* solutions en anglais) dans l'espace d'énergie, c'est à dire définies globalement et telles qu'il existe des solutions $v_\pm$ de l'équation linéaire (2) telles que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t) - v_\pm(t)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t u(t) - \partial_t v_\pm(t)\|_{L^2} = 0.$$

On a l'équivalence entre les deux propriétés :

- La solution u est *scattering*.
- Elle est globalement définie et vérifie $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |u|^8 < \infty$.

1.3. **Le cas défocalisant.** Dans le cas défocalisant (voir [Str88], [Gri90], [SS93], [Kap94]), les solutions ont toutes un comportement linéaire. Ceci implique (voir [BG99], [Nak99]) que la quantité

$$\Phi(E) = \sup\left\{\iint_{\mathbb{R}^4} |u|^8, \quad u \text{ solution t.q. } E(u_0,u_1) \leq E\right\}$$

est finie. Cette fonction quantifie le caractère non-linéaire de la solution. Dans [Tao06], T. Tao a obtenu une majoration explicite de Φ :

$$\Phi(E) \leq C(1+E)^{CE^{105/2}}.$$

Cette borne ne devrait bien sûr pas être optimale : on conjecture que $\Phi(E)$ peut être bornée par une fonction polynomiale de l'énergie.

1.4. **Le cas focalisant.** Dans cet exposé nous allons nous intéresser au cas focalisant (signe $-$ devant la non-linéarité). Dans ce cas, l'énergie ne contrôle plus la norme de la solution dans $\dot{H}^1 \times L^2$. Il existe des solutions explosives et des solutions globales non-*scattering*, dont un premier exemple est donné par la solution explicite W :

$$W := \frac{1}{\left(1+\frac{|x|^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

C. Kenig et F. Merle [KM06] ont montré W est la “première” solution non-*scattering* dans un sens que nous allons maintenant préciser.

La solution W est un point critique pour l'inégalité de Sobolev sur $\mathbb{R}^3$: $\|f\|_{L^6} \leq C\|\nabla f\|_{L^2}$. On en déduit, par des arguments purement variationnels :

$$E(u_0,u_1) < E(W,0) \text{ et } \|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\nabla W\|_{L^2} \Longrightarrow \|\nabla u_0\|^2_{L^2} + \frac{3}{2}\|u_1\|^2_{L^2} \leq \|\nabla W\|^2_{L^2}\frac{E(u_0,u_1)}{E(W,0)}.$$

En particulier, dès que $E(u_0,u_1) < E(W,0)$, la condition $\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} < \|\nabla W\|^2_{L^2}$ est stable par le flot et implique la propriété plus forte $\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} + \|\partial_t u(t)\|^2_{L^2} < \|\nabla W\|^2_{L^2}$. Ceci n'implique pas automatiquement l'existence globale, mais C. Kenig et F. Merle ont néanmoins montré :

Théorème A. *Toute solution de* (1) *telle que* $E(u_0,u_1) < E(W,0)$ *et* $\|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\nabla W\|_{L^2}$ *est scattering.*

En plus de la propriété variationnelle précédente, la démonstration de ce théorème comporte plusieurs ingrédients. Entre autres :
- un raisonnement d'induction sur l'énergie et des arguments de concentration/compacité (décomposition en profils de Bahouri-Gérard [BG99]) permettant de se ramener à une solution compacte au changement d'échelle près ;
- des arguments de monotonie impliquant une identité de type viriel ;
- un lemme d'unicité pour éliminer d'éventuelles solutions auto-similaires.

