Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Raphaël Danchin et Piotr Bogusław Mucha

Problème de Stokes et système de Navier-Stokes incompressible à densité variable dans le demi-espace

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° X, 19 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A10_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n° X, 1-19

Problème de Stokes et système de Navier-Stokes incompressible à densité variable dans le demi-espace

Raphaël Danchin[1] and Piotr Bogusław Mucha[2]

1. Université Paris-Est, Laboratoire d'Analyse et de Math. Appliquées, UMR 8050, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex
E-mail : danchin@univ-paris12.fr
2. Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Poland
E-mail : p.mucha@mimuw.edu.pl

Résumé. On s'intéresse à la résolution du système de Navier-Stokes incompressible *à densité variable* dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1}\times]0,\infty[$ en dimension $n\geq 3$. On considère des données initiales à régularité *critique*. On établit que si la densité initiale est proche d'une constante strictement positive dans $L^\infty\cap\dot W^{1,n}$ et si la vitesse initiale est petite par rapport à la viscosité dans l'espace de Besov homogène $\dot B^0_{n,1}$ alors le système de Navier-Stokes admet une unique solution globale. La démonstration repose sur de nouvelles estimations de régularité maximale pour le système de Stokes dans le demi-espace.

1 Introduction

Le système de Navier-Stokes incompressible à densité variable dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$(INS)\qquad \begin{cases} \partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0,\\ \rho\big(\partial_t u + u\cdot\nabla u\big) - \mu\Delta u + \nabla\Pi = \rho f,\\ \operatorname{div} u = 0,\\ u|_{\partial\Omega} = 0,\\ u_0|_{t=0} = u_0, \qquad \rho|_{t=0} = \rho_0.\end{cases}$$

Ci-dessus, ρ, $u=(u_1,...,u_n)$ et Π désignent respectivement la densité, vitesse et pression dans le fluide, μ est le coefficient de viscosité (supposé constant et strictement positif) et f, une densité de forces extérieures. On suppose connues la densité initiale ρ_0 (strictement positive) et la vitesse initiale u_0 (qui doit être à divergence et trace normale nulles).

Le système (INS) a été abondamment étudié dans le cas homogène $\rho\equiv 1$ où l'on retrouve le système de Navier-Stokes "classique" (noté (NS) dans la suite). Lorsque $\Omega=\mathbb{R}^n$, le système (NS) est invariant pour tout $\lambda>0$ par le changement d'échelle

$$u_0(x)\longrightarrow \lambda u_0(\lambda x)\quad\text{et}\quad \big(u(t,x),\Pi(t,x)\big)\longrightarrow\big(\lambda u(\lambda^2 t,\lambda x),\lambda^2\Pi(\lambda^2 t,\lambda x)\big)$$

et la résolution de (NS) peut se ramener à une application du théorème de point fixe contractant dans un espace fonctionnel bien choisi, à norme invariante par la transformation ci-dessus.

Ce type d'approche pour résoudre (NS) remonte aux travaux de H. Fujita et T. Kato [13] où u_0 est pris dans l'espace de Sobolev $\dot H^{\frac n2-1}$. On sait maintenant résoudre le système de Navier-Stokes classique dans bien d'autres espaces ayant la propriété d'invariance ci-dessus : les espaces de Lebesgue $L^n(\mathbb{R}^n)$ (voir [14]), les espaces de Besov, de Triebel-Lizorkin, Morrey-Companato, de Lorentz (voir par exemple [5]). Le cas $\mathbb{R}^n_+$ a été traité dans [15] (en ce qui concerne les espaces de Lebesgue) et dans [6] (pour les espaces de Besov à indice strictement négatif).

Dans le cas non homogène, l'étude du système (INS) se complique du fait de la perte de parabolicité du système (l'équation vérifiée par la densité est une équation de transport). Les premiers résultats mathématiques relatifs à (INS) semblent dûs à l'école russe des années 1970. Par exemple, dans [16], L. Ladyzhenskaya et V. Solonnikov ont établi des résultats d'existence de solutions régulières uniques dans le cas d'un domaine borné lorsque la densité initiale est strictement positive. De nombreux travaux ont porté sur la construction de solutions faibles globales. On sait maintenant construire :

– des solutions globales à vitesse initiale $u_0 \in H^1$ et densité initiale ρ_0 bornée en dimension 2 et 3, avec $\|u_0\|_{H^1}$ petite si $n = 3$ (voir [3]),
– des solutions faibles d'énergie finie pour $\sqrt{\rho_0}u_0 \in L^2$ et $\rho_0 \in L^\infty$ (voir [18]).

Dans les deux cas la présence éventuelle de vide à l'instant initial complique singulièrement l'analyse et, même sans vide, le problème de l'unicité reste ouvert.

Dans ce travail, nous souhaitons construire des solutions fortes (i.e. uniques) dans l'esprit de celles de H. Fujita et T. Kato pour le cas homogène. Pour simplifier la présentation, on se limite à des petites perturbations (en un sens que l'on précisera plus tard) de l'état initial $(\rho_0, u_0) = (1, 0)$, et l'on cherche à montrer l'existence d'une solution globale unique pour (INS). Il est clair que dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+$, le système (INS) est invariant par la transformation :

$$(\rho, u, \Pi)(t, x) \longmapsto (\rho, \lambda u, \lambda^2\Pi)(\lambda^2 t, \lambda x), \tag{1.1}$$

$$(\rho_0, u_0)(x) \longmapsto (\rho_0, \lambda u_0)(\lambda x). \tag{1.2}$$

On cherche donc à résoudre (INS) avec u_0 (resp. $\rho_0 - 1$) dans un espace E (resp. F) de distributions à norme invariante pour tout $\lambda > 0$ par la transformation (1.2) (donc la "régularité" de la vitesse est "la même" que celle du gradient (spatial) de la densité).

Dans le cas $\mathbb{R}^n$, la propriété (1.2) contraint F à être inclus dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$. Mais clairement seul un contrôle de la norme L^∞ de la densité peut assurer la parabolicité (uniforme) de l'équation sur u. En conséquence, il est raisonnable de chercher F parmi les sous-espaces vectoriels de L^∞. À notre connaissance, tous les résultats d'unicité sur (INS) nécessitent au minimum une information L^p sur le gradient de la densité. Nous choisirons donc finalement $F = L^\infty \cap W^{1,n}$ dont la version homogène $L^\infty \cap \dot{W}^{1,n}$ possède la propriété d'invariance souhaitée.

Ce choix de F contraint le choix de E. En effet, comme ρ vérifie une équation de transport, on voit mal comment se passer de la propriété $\nabla u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; L^\infty)$ pour préserver la régularité $\dot{W}^{1,n}$ au cours de l'évolution. Sachant que (en simplifiant outrageusement) u doit vérifier une équation de la chaleur, il semble inévitable de choisir E de telle sorte que

$$\int_0^T \|\nabla\big(e^{t\Delta}u_0\big)\|_{L^\infty}\, dt \le C\|u_0\|_E \tag{1.3}$$

où $(e^{t\Delta})_{t\ge0}$ est le semi-groupe de la chaleur (avec conditions de Dirichlet homogènes si $\Omega = \mathbb{R}^n_+$).