Par les arguments de compacité, on obtient de plus que la fonction à valeur dans $\mathbb{R}_+$,

$$\Phi(E) = \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^4} |u|^8 \quad u \text{ sol. t.q. } \|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\nabla W\|_{L^2}, \text{ et } E(u_0,u_1) \leq E\Big\},$$

est bien définie pour $0 \leq E < E(W,0)$ et

$$\lim_{E\to E(W,0)^-} \Phi(E) = +\infty.$$

Notre but est d'estimer $\Phi(E)$ quand E tend vers $E(W,0)$. C'est une façon de quantifier la dégénérescence du comportement linéaire quand on s'approche de cette énergie seuil. Pour expliciter notre résultat, il faut introduire le linéarisé de l'équation au voisinage de W. Si u est une solution de (1) proche de W, et $h := u - W$.

$$(\partial_t^2 + L)h = R(h). \tag{3}$$

$$L := -\Delta - 5W^4, \quad R(h) := (W+h)^5 - W^5 - 5W^4h = 10W^3h^2 + 10W^2h^3 + 5Wh^4 + h^5.$$

L'opérateur L est une perturbation de $-\Delta$ par un potentiel C^∞ qui décroît en $1/|x|^4$ quand $|x| \to +\infty$. Son spectre essentiel est $[0,+\infty[$ et il n'y a pas de valeur propre plongée dans le spectre continu. On peut montrer

$$-\omega^2 = \inf_{\|u\|_{L^2}=1} (Lu,u)_{L^2} < 0,$$

ce qui implique que L admet une valeur propre strictement négative, $-\omega^2$, qui est en fait unique. Notre résultat principal est le suivant ([DM09]) :

Théorème 1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\Phi(E(W,0)-\varepsilon)}{|\log\varepsilon|} = \frac{1}{\omega}\int_{\mathbb{R}^3} W^8.$$

Remarque 1. Il serait intéressant de calculer la limite $\frac{1}{\omega}\int_{\mathbb{R}^3} W^8$. On a
$$\int_{\mathbb{R}^3} W^8 = \int \frac{1}{\left(1+\frac{|x|^2}{3}\right)^4}dx = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi^2.$$
En revanche nous ne savons pas calculer ω.

Remarque 2. Le théorème 1 est conséquence de l'existence d'une direction instable pour l'opérateur linéarisé. Il est également valable en dimensions supérieures (4 et 5) pour une non-linéarité critique pour l'énergie, ainsi que pour l'équation de Schrödinger non-linéaire focalisante critique pour l'énergie (cf [DM09]).

La démonstration du théorème 1 repose sur la classification des solutions au seuil d'énergie $E(W,0)$ réalisée dans [DM08]. Dans cet article, il est démontré que les solutions telles que $E(u_0,u_1)=E(W,0)$ et $\int|\nabla u_0|^2 \leq \int|\nabla W|^2$ sont toutes *scattering*, sauf
– la solution stationnaire W ;
– une nouvelle solution W^- qui tend exponentiellement vite vers W quand t tend vers $+\infty$ mais est *scattering* pour des temps négatifs ;
– les transformées de W et W^- par les symétries de l'équation.
On déduit de cette classification et du théorème A :

Théorème B (C. Kenig, F. Merle, TD, caractérisation dynamique de W)**.** *Les transformées de W :*
$$\pm\lambda_0^{1/2}W(\lambda_0(x+x_0)), \quad \lambda_0>0,\ x_0\in\mathbb{R}^3$$
sont les seules solutions de l'équation (1) *telles que* $E(u_0,u_1)\leq E(W,0)$, $\|\nabla u_0\|_{L^2}\leq \|\nabla W\|_{L^2}$ *qui ne sont scattering ni pour des temps positifs ni pour des temps négatifs.*

Le théorème B implique que les solutions d'énergie proche de $E(W,0)$ et telles que la norme $\iint u^8$ est grande sont proches d'une transformée de W par les symétries de l'équation. Ceci montre que le comportement de $\Phi(E)$ quand $E\to E(W,0)^-$ est dicté par le linéarisé de l'équation (1) près de W ce dont on déduit le théorème 1. Le reste de ce texte est consacré à un résumé plus détaillé de cette preuve.