Définir E par l'inégalité ci-dessus ne semble pas permettre de gérer les termes non linéaires de (INS). Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, les seuls espaces fonctionnels "classiques" vérifiant (1.2) et (1.3) sont les espaces de Besov $\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1}$ (définis dans la section 2), et l'espace de Lorentz $L^{n,1}$ (voir [17]). Pour les espaces de Besov, cette propriété provient du fait que $u_0 \in \dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1}$ entraîne $\nabla e^{t\Delta}u_0 \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1})$ (voir la partie 4.1), et que $\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1} \subset L^\infty$. Cela permet de démontrer l'existence globale (avec unicité si $p \le n$) dans un cadre fonctionnel critique pour les petites perturbations de $(1,0)$ (voir [1, 2, 8]). Ces résultats reposant très fortement sur l'analyse de Fourier, leur généralisation à un domaine autre que $\mathbb{R}^n$ ou que le tore n'est pas immédiate. Dans le cas de domaines bornés, un substitut possible (utilisé dans [9, 16]) est la propriété de régularité maximale "classique" pour le système de Stokes non stationnaire

$$\begin{cases} \partial_t v - \mu\Delta v + \nabla P = F, \\ \text{div } v = 0, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \\ v|_{t=0} = v_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

qui assure que, pour tout $1 < p, r < \infty$, on a (dans le cas $v_0 \equiv 0$ pour simplifier)

$$\|\partial_t v, \mu\nabla^2 v, \nabla P\|_{L^p(0,t;L^r(\Omega))} \leq C\|f\|_{L^p(0,t;L^r(\Omega))}. \tag{1.5}$$

Malheureusement, pour atteindre l'indice de régularité critique à l'aide de (1.5), il faudrait utiliser le cas limite $p = 1$, génériquement faux.

Dans la suite de ce travail, nous prendrons[1] $E = \dot{B}^0_{n,1}$ qui s'avère être le plus grand espace de Besov au scaling vérifiant (1.3) et pour lequel on sache démontrer l'unicité pour (INS) si $(\rho_0 - 1) \in F$. On obtient alors l'énoncé suivant :

Théorème 1 *Supposons que $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+$. Soit ρ_0 une fonction positive telle que $(\rho_0 - 1) \in W^{1,n}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Soit u_0 un champ de vecteurs à divergence nulle, coefficients dans $\dot{B}^0_{n,1}(\Omega)$ et à trace normale[2] nulle sur $\partial\Omega$. Soit f un champ de vecteurs dépendant du temps et à coefficients dans $L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}^0_{n,1}(\Omega))$. Il existe une constante c ne dépendant que de n et telle que si*

$$\|\rho_0 - 1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\rho_0\|_{L^n(\Omega)} + \mu^{-1}\big(\|u_0\|_{\dot{B}^0_{n,1}(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^0_{n,1}(\Omega))}\big) \leq c$$

alors (INS) admet une solution, unique si $n \geq 3$, dans l'espace $X_n(\Omega)$ constitué des fonctions (ρ, u, Π) telles que

$$(\rho - 1) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+; W^{1,n}(\Omega)),$$
$$u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+; \dot{B}^0_{n,1}(\Omega)) \quad et \quad \partial_t u, \nabla^2 u, \nabla\Pi \in L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}^0_{n,1}(\Omega)).$$

Remarques :

– Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, le résultat ci-dessus a été établi dans [8] si $n = 2$ (avec l'hypothèse supplémentaire $\rho_0 - 1$ petit dans $\dot{B}^0_{2,1}(\mathbb{R}^2)$ pour avoir l'unicité) et dans [1] si $n \geq 3$ (voir aussi [2]). L'intégralité de la démonstration du cas $\mathbb{R}^n_+$ se trouve dans [10].
– La condition $(\rho_0 - 1) \in W^{1,n}(\Omega)$ n'impose pas à la densité d'être continue, mais "presque". La vitesse initiale, quant à elle, peut présenter un saut le long d'une hypersurface.
– Avec des changements mineurs dans la démonstration, on peut établir un résultat local avec vitesse initiale grande. Il est aussi possible (mais plus délicat) de relaxer la condition de petitesse sur la densité.
– On peut remplacer l'espace $W^{1,n}$ par l'espace de Besov un peu plus gros $B^1_{n,\infty}$, si $n \geq 3$.

Formellement, la démonstration du théorème 1 est indépendante du choix de Ω. Elle repose d'une part sur des estimations non linéaires, des arguments de compacité et des estimations classiques pour les équations de transport valables dans des domaines assez généraux, et d'autre part sur des estimations de régularité maximale pour le système de Stokes non stationnaire (1.4) détaillées dans le théorème ci-dessous et qui n'ont été établies que dans les cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+$:

[1]Sachant que $\dot{B}^0_{n,1}$ et $L^{n,1}$ ne sont pas comparables, le cas $L^{n,1}$ mériterait d'être étudié d'un peu plus près.
[2]Voir le lemme 4 pour la justification de l'existence de la trace normale.

Théorème 2 *Supposons que* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{R}^n_+$, $p \in]1,\infty[$ *et* $s \in]\frac{1}{p}-1, \frac{1}{p}[$. *Soit* $F \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}^s_{p,1}(\Omega))$ *et* $v_0 \in \dot{B}^s_{p,1}(\Omega)$ *avec* $\mathrm{div}\, v_0 = 0$ *et* $v_{0n}|_{\partial\Omega} = 0$. *Il existe une unique solution à (1.4) telle que*

$$v \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; \dot{B}^s_{p,1}(\Omega)), \quad \partial_t v, \nabla^2 v, \nabla P \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}^s_{p,1}(\Omega)),$$

et il existe une constante ne dépendant que de s, p *et* n, *telle que pour tout* $T > 0$,

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}^s_{p,1}(\Omega))} + \|\partial_t v, \mu\nabla^2 v, \nabla P\|_{L^1(0,T;\dot{B}^s_{p,1}(\Omega))} \leq C\Big(\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\Omega)} + \|F\|_{L^1(0,T;\dot{B}^s_{p,1}(\Omega))}\Big).$$

Remarques :

- En combinant les résultats des cas $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n_+$ avec des techniques de localisation et de redressement, on s'attend à pouvoir généraliser le théorème ci-dessus à des domaines bornés ou extérieurs de régularité C^2. Cela fait l'objet d'un travail en cours.
- Il est fondamental d'utiliser des espaces de Besov *avec troisième indice égal à* 1. Pour les espaces de Besov $\dot{B}^s_{p,q}(\Omega)$ avec $q > 1$, l'inégalité (4.4) est (génériquement) fausse si $\Omega = \mathbb{R}^n$.
- D'autres inégalités du même tonneau peuvent se déduire de celle du théorème 2, par interpolation. Elles nous seront utiles pour établir l'unicité dans (INS).

Dans la section suivante nous donnons quelques propriétés des espaces de Besov ainsi que des lemmes techniques essentiels. La démonstration du théorème 1 est faite dans la section 3 et celle du théorème 2 est l'objet de la dernière section.