2. Démonstration

On va démontrer une majoration de $\Phi(E)$. La démonstration de la minoration correspondante est similaire. Dans toute la démonstration, C désigne une grande constante positive, qui peut changer d'une ligne à l'autre.
Avertissement : On se contente de donner un schéma de preuve, et certains des énoncés qui suivent sont volontairement approximatifs. On renvoie à [DM09] pour la démonstration rigoureuse.
On se donne une suite $\varepsilon\to 0^+$ et on considère une suite u_ε de solutions telle que

$$E(u_{\varepsilon,0},u_{\varepsilon,1})=E(W,0)-\varepsilon, \quad \int|\nabla u_{\varepsilon,0}|^2<\int|\nabla W|^2 \tag{4}$$

$$\left|\iint_{\mathbb{R}^4} u_\varepsilon^8-\Phi(E(W,0)-\varepsilon)\right|\leq 1, \tag{5}$$

et donc $\iint_{\mathbb{R}^4} u_\varepsilon^8\to+\infty$ quand $\varepsilon\to 0^+$.

On va montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que quand $\varepsilon \to 0^+$,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |u_\varepsilon(t,x)|^8 dxdt \leq \frac{|\log \varepsilon|}{\omega} + C, \tag{6}$$

2.1. **Comportement au seuil d'énergie et convergence vers W.** L'estimation de $\iint_{\mathbb{R}^4} u_\varepsilon^8$ se fait en plusieurs étapes. Quitte à translater en temps, on peut supposer

$$\int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^3} u_\varepsilon^8(t,x)dxdt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} u_\varepsilon^8(t,x)dxdt \to +\infty. \tag{7}$$

Lemme 3. *Si la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie (7), il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ (que l'on note encore $(u_\varepsilon)_\varepsilon$) qui tend vers W ou $-W$ aux changements d'échelle et aux translations en espace près :*

$$\exists \lambda_\varepsilon > 0,\ x_\varepsilon \in \mathbb{R}^3, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\lambda_\varepsilon^{1/2} u_{\varepsilon,0}(\lambda_\varepsilon(x+x_\varepsilon)), \lambda_\varepsilon^{3/2} u_{\varepsilon,1}(\lambda_\varepsilon(x+x_\varepsilon))\right) = (\pm W, 0) \text{ dans } \dot{H}^1 \times L^2.$$

Idée de preuve. On montre d'abord qu'aux changements d'échelle et aux translations en espace près, $(u_{\varepsilon,0}, u_{\varepsilon,1})$ converge dans $\dot{H}^1 \times L^2$:

$$\begin{aligned} &\exists \lambda_\varepsilon > 0,\ x_\varepsilon \in \mathbb{R}^3,\ (U_0, U_1) \in \dot{H}^1 \times L^2, \\ &\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\lambda_\varepsilon^{1/2} u_{\varepsilon,0}(\lambda_\varepsilon(x+x_\varepsilon)), \lambda_\varepsilon^{3/2} u_{\varepsilon,1}(\lambda_\varepsilon(x+x_\varepsilon))\right) = (U_0, U_1) \text{ dans } \dot{H}^1 \times L^2. \end{aligned} \tag{8}$$

C'est un argument standard, qui constitue l'étape "compacité" de la démonstration du théorème A de Kenig et Merle. Résumons le très rapidement. On raisonne par l'absurde. Par la décomposition en profils de H. Bahouri et P. Gérard, on peut montrer que, si la suite $(u_{\varepsilon,0}, u_{\varepsilon,1})$ n'est pas compact aux translations et changements d'échelle près, il existe deux suites $(v_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon,1})$, $(w_{\varepsilon,0}, w_{\varepsilon,1})$ de conditions initiales telles que

$$u_{\varepsilon,0} = v_{\varepsilon,0} + w_{\varepsilon,0}, \quad u_{\varepsilon,1} = v_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,1},$$

$$\|v_{\varepsilon,0}\|_{\dot{H}^1}^2 + \|v_{\varepsilon,1}\|_{L^2}^2 \geq \eta_0 > 0, \quad \|w_{\varepsilon,0}\|_{\dot{H}^1}^2 + \|w_{\varepsilon,1}\|_{L^2}^2 \geq \eta_0 > 0. \tag{9}$$

De plus $(v_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon_1})$ et $(w_{\varepsilon,0}, w_{\varepsilon,1})$ vérifient des propriétés de pseudo-orthogonalité que l'on ne détaillera pas ici. Ces propriétés impliquent :

$$E(u_{\varepsilon,0}, u_{\varepsilon,1}) = E(v_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon,1}) + E(w_{\varepsilon,0}, w_{\varepsilon,1}) + o_\varepsilon(1), \quad \varepsilon \to 0^+ \tag{10}$$

$$\|\nabla u_{\varepsilon,0}\|_{L^2}^2 = \|\nabla v_{\varepsilon,0}\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_{\varepsilon,0}\|_{L^2}^2 + o_\varepsilon(1), \quad \varepsilon \to 0^+. \tag{11}$$

Notons v_ε et w_ε les solutions de (1) de conditions initiales respectivement $(v_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon_1})$ et $(w_{\varepsilon,0}, w_{\varepsilon,1})$. D'après (9), (10) et le théorème A de Kenig et Merle, $\iint v_\varepsilon^8 dtdx$ et $\iint w_\varepsilon^8 dtdx$ sont uniformément bornés. Ces bornes uniformes et la pseudo-orthogonalité de v_ε et w_ε impliquent (par des arguments d'approximation des solutions de (1)) que $\iint u_\varepsilon^8 dtdx$ est également uniformément borné. Plus précisément :

$$\iint u_\varepsilon^8 dtdx = \iint v_\varepsilon^8 dtdx + \iint w_\varepsilon^8 dtdx + o_\varepsilon(1), \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Ceci contredit (7), ce qui termine la preuve de la convergence de $(u_{\varepsilon,0}, u_{\varepsilon,1})$ aux transformations près.

Soit U la solution de conditions initiales (U_0, U_1). Alors U vérifie :

$$E(U_0, U_1) \leq E(W, 0), \quad \|\nabla U_0\|_{L^2} \leq \|\nabla W\|_{L^2},$$

et n'est *scattering* ni à droite ni à gauche. Par la caractérisation dynamique de W (théorème B), $(U_0, U_1) = (W, 0)$ modulo les transformations de l'équation ce qui conclut la preuve.

Remarquons que la partie difficile de cette démonstration se cache dans le théorème de classification B. □

Dans la suite, on translate et rééchelonne u_ε de telle manière que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u_{\varepsilon,0}, u_{\varepsilon,1}) = (W, 0) \text{ dans } \dot{H}^1 \times L^2.$$

Soit $\mathcal{Y}$ la fonction propre de L pour la valeur propre négative :

$$L\mathcal{Y} = -\omega^2\mathcal{Y}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Y}^2 = 1.$$

On pose

$$h_\varepsilon := u_\varepsilon - W, \quad \beta_\varepsilon(t) := \int h_\varepsilon(t)\mathcal{Y}.$$

2.2. **Excitation du mode propre.** C'est la composante β_ε de h_ε selon $\mathcal{Y}$ qui va dicter le comportement de la norme L^8. On commence par montrer que cette composante est non négligeable :

Lemme 4. *Après extraction éventuelle d'une sous-suite :*

$$|\beta_\varepsilon(0)| = \left|\int h_\varepsilon(0)\mathcal{Y}\right| \gtrsim \sqrt{\varepsilon} \text{ quand } \varepsilon \to 0^+.$$

Démonstration. On a

$$E(W + h, \partial_t h) = \frac{1}{2}\int |\partial_t h|^2 + Q(h) + O(\|h\|_{L^6}^3),$$

où $Q(h)$ est la forme quadratique

$$Q(h) = \frac{1}{2}\int Lh\, h = \frac{1}{2}\int |\nabla h|^2 - \frac{5}{2}\int W^4 h^2.$$

Remarquons que $Q(\mathcal{Y}) = -\frac{1}{2}\omega^2$ est strictement négatif. En adaptant des arguments de [Rey90], on peut montrer que c'est la seule direction négative de la forme quadratice Q. Précisément :