2 Quelques outils

Rappelons d'abord la définition des espaces de Besov homogènes dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ une fonction régulière supportée dans $\{1/2 \leq r \leq 2\}$ et vérifiant

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-k}r) = 1 \quad \text{pour tout} \quad r > 0. \tag{2.1}$$

On définit les blocs dyadiques $(\dot{\Delta}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de notre *décomposition de Littlewood-Paley* sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\dot{\Delta}_k u := \varphi(2^{-k}D)u = \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-k}\cdot)\mathcal{F}u\big) \quad \text{avec} \quad \varphi(\xi) := \phi(|\xi|),$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1,\infty]$, on définit ensuite les semi-normes de Besov sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \big\|2^{sk}\|\dot{\Delta}_k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}. \tag{2.2}$$

Ces semi-normes permettent seulement de définir un espace de distribution *modulo les polynômes.* La définition que nous proposons ci-dessous a l'avantage de régler le problème de *divergence infrarouge* et d'assurer que

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_k u \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Définition 1 *Soit* $\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des distributions tempérées* u *sur* $\mathbb{R}^n$ *telles que pour toute fonction* θ *régulière à support compact dans* $\mathbb{R}^n$, *on ait*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \theta(\lambda D)u = 0 \quad \textit{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On pose alors

$$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \Big\{u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n) \ \big| \ \|u\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty\Big\}.$$

Avec la définition ci-dessus, l'espace $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est complet dès que $s \le n/p$ si $q = 1$, et $s < n/p$ si $q > 1$, et, dans le cas p et q fini, l'ensemble $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de la classe de Schwartz dont la transformée de Fourier est supportée en dehors de l'origine est dense dans $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (voir [4]).

En raisonnant par densité, on en déduit le résultat suivant :

Lemme 1 *Soit $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ avec p et q finis. Alors l'équation de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

admet une unique solution u dans $\dot{B}^{s+2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, qui vérifie $\|u\|_{\dot{B}^{s+2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$.

On a les inclusions suivantes (voir e.g. [4]) :

$$\dot{B}^0_{p,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si} \quad 1 \le p \le \infty, \tag{2.5}$$

$$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}})}_{\widetilde{p},q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si} \quad 1 \le p \le \widetilde{p} \le \infty,\ 1 \le q \le \infty \quad \text{et} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

ainsi que la propriété d'interpolation réelle :

$$\Big(\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n), \dot{B}^{s'}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\Big)_{(\theta,q)} = \dot{B}^{(1-\theta)s+\theta s'}_{p,q}(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

Dans le cas d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, on définit $\dot{B}^s_{p,q}(\Omega)$ par restriction :

Définition 2 *La distribution u sur Ω appartient à $\dot{B}^s_{p,q}(\Omega)$ s'il existe $\widetilde{u} \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ tel que u coïncide avec la restriction (au sens des distributions) de $\widetilde{u}$ sur Ω. On pose alors*

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\Omega)} := \inf_{\widetilde{u}_{|\Omega}=u} \|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Cette définition a l'avantage de redonner gratuitement (2.5), (2.6) et (2.7) pour un domaine général.

Dans la suite de cette section, on prend $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Le résultat de densité suivant (démontré dans [10]) nous sera fort utile car il nous permettra entre autres de considérer les extensions symétriques et antisymétriques de fonctions de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$ à l'espace entier :

Proposition 1 *Pour tout $1 \le p, q < \infty$ et $\frac{1}{p} - 1 < s < \frac{1}{p}$, l'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$ des fonctions régulières à support compact dans $\mathbb{R}^n_+$ est dense dans $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$.*

Considérons maintenant l'équation de Poisson dans le demi-espace.

Lemme 2 *Pour tout $H \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$ avec $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ et $\frac{1}{p} - 1 < s < \frac{1}{p}$, l'équation*

$$\begin{array}{lll} \Delta z = \operatorname{div} H & \text{dans} & \mathbb{R}^n_+, \\ z = 0 & \text{sur} & \partial\mathbb{R}^n_+ \end{array} \qquad z \to 0 \quad \text{quand} \quad |x| \to \infty \tag{2.8}$$

a une unique solution z telle que $\nabla z \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$, et l'on a

$$\|\nabla z\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)} \le C\|H\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{2.9}$$

Dém. On étend H par antisymétrie : on définit $\widetilde{H}$ par $\widetilde{H}_{|\mathbb{R}^n_+}=H$ et, si $H_\tau:=(H_1,\cdots,H_{n-1})$ et $\widetilde{H}_\tau:=(\widetilde{H}_1,\cdots,\widetilde{H}_{n-1})$,

$$\forall x_n\in]0,+\infty[,\ \widetilde{H}_\tau(x',-x_n)=-H_\tau(x',x_n)\quad\text{et}\quad \widetilde{H}_n(x',-x_n)=H_n(x',x_n). \tag{2.10}$$

Comme $\frac{1}{p}-1<s<\frac{1}{p}$, la proposition 1 garantit que $\widetilde{H}\in\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\widetilde{H}\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|H\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Donc le lemme 1 assure que $\Delta\widetilde{z}=\operatorname{div}\widetilde{H}$ a une solution $\widetilde{z}\in\dot{B}^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|\nabla\widetilde{z}\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\widetilde{H}\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.11}$$

Comme la composante normale n'a pas de saut sur $\partial\mathbb{R}^n_+$, on a

$$\forall x_n\in(0,+\infty),\ (\operatorname{div}\widetilde{H})(x',-x_n)=-\operatorname{div}H(x',x_n)\quad\text{au sens des distributions}$$

donc $\widetilde{z}$ est impair en x_n et $\widetilde{z}|_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0$. Il est alors facile de montrer que $z:=\widetilde{z}_{|\mathbb{R}^n_+}$ est solution de (2.8) et vérifie l'inégalité (2.9). ■

Le lemme suivant va nous permettre de construire l'extension harmonique sur $\mathbb{R}^n_+$ de distributions définies sur $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Lemme 3 *Supposons que $s>0$, $1<p<\infty$ et $1\leq q\leq\infty$. Alors l'application*

$$E:h\longmapsto\mathcal{F}^{-1}_{x'}[e^{-|\xi'|x_n}\mathcal{F}_{x'}[h]]$$

(où $\mathcal{F}_{x'}$ désigne la transformée de Fourier par rapport aux variables tangentielles et ξ' la variable de Fourier correspondante) est continue de $\dot{B}^{s-1/p}_{p,q}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ dans $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$ et vérifie

$$\begin{cases}\Delta E(h)=0 & \textit{dans}\quad\mathbb{R}^n_+,\\ E(h)=h & \textit{sur}\quad\partial\mathbb{R}^n_+.\end{cases}$$

Dém. Par interpolation (voir (2.6)) et en différentiant suffisamment de fois, on peut se ramener au cas $q=1$ et $s\in]0,1[$. Il faut donc montrer que si $h\in\dot{B}^{s-\frac{1}{p}}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ alors

$$\|E(h)\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}\leq C\|h\|_{\dot{B}^{s-1/p}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+)}.$$

Par interpolation, on peut écrire (voir [23, section 2.5])

$$\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)=\dot{B}^s_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+;L^p(\mathbb{R}_+))\cap\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}_+;L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)). \tag{2.12}$$