Lemme 5. *Si $h \in \dot{H}^1$ et $\int h\mathcal{Y} = 0$, alors $Q(h) \geq 0$.*

On écrit $u_\varepsilon = W + \beta_\varepsilon\mathcal{Y} + g_\varepsilon$, avec $\int_{\mathbb{R}^3} g_\varepsilon\mathcal{Y} = 0$. On en déduit

$$-\varepsilon = E(u_\varepsilon, \partial_t u_\varepsilon) - E(W, 0) = -\beta_\varepsilon^2|Q(\mathcal{Y})| + Q(g_\varepsilon) + \frac{1}{2}\int |\partial_t u_\varepsilon|^2 + O(\beta_\varepsilon^3 + \|g_\varepsilon\|_{L^6}^3)$$

ce qui donne le lemme. □

2.3. **Estimation du temps de sortie.** On donne maintenant une borne supérieure du temps qu'il faut à la solution u_ε pour s'éloigner de W.

Lemme 6. *Soit $\eta > 0$ un* petit *paramètre fixé. Soit*

$$T_\varepsilon = \inf \{t \geq 0,\ \beta_\varepsilon(t)| \geq \eta\}.$$

Alors (quitte à changer t en $-t$), pour ε petit,

$$T_\varepsilon \leq \frac{|\log \varepsilon|}{2\omega} + C,$$

où la grande constante $C > 0$ dépend de η.

Idée de preuve. La fonction h_ε est solution de

$$\partial_t^2 h_\varepsilon + Lh^\varepsilon = O\left(\|h^\varepsilon\|_{L^6}^3\right).$$

L'opérateur L admet 0 comme valeur propre et résonnance : du fait des invariances de l'équation,

$$L(\partial_{x_1} W) = L(\partial_{x_2} W) = L(\partial_{x_3} W) = L\left(\frac{1}{2}W + x \cdot \nabla W\right) = 0.$$

Dans la pratique ces solutions ne jouent qu'un rôle technique, et on va les ignorer dans toute la suite de cette exposé. La solution h_ε est de la forme

$$h_\varepsilon = \beta_\varepsilon(t)\mathcal{Y} + g_\varepsilon(t), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Y} g_\varepsilon = 0.$$

On a alors

$$\beta_\varepsilon'' - \omega^2 \beta_\varepsilon = O(\|h^\varepsilon(t)\|_{L^6}^3).$$

Si $t \in [0, T_\varepsilon]$ et η est choisi assez petit, on peut montrer que h^ε reste petit[1], et l'approximation par l'équation linéaire reste valable. On peut donc ignorer le terme $O(\ldots)$. On obtient

$$|\beta_\varepsilon(t)| = \left|\beta_\varepsilon(0)\cosh(\omega t) + \frac{1}{\omega}\beta_\varepsilon'(0)\sinh(\omega t)\right| + \text{l.o.t.}.$$

Quitte à inverser le sens du temps, on peut supposer que $\beta_\varepsilon'(0)$ et $\beta_\varepsilon(0)$ sont du même signe, et donc par le lemme 4,

$$|\beta_\varepsilon(t)| \geq \frac{|\beta_\varepsilon(0)|}{2} e^{\omega t} \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C} e^{\omega t}.$$

Soit, en faisant $t = T_\varepsilon$,

$$\eta = |\beta_\varepsilon(T_\varepsilon)| \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C} e^{\omega T_\varepsilon}$$

et donc (η est fixé et on ne tient pas compte de la dépendance des constantes en η)

$$\frac{|\log(\varepsilon)|}{2\omega} = \frac{-\log(\varepsilon)}{2\omega} \geq T_\varepsilon - C,$$

ce qui termine la preuve. □

[1] De fait, il faut aussi donner des estimations des composantes selon les modes $\partial_{x_1} W$,... ce qui se fait par un argument de type *bootstrap* un petit peu technique. On renvoie à [DM09, Lemma 3.7] pour la démonstration complète

2.4. **Fin de la démonstration.** Démontrons la borne supérieure (6). D'après (7),

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon(t,x)|^8dxdt=2\iint_{t\geq 0}\ldots=2\left(\iint_{0\leq t\leq T_\varepsilon}\ldots+\iint_{T_\varepsilon\leq t<+\infty}\ldots\right).$$