Pour commencer, majorons $E(h)$ dans $\dot{B}^s_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+;L^p(\mathbb{R}_+))$. Pour $\xi'\in\partial\mathbb{R}^n_+$, notons $\varphi'_k(\xi')=\phi(2^{-k}|\xi'|)$ et $\widetilde{\varphi}'_k(\xi')=\widetilde{\phi}(2^{-k}|\xi'|)$ avec $\widetilde{\phi}$ fonction régulière sur $\mathbb{R}_+$, supportée dans $\{1/3\leq r\leq 3\}$ et valant 1 près de $\operatorname{supp}\phi$, et ϕ définie en (2.1). Soit $(\dot{\Delta}'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la décomposition de Littlewood-Paley sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ correspondante. Par définition de la norme de Besov, on a

$$\|E(h)\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+;L^p(\mathbb{R}_+))}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{sk}\|\mathcal{F}^{-1}_{x'}[\varphi'_k e^{-|\xi'|x_n}\mathcal{F}_{x'}h]\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Il est clair que

$$\xi' \longmapsto \widetilde{\varphi}'_k(\xi')e^{(2^{k-2}-|\xi'|)x_n} \tag{2.13}$$

est un multiplicateur de Fourier de degré 0 avec bornes indépendantes de $k \in \mathbb{Z}$ et $x_n \in \mathbb{R}_+$. Donc le théorème de Marcinkiewicz (voir [12]) assure que

$$\begin{aligned}
\|E(h)\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+;L^p(\mathbb{R}_+))} &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks}\|e^{-2^{k-2}x_n}\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}\|\dot{\Delta}'_k h\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)},\\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks}2^{-\frac{1}{p}k}\|\dot{\Delta}'_k h\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)},\\
&\leq C\|h\|_{\dot{B}^{s-1/p}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+)}.
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de majorer $E(h)$ dans $\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}_+;L^p(\partial\mathbb{R}^n_+))$. Comme $s \in]0,1[$, on peut écrire (voir [23]) :

$$\|E(h)\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}_+;L^p(\partial\mathbb{R}^n_+))} \approx I := \int_0^\infty \frac{dw}{w^{1+s}}\|E(h)(\cdot,\cdot)-E(h)(\cdot,\cdot+w)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{2.14}$$

Pour estimer le membre de droite, on utilise le fait que

$$\|z\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{F}^{-1}_{x'}[\varphi'_k\mathcal{F}_{x'}z]\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

En conséquence, grâce au théorème de Marcinkiewicz pour le multiplicateur défini en (2.13),

$$\begin{aligned}
\|E(h)(\cdot,\cdot)-E(h)(\cdot,\cdot+w)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{F}^{-1}_{x'}[\varphi'_k(e^{-|\xi'|x_n}-e^{-|\xi'|(x_n+w)})\mathcal{F}_{x'}h]\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)},\\
&\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-\frac{k}{p}}\|\mathcal{F}^{-1}_{x'}[\varphi'_k(1-e^{-|\xi'|w})\mathcal{F}_{x'}h]\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$I \leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \frac{dw}{w^{1+s}}2^{-\frac{k}{p}}\big(1-e^{-2^k w}\big)\|\mathcal{F}^{-1}_{x'}[\psi_k\varphi'_k\mathcal{F}_{x'}h]\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)} \quad\text{avec}\quad \psi_k(\xi')=\widetilde{\phi}'_k(\xi')\frac{1-e^{-|\xi'|w}}{1-e^{-2^k w}}.$$

Comme ψ_k est un multiplicateur de degré 0 borné indépendamment de k et w, on conclut que

$$I \leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \frac{du}{u^{1+s}}2^{k(s-\frac{1}{p})}(1-e^{-u})\|\dot{\Delta}'_k h\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)} \leq C\bigg(\int_0^\infty \frac{1-e^{-u}}{u^{1+s}}\,du\bigg)\|h\|_{\dot{B}^{s-\frac{1}{p}}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+)},$$

ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Il est bien connu que pour les champs de vecteurs à divergence nulle et coefficients $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, la composante normale admet une trace sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ au sens $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{R}^n_+)$. À l'aide du lemme 3 et de la proposition 1, on peut généraliser ce résultat au cadre Besov comme suit :

Lemme 4 *Soit $1<p<\infty$, $1\leq q\leq\infty$ et $s\in]-1+1/p,1/p[$. Pour tout champ de vecteurs F à divergence nulle et coefficients dans $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$, la composante normale F_n admet une trace sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ au sens $\dot{B}^{s-1/p}_{p,q}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ et il existe une constante C ne dépendant que de n, p et s telle que*

$$\|F_n|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\|_{\dot{B}^{s-1/p}_{p,q}(\partial\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|F\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{2.15}$$

La démonstration de la partie unicité du théorème 1 repose sur l'usage d'espaces $\widetilde{L}^1(I;\dot{B}^s_{p,q}(\Omega))$ (avec I intervalle de $\mathbb{R}$) très proches de $L^1(I;\dot{B}^s_{p,q}(\Omega))$. Dans le cas $\Omega=\mathbb{R}^n$, ces espaces, introduits dans [7], sont composés de l'ensemble des distributions u de $\mathcal{S}'(I\times\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|u\|_{\widetilde{L}^1(I;\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))}:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks}\|\Delta_k u\|_{L^1(I;L^p(\mathbb{R}^n))}<\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\theta(\lambda D)u=0$$

pour toute fonction $\theta\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.

L'extension de cette définition à des domaines plus généraux se fait par restriction, comme dans le cas indépendant du temps.

3 Résolution de (INS)

Dans cette partie, on donne les éléments principaux de la démonstration du théorème 1. Pour simplifier la présentation, on suppose que $f\equiv 0$. Le cas $f\not\equiv 0$ est traité dans [10].

3.1 Démonstration de l'existence

On suppose disposer au préalable d'une suite $(\rho^\ell,u^\ell,\nabla\Pi^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de solutions régulières globales correspondant à une suite de données initiales $(\rho^\ell_0,u^\ell_0)_{\ell\in\mathbb{N}}$ régularisées (voir le théorème 3 de [10] pour la construction d'une telle suite).

1) Estimations a priori dans X_n

Comme $\operatorname{div} u=0$ et $u\cdot n=0$ sur $\partial\Omega$, toutes les normes L^p de ρ sont constantes au cours de l'évolution. Par un argument du type Gronwall, il est aussi facile de borner la norme L^n du gradient. Finalement, on aboutit à

$$\|\nabla\rho^\ell(t)\|_{L^n}\leq e^{\int_0^t\|\nabla u^\ell\|_{L^\infty}\,d\tau}\|\nabla\rho^\ell_0\|_{L^n}\quad\text{et}\quad\|1-\rho^\ell(t)\|_{L^\infty}=\|1-\rho^\ell_0\|_{L^\infty}. \tag{3.1}$$

Afin d'estimer la vitesse, on applique le théorème 2 au système

$$\begin{gathered}\partial_t u^\ell-\mu\Delta u^\ell+\nabla\Pi^\ell=(1-\rho^\ell)\partial_t u^\ell-\rho^\ell u^\ell\cdot\nabla u^\ell,\qquad \operatorname{div} u^\ell=0,\\ u^\ell|_{\partial\Omega}=0,\qquad u^\ell|_{t=0}=u^\ell_0.\end{gathered}\tag{3.2}$$

On obtient donc

$$U^\ell_n(t)\leq C\Big(U^\ell_n(0)+\|(1-\rho^\ell)\partial_t u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}+\|\rho^\ell u^\ell\cdot\nabla u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}\Big)$$

avec $U^\ell_n(0):=\|u^\ell_0\|_{\dot{B}^0_{n,1}}$ et

$$U^\ell_n(t):=\|u\|_{L^\infty(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}+\|\partial_t u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}+\mu\|\nabla^2 u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}+\|\nabla\Pi^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}.$$

Des estimations de produit dans les espaces de Besov (voir [4] pour le cas $\mathbb{R}^n$ et [10] pour le cas $\mathbb{R}^n_+$), il découle que

$$\begin{aligned}\|(1-\rho^\ell)\partial_t u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}&\leq C\|\rho^\ell-1\|_{L^\infty(0,t;L^\infty\cap\dot{W}^{1,n})}\|\partial_t u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})},\\ \|\rho^\ell u^\ell\cdot\nabla u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}&\leq C\big(1+\|\rho^\ell-1\|_{L^\infty(0,t;L^\infty\cap\dot{W}^{1,n})}\big)\|u^\ell\|_{L^\infty(0,t;\dot{B}^0_{n,1})}\|\nabla u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot{B}^1_{n,1})}.\end{aligned}$$

Donc

$$U_n^\ell(t) \leq C\Big(U_n^\ell(0) + \|\rho^\ell - 1\|_{L^\infty(0,t;L^\infty\cap\dot W^{1,n})}U_n^\ell(t) + \mu^{-1}\big(1 + \|\rho^\ell - 1\|_{L^\infty(0,t;L^\infty\cap\dot W^{1,n})}\big)(U_n^\ell(t))^2)\Big).$$

En conséquence, il existe deux constantes $c > 0$ et $M > 0$ telles que si

$$\|\rho^\ell - 1\|_{L^\infty(0,T;L^\infty\cap\dot W^{1,n})} \leq c \quad \text{et} \quad U_n^\ell(T) \leq c\mu$$

alors

$$U_n^\ell(t) \leq MU_n^\ell(0) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Clairement, l'inégalité (3.1) implique que la condition de petitesse est vérifiée par $\rho^\ell - 1$ sur $[0,T]$ pourvu que

$$\|\rho_0^\ell - 1\|_{L^\infty} + \|\nabla\rho_0^\ell\|_{L^n} \leq c/2 \quad \text{et} \quad \|\nabla u^\ell\|_{L^1(0,T;L^\infty)} \leq \log 2. \tag{3.4}$$

Comme $\dot B^1_{n,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (voir (2.5),(2.6)), la condition sur ∇u^ℓ est satisfaite si $U_n^\ell(T) \leq c\mu$ avec c assez petit. Comme la fonction $t \mapsto U_n^\ell(t)$ est continue, l'inégalité (3.3) combinée à un argument de bootstrap permet de conclure que (3.3) et la deuxième partie de (3.4) sont vérifiées sur $[0,T]$ pourvu que $\|u_0^\ell\|_{\dot B^0_{n,1}} < c\mu$ avec $c > 0$ assez petit. Sous cette condition, on peut conclure que pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{gathered}\|\rho^\ell(t) - 1\|_{L^\infty} = \|\rho_0^\ell - 1\|_{L^\infty}, \quad \|\nabla\rho^\ell(t)\|_{L^n} \leq 2\|\nabla\rho_0^\ell\|_{L^n},\\ \|\nabla\Pi^\ell, \partial_t u^\ell, \mu\nabla^2 u^\ell\|_{L^1(0,t;\dot B^0_{n,1})} + \|u^\ell\|_{L^\infty(0,t;\dot B^0_{n,1})} \leq M\|u_0^\ell\|_{\dot B^0_{n,1}}.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Bien sûr, si $u_0^\ell \to u_0$ et $\rho_0^\ell \to \rho_0$ alors les termes de droite sont bornés indépendamment de ℓ. En conséquence, $(\rho^\ell, u^\ell, \nabla\Pi^\ell)_{\ell\in\mathbb N}$ est bornée dans l'espace X_n.

2) Compacité

- La densité : comme $\partial_t\rho^\ell = -u^\ell\cdot\nabla\rho^\ell$, les bornes (3.5) assurent que $(\partial_t\rho^\ell)_{l\in\mathbb N}$ est bornée dans $L^2(\mathbb R_+; L^n)$. Donc $(\rho^\ell - 1)_{\ell\in\mathbb N}$ est bornée dans $\mathcal C([0,T]; W^{1,n}) \cap \mathcal C^{\frac12}([0,T]; L^n)$ pour tout $T > 0$. En utilisant la compacité de l'injection de $W^{1,n}_{loc}$ dans L^n_{loc}, le théorème d'Ascoli et le procédé diagonal de Cantor, on en déduit qu'à extraction près, $(\rho^\ell)_{l\in\mathbb N}$ tend vers une fonction ρ dans $\mathcal C(\mathbb R_+; L^n_{loc})$. En combinant avec les propriétés de compacité de $L^\infty(\mathbb R_+; W^{1,n}\cap L^\infty)$ pour la topologie faible $\star$, on conclut que $\rho \in L^\infty(\mathbb R_+; L^\infty \cap W^{1,n})$.
- La vitesse : Les inégalités (3.5) entraînent que la suite $(u^\ell)_{\ell\in\mathbb N}$ est bornée dans l'espace $W^{1,1}_{loc}(\mathbb R_+\times\Omega)$ qui s'injecte de façon localement compacte dans $L^p_{loc}(\mathbb R_+\times\Omega)$ pour tout $p < (n+1)/n$. En combinant avec les propriétés de compacité de l'espace $L^\infty(\mathbb R_+; \dot B^0_{n,1})$ pour la topologie faible $\star$, on en déduit que $(u^\ell)_{\ell\in\mathbb N}$ converge (à extraction près et au sens des distributions) vers un champ de vecteurs u à divergence nulle et coefficients dans $L^\infty(\mathbb R_+; \dot B^0_{n,1})$. En combinant avec les bornes uniformes de $(\nabla^2 u^\ell)_{\ell\in\mathbb N}$ dans $L^1(\mathbb R_+; \dot B^0_{n,1})$, on obtient de plus $\nabla^2 u \in L^1(\mathbb R_+; \dot B^0_{n,1})$[3].

[3]Ce point n'est pas immédiat : si l'on utilise seulement les bornes dans $L^1(\mathbb R_+; \dot B^0_{n,1})$, on ne peut qu'affirmer que $\nabla^2 u$ appartient à l'ensemble $\mathcal M(\mathbb R_+; \dot B^0_{n,1})$ des mesures bornées (en temps) à valeurs $\dot B^0_{n,1}$. Mais comme on dispose de plus de bornes pour $(u^\ell)_{\ell\in\mathbb N}$ dans $L^\infty(\mathbb R_+; \dot B^0_{n,1})$, on peut montrer qu'il n'y a pas de concentration temporelle (voir les détails dans [10]).