Par le lemme 3, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon|^8dxdt\leq C. \tag{12}$$

En effet, on raisonne par l'absurde. Par construction

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{T_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}u_\varepsilon^8dxdt=+\infty$$

et donc si

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3}u_\varepsilon^8dxdt=+\infty,$$

on aurait par le lemme 3, et aux transformations de l'équation près

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(u_\varepsilon(T_\varepsilon),\partial_t u_\varepsilon(T_\varepsilon))=(W,0),$$

contredisant la définition de T_ε. D'où (12)

En utilisant[2] que u_ε est proche de W sur $[0,T_\varepsilon]$,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\varepsilon(t,x)|^8dxdt\sim 2\int_0^{T_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}u_\varepsilon^8dxdt\sim 2\int_0^{T_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}W^8dxdt$$

$$\leq 2T_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}W^8\leq\frac{|\log\varepsilon|}{\omega}+C,$$

ce qui donne la majoration (6) de $\Phi(E(W,0)-\varepsilon)$.

Pour obtenir une minoration de $\Phi(E(W,0)-\varepsilon)$, on raisonne de même, en étudiant les solutions de conditions initiales :

$$u_{\varepsilon,0}=W+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{Y}_\varepsilon,\quad u_{\varepsilon,1}=0.$$

Références

[BG99] Hajer Bahouri and Patrick Gérard. High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations. *Amer. J. Math.*, 121(1) :131–175, 1999.

[DM08] Thomas Duyckaerts and Frank Merle. Dynamics of threshold solutions for energy-critical wave equation. *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, pages Art ID rpn002, 67, 2008.

[DM09] Thomas Duyckaerts and Frank Merle. Scattering norm estimate near the threshold for energy-critical focusing semilinear wave equation. *Indiana Univ. Math. J.*, 58 :1971–2002, 2009.

[Gri90] Manoussos G. Grillakis. Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity. *Ann. of Math. (2)*, 132(3) :485–509, 1990.

[GSV92] Jean Ginibre, Avy Soffer, and Giorgio Velo. The global Cauchy problem for the critical nonlinear wave equation. *J. Funct. Anal.*, 110(1) :96–130, 1992.

[Kap94] Lev Kapitanski. Global and unique weak solutions of nonlinear wave equations. *Math. Res. Lett.*, 1(2) :211–223, 1994.

[2]Les estimations suivantes dépendent en fait de $\eta>0$. Pour être plus précis, il faut expliciter cette dépendance en η et faire tendre η vers 0 à la fin du raisonnement, ce qui ne pose aucun problème.

[KM06] Carlos E. Kenig and Frank Merle. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case. *Invent. Math.*, 166(3) :645–675, 2006.

[KST09] Joachim Krieger, Wilhelm Schlag, and Daniel Tataru. Slow blow-up solutions for the $H^1(\mathbb{R}^3)$ critical focusing semilinear wave equation. *Duke Math. J.*, 147(1) :1–53, 2009.

[Nak99] Kenji Nakanishi. Scattering theory for the nonlinear Klein-Gordon equation with Sobolev critical power. *Internat. Math. Res. Notices*, (1) :31–60, 1999.

[Pec84] Hartmut Pecher. Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equation. *Math. Z.*, 185(2) :261–270, 1984.

[Rey90] Olivier Rey. The role of the Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. *J. Funct. Anal.*, 89(1) :1–52, 1990.

[SS93] Jalal Shatah and Michael Struwe. Regularity results for nonlinear wave equations. *Ann. of Math. (2)*, 138(3) :503–518, 1993.

[SS94] Jalal Shatah and Michael Struwe. Well-posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth. *Internat. Math. Res. Notices*, (7) :303ff., approx. 7 pp. (electronic), 1994.

[Str88] Michael Struwe. Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 15(3) :495–513 (1989), 1988.

[Tao06] Terence Tao. Spacetime bounds for the energy-critical nonlinear wave equation in three spatial dimensions. *Dyn. Partial Differ. Equ.*, 3(2) :93–110, 2006.