– <u>La pression</u> : Comme $f \equiv 0$, on peut déduire de (3.5) et de l'équation sur la vitesse, que $(\nabla\Pi^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{-1}_{n,1})$. Cela garantit qu'à extraction près, $(\nabla\Pi^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers un gradient $\nabla\Pi$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{-1}_{n,1})$. En combinant avec les bornes données par (3.5) pour la pression, on en déduit que $\nabla\Pi\in L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^0_{n,1})$. Le cas plus délicat où f n'est pas nulle, est traité dans [10].
– <u>Conclusion</u> : Par des arguments d'interpolation, on peut récupérer une convergence en un sens suffisamment fort pour pouvoir passer à la limite dans tous les termes du système (INS). Ainsi $(\rho,u,\nabla\Pi)$ est bien une solution. En utilisant les équations du système, le théorème 2 et des propriétés classiques sur l'équation de transport, il est alors facile de conclure que la solution cherchée appartient bien à X_n.

3.2 Démonstration de l'unicité

Notons $(\rho_1,u_1,\nabla\Pi_1)$ la solution construite précédemment, et donnons-nous une deuxième solution $(\rho_2,u_2,\nabla\Pi_2)\in X_n$ correspondant à la même donnée initiale. Par construction, on a

$$\|\rho_1-1\|_{L^\infty(0,T\times\mathbb{R}^n_+)}+\|\nabla\rho_1\|_{L^\infty(0,T;L^n)}\leq c. \tag{3.6}$$

La différence

$$(\delta\rho,\delta u,\delta\Pi):=(\rho_2-\rho_1,u_2-u_1,\Pi_2-\Pi_1)$$

entre les deux solutions vérifie

$$\begin{cases}\partial_t\delta\rho+u_1\cdot\nabla\delta\rho=-\delta u\cdot\nabla\rho_2,\\ \partial_t\delta u-\mu\Delta\delta u+\nabla\delta\Pi=\delta\rho(\partial_t+u_2\cdot\nabla)u_2-\rho_1u_1\cdot\nabla\delta u-\delta u\cdot(\rho_1\nabla u_2)+(1-\rho_1)\partial_t\delta u,\\ \operatorname{div}\delta u=0.\end{cases} \tag{3.7}$$

Vu nos hypothèses, le membre de droite de la première équation ne peut pas avoir de régularité spatiale meilleure que L^n (cela est dû au caractère hyperbolique de l'équation vérifiée par la densité). En conséquence, on peut, au mieux, estimer $\delta\rho$ dans $L^\infty(0,T;L^n)$. Du fait du couplage, cette perte d'une dérivée se répercute dans l'équation sur la vitesse. Par exemple, sachant que $\partial_t u_2$ est borné dans $L^1(0,T;L^n)$ – car $\dot{B}^0_{n,1}\hookrightarrow L^n$ – si l'on dispose d'une estimation de $\delta\rho$ dans $L^\infty(0,T;L^n)$ on peut majorer le premier terme du membre de droite dans $L^1(0,T;L^{n/2})$ seulement. Cela est fâcheux car si l'on écrit δu comme solution du problème de Stokes

$$\begin{cases}\partial_t w-\mu\Delta w+\nabla P=f,\\ \operatorname{div}w=0,\\ w_{|t=0}=0,\qquad w_{|\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

alors il est (génériquement) faux, même dans le cas $\mathbb{R}^n$, que

$$\|\partial_t w\|_{L^1(0,T;L^{n/2})}\leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^{n/2})},$$

et donc il n'est pas possible d'absorber le dernier terme de $(3.7)_2$ dans les estimations.

En revanche, l'estimation de régularité maximale ci-dessus devient vraie si l'on remplace $L^1(0,T;L^{n/2})$ par l'espace $\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^0_{n/2,\infty})$ qui est légèrement plus gros. En effet, par interpolation à partir du théorème 2, on montre (voir [10]) que

$$\|\partial_t w,\mu D^2w,\nabla P\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{n/2,\infty})}\leq C\|f\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{n/2,\infty})}. \tag{3.8}$$

Soit $\delta U(t) := \|\partial_t \delta u, \nabla^2 \delta u, \nabla \delta \Pi\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})} + \|\delta u\|_{L^\infty(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}$. D'après (3.8), on peut écrire

$$\delta U(t) \leq C\big(\delta U_1(t) + \delta U_2(t) + \delta U_3(t) + \delta U_4(t)\big) \tag{3.9}$$

avec

$$\begin{array}{lllllll}
\delta U_1(t) & := & \|\delta\rho(\partial_t + u_2 \cdot \nabla)u_2\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}, & & \delta U_2(t) & := & \|\rho_1 u_1 \cdot \nabla \delta u\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}, \\
\delta U_3(t) & := & \|\delta u \cdot (\rho_1 \nabla u_2)\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}, & & \delta U_4(t) & := & \|(1-\rho_1)\partial_t \delta u\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}.
\end{array}$$

Comme $L^1(0,T;L^{n/2})$ s'injecte continûment dans $\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^0_{n/2,\infty})$, on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|\delta U_1(t)\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})} \leq C \int_0^t \|(\partial_t + u_2 \cdot \nabla)u_2\|_{L^n} \|\delta\rho\|_{L^n}\, d\tau.$$

En utilisant des lois de produit classiques dans les espaces de Besov, on obtient aussi

$$\begin{array}{lll}
\delta U_2(t) & \leq & C\|\rho_1\|_{L^\infty(0,t;L^\infty \cap \dot{W}^{1,n})} \|u_1\|_{\widetilde{L}^2(0,t;\dot{B}^1_{n,1})} \|\nabla \delta u\|_{\widetilde{L}^2(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}, \\
\delta U_3(t) & \leq & C\|\rho_1 \nabla u_2\|_{L^1(0,t;L^\infty \cap \dot{W}^{1,n})} \|\delta u\|_{L^\infty(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}, \\
\delta U_4(t) & \leq & C\|1-\rho_1\|_{L^\infty(0,t;L^\infty \cap \dot{W}^{1,n})} \|\partial_t \delta u\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^0_{\frac{n}{2},\infty})}.
\end{array}$$

En conséquence, si T et $\|1-\rho_1\|_{L^\infty(0,T;L^\infty \cap \dot{W}^{1,n})}$ sont suffisamment petits, tous les termes contenant δu peuvent être absorbés par le membre de gauche de (3.9) pour $t \in [0,T]$, et l'on obtient

$$\delta U(t) \leq \int_0^t V(\tau) \|\delta\rho(\tau)\|_{L^n}\, d\tau \quad \text{avec} \quad V \in L^1([0,T]). \tag{3.10}$$

Pour majorer $\delta\rho$ dans $L^\infty(0,T;L^n)$, il n'y a guère d'autre choix que d'écrire que

$$\|\delta\rho(t)\|_{L^n} \leq \int_0^t \|\nabla\rho_2\|_{L^n} \|\delta u\|_{L^\infty}\, d\tau \leq \|\nabla\rho_2\|_{L^\infty(0,t;L^n)} \|\delta u\|_{L^1(0,t;L^\infty)}. \tag{3.11}$$

Mais il n'est pas possible de majorer δu dans $L^1(0,t;L^\infty)$ car $\dot{B}^2_{n/2,\infty}$ n'est pas inclus dans L^∞ et donc, a fortiori, $\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^2_{n/2,\infty})$ ne s'injecte pas dans $L^1(0,T;L^\infty)$. On peut remédier au problème en appliquant à δu l'inégalité d'interpolation logarithmique suivante :

$$\|z\|_{L^1(0,t;L^\infty)} \leq C\|z\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^2_{n/2,\infty})} \log\left(e + \frac{\|z\|_{L^1(0,t;L^n)} + \|\nabla z\|_{L^1(0,t;L^\infty)}}{\|z\|_{\widetilde{L}^1(0,t;\dot{B}^2_{n/2,\infty})}}\right). \tag{3.12}$$

Comme $u_i \in L^\infty(0,T;\dot{B}^0_{n,1}) \cap L^1(0,T;\dot{B}^2_{n,1})$, (2.5) et (2.6) assurent que le numérateur est borné sur $[0,T]$. En revenant à (3.11) puis à (3.10), on peut conclure à l'existence d'une constante C et d'une fonction intégrable V telles que

$$\delta U(t) \leq \int_0^t V(\tau) \delta U(\tau) \log\left(e + \frac{C}{\delta U(\tau)}\right) d\tau.$$

En vertu du lemme d'Osgood, on en déduit que $\delta U \equiv 0$ sur $[0,T]$ pour T assez petit. L'unicité pour tout temps s'en déduit par des arguments de connexité classiques.

Montrons (3.12). Grâce aux injections énoncées dans (2.5) et (2.6), il suffit de vérifier que

$$\|z\|_{L^1(0,T;L^\infty)} \leq C\|z\|_{\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty})} \log\biggl(e + \frac{\|z\|_{L^1(0,T;L^n)} + \|\nabla z\|_{L^1(0,T;L^\infty)}}{\|z\|_{\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty})}}\biggr).$$

On se limite au cas $\mathbb{R}^n$. Le cas $\mathbb{R}^n_+$ s'en déduit en prolongeant z par antisymétrie sur $\mathbb{R}^n$. À l'aide de la décompostion de Littlewood-Paley, on peut, pour tout $m \in \mathbb{N}$, écrire que

$$\|z\|_{L^1(0,T;L^\infty)} \leq \sum_{k\leq -m} \|\dot{\Delta}_k z\|_{L^1(0,T;L^\infty)} + \sum_{|k|<m} \|\dot{\Delta}_k z\|_{L^1(0,T;L^\infty)} + \sum_{k\geq m} \|\dot{\Delta}_k z\|_{L^1(0,T;L^\infty)}.$$

Donc, en vertu de l'inégalité de Bernstein et de la définition de $\|\cdot\|_{\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty})}$,

$$\|z\|_{\widetilde{L}^1(0,T;L^\infty)} \leq C\biggl(\sum_{k\leq -m} 2^k \|\dot{\Delta}_k z\|_{L^1(0,T;L^n)} \\ +(2m-1)\|z\|_{\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty})} + \sum_{k\geq m} 2^{-k}\|\dot{\Delta}_k \nabla z\|_{L^1(0,T;L^\infty)}\biggr).$$

Comme

$$\|\dot{\Delta}_k z\|_{L^1(0,T;L^n)} \leq C\|z\|_{L^1(0,T;L^n)} \quad \text{et} \quad \|\dot{\Delta}_k \nabla z\|_{L^1(0,T;L^\infty)} \leq C\|\nabla z\|_{L^1(0,T;L^\infty)},$$

on peut conclure que

$$\|z\|_{L^1(0,T;L^\infty)} \leq C\Bigl(2^{-m}\|z\|_{L^1(0,T;L^n)} + (2m-1)\|z\|_{\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty})} + 2^{-m}\|\nabla z\|_{L^1(0,T;L^\infty)}\Bigr).$$

Un choix adéquat de m donne l'inégalité voulue.

4 Le système de Stokes

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 2 dans le cas $\mu = 1$ (un changement de variable adéquat assurant le cas général).

4.1 Le cas de la chaleur

Dans un premier temps considérons le cas plus simple de l'équation de la chaleur

$$\begin{array}{ll} \partial_t z - \Delta z = F, & \\ z|_{t=0} = z_0, \qquad z|_{\partial\Omega} = 0 & \end{array} \qquad z \to 0 \quad \text{quand} \quad |x| \to \infty. \tag{4.1}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on dispose de l'inégalité suivante (démontrée par exemple dans [7]) :

$$\|e^{\lambda\Delta}\dot{\Delta}_q z\|_{L^p} \leq Ce^{-c\lambda 2^{2q}}\|\dot{\Delta}_q z\|_{L^p} \tag{4.2}$$

valable pour toute distribution tempérée z, entier relatif q, réel strictement positif λ et $p \in [1,\infty]$. Comme on peut écrire

$$\dot{\Delta}_q z(t) = e^{t\Delta}\dot{\Delta}_q z_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\dot{\Delta}_q F(\tau)\,d\tau \quad \text{pour tout} \quad q \in \mathbb{Z},$$

l'inégalité (4.2) assure que

$$\|\dot\Delta_q z(t)\|_{L^p} \leq C\biggl(e^{-ct2^{2q}}\|\dot\Delta_q z_0\|_{L^p} + \int_0^t e^{-c(t-\tau)2^{2q}}\|\dot\Delta_q F(\tau)\|_{L^p}\,d\tau\biggr).$$

À l'aide d'inégalités de convolution, puis en sommant sur q il est alors aisé d'établir que si $f \in L^1(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n))$ et $z_0 \in \dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ alors (4.1) admet une unique solution z telle que

$$z \in \mathcal{C}([0,T];\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)) \quad\text{et}\quad \partial_t z, \nabla^2 z \in L^1(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)),$$

et que, pour une constante C ne dépendant que de n,

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n))} + \|\partial_t z, \nabla^2 z\|_{L^1(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n))} \leq C\Bigl(\|z_0\|_{\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^1(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n))}\Bigr). \tag{4.3}$$

Passons maintenant au cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Soit $\widetilde z_0$ et $\widetilde F$ les prolongements respectifs de z_0 et de F à $\mathbb{R}^n$ par imparité. Grâce à la proposition 1, si $1/p-1 < s < 1/p$ et $1 < p < \infty$ alors $\widetilde z_0$ (resp. $\widetilde F$) appartient à $\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^1(\mathbb{R}_+;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n))$) avec norme équivalente à celle de z_0 (resp. F).

Les arguments ci-dessus nous autorisent à résoudre (4.1) dans $\mathbb{R}^n$ avec ces données prolongées et l'on obtient une solution $\widetilde v \in \mathcal{C}([0,T];\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0,T;\dot B^{s+2}_{p,1}(\mathbb{R}^n))$, impaire en x_n, donc nulle sur $\partial\mathbb{R}^n_+$. On conclut au résultat suivant :

Proposition 2 *Soit $p \in]1,\infty[$ et $s \in]\frac1p - 1, \frac1p[$. Soit $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et $z_0 \in \dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)$. Il existe une unique solution z à (4.1) telle que*

$$z \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)),\ \nabla^2 z \in L^1(\mathbb{R}_+;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)) \quad \textit{et} \quad \partial_t z \in L^1(\mathbb{R}_+;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)),$$

et il existe une constante C ne dépendant que de s, p et n, telle que pour tout $T > 0$,

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|\partial_t z, \nabla^2 z\|_{L^1(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\Bigl[\|z_0\|_{\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)} + \|F\|_{L^1(0,T;\dot B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))}\Bigr]. \tag{4.4}$$

4.2 Résolution du système de Stokes

Il s'agit maintenant de démontrer le théorème 2. Le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ est une conséquence immédiate du résultat de la partie 4.1 pour la chaleur dans $\mathbb{R}^n$. En effet, le projecteur $\mathcal{P}$ sur les champs à divergence nulle est alors un multiplicateur de Fourier homogène de degré 0 donc est continu de $\dot B^s_{p,r}$ dans lui-même pour tous les indices s, p et r, et commute avec le laplacien. Résoudre (1.4) revient donc à résoudre l'équation de la chaleur

$$\partial_t \mathcal{P}u - \mu\Delta\mathcal{P}u = \mathcal{P}f,$$

le gradient de la pression étant défini par la relation $\nabla P = (\mathrm{Id} - \mathcal{P})f$.

Le cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ est beaucoup plus délicat et ne peut se ramener à un problème posé dans l'espace entier par symétrisation adéquate. Bien qu'il existe une formule explicite pour calculer la solution du système [24] (utilisée dans [6] pour démontrer un théorème analogue au nôtre mais pour les indices de régularité strictement négatifs seulement) nous avons préféré suivre l'approche de [11, 20, 21, 22].

Expliquons comment procéder. En fait, toute la difficulté consiste à construire le terme de pression tout en préservant la condition de divergence nulle. Il sera alors possible dans une dernière étape d'estimer la vitesse à l'aide de l'estimation (4.4) sur les solutions de la chaleur dans le demi-espace, après avoir mis la pression en terme source.

Pour construire la pression, on commence par éliminer la donnée initiale, la partie potentielle du terme de force ainsi que sa trace normale sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ (ces deux derniers termes contribueront uniquement au terme de pression) puis on prolonge la vitesse par 0 pour les temps négatifs. On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire avec donnée non nulle au bord, pouvant se déduire de v_0. En prenant la divergence de ce nouveau système, on voit que ce qui reste de la pression doit être une fonction harmonique (car on s'est ramenés à $\operatorname{div} F = 0$). Mais il reste à déterminer les valeurs sur $\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+$ de cette fonction. En fait, le nouveau système a l'avantage d'être posé dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$ au lieu de $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n_+$ et de pouvoir être résolu explicitement en faisant une transformée de Fourier par rapport au temps et aux variables tangentielles. On en déduit une formule de représentation pour la pression en termes de données aux bords et d'une partie (a priori non nulle même après ablation de la partie potentielle et de la trace normale au bord) du terme de force. Nous n'avons pas réussi à estimer tous les termes de cette formule de manière “directe”. Cependant, le lemme 3 va nous permettre de construire une pression “modifiée” qui après résolution d'une équation de Poisson adéquate donnera l'estimation souhaitée pour la “vraie” pression.

4.2.1 Réduction à un problème modèle sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$

Afin d'étendre le système aux temps négatifs en prolongeant par 0, il faut au préalable éliminer la vitesse initiale. Pour ce faire, on étend v_0 sur $\mathbb{R}^n$ en posant $\widetilde{v}_0|_{\mathbb{R}^n_+} = v_0$ et

$$\widetilde{v}_{0\tau}(x',x_n) = -\widetilde{v}_{0\tau}(x',-x_n) \quad \text{et} \quad \widetilde{v}_{0n}(x',x_n) = \widetilde{v}_{0n}(x',-x_n) \quad \text{pour} \;\; x_n<0. \tag{4.5}$$

Ce choix d'extension assure que $\operatorname{div}\widetilde{v}_0 = 0$ et, d'après la Proposition 1, on a $\widetilde{v}_0 \in \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ et $\|\widetilde{v}_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}$. En conséquence, d'après la partie 4.1, l'équation

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n, \\ v|_{t=0} = \widetilde{v}_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.6}$$

a une unique solution $E\widetilde{v}_0$ dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n))\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{s+2}_{p,1}(\mathbb{R}^n))$, qui vérifie

$$\|E\widetilde{v}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n))} + \|E\widetilde{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{s+2}_{p,1}(\mathbb{R}^n))} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.7}$$

De plus $\operatorname{div}\widetilde{v}_0 = 0$ entraîne $\operatorname{div} E\widetilde{v}_0 = 0$. Comme les propriétés de symétrie sont préservées par le flot de la chaleur, on peut affirmer que la composante tangentielle $(E\widetilde{v}_0)_\tau$ de $E\widetilde{v}_0$ est nulle sur $\partial\mathbb{R}^n_+$. Mais rien ne garantit que la composante normale $(E\widetilde{v}_0)_n$ soit nulle. Si l'on pose $v_{new} := v - E\widetilde{v}_0$, prolongé par 0 pour les temps négatifs, on se ramène donc à la résolution de[4]

$$\begin{cases} \partial_t v_{new} - \Delta v_{new} + \nabla P = F, \\ \operatorname{div}\, v_{new} = 0, \\ v_{new}|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = v_b := -(E\widetilde{v}_0)|_{\partial\mathbb{R}^n_+} \quad \text{étendu par 0 pour } t<0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Afin de contrôler la composante normale v_{bn} de v_b en termes de norme de v_0, on va construire une extension Ev_{bn} de v_{bn} à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$. Pour cela, on commence par résoudre l'équation de la chaleur suivante à l'aide de la proposition 2 :

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n_+, \\ w = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_+\times\partial\mathbb{R}^n_+, \\ w|_{t=0} = v_{0n} & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{4.9}$$

[4]La pression, elle, ne change pas.

On obtient $w \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}^{s+2}_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|\partial_t w, \nabla^2 w\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_{0n}\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.10}$$

En conséquence, si l'on définit

$$Ev_{bn} := \begin{cases} w - (E\widetilde{v}_0)_n & \text{pour} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \\ 0 & \text{pour} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^n_+ \end{cases} \tag{4.11}$$

alors la fonction Ev_{bn} vérifie

$$\begin{cases} \partial_t Ev_{bn} - \Delta Ev_{bn} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_+, \\ Ev_{bn} = v_{bn} & \text{sur} \quad \mathbb{R} \times \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{4.12}$$

et, d'après les inégalités (4.7), (4.10), on a

$$\|Ev_{bn}\|_{L^\infty(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|\partial_t Ev_{bn}, \nabla^2 Ev_{bn}\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_{0n}\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.13}$$

L'étape suivante consiste à retirer à F sa partie potentielle et sa trace normale au bord (dont l'existence est garantie par le lemme 4). Toutes deux entreront dans le terme de pression. Formellement, pour ce faire, il faut résoudre

$$\begin{cases} \Delta P = \operatorname{div} F, \\ (\partial_{x_n} P - F_n)|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Cela peut se faire rigoureusement en résolvant d'abord l'équation de Poisson

$$\begin{cases} \Delta P_1 = \operatorname{div} F, \\ P_1|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

puis le problème de *Neumann*

$$\begin{cases} \Delta P_2 = 0, \\ \partial_{x_n} P_2|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = \widetilde{F}_n|_{\partial\mathbb{R}^n_+} \qquad \text{avec} \quad \widetilde{F}_n := F_n - \partial_{x_n} P_1. \end{cases} \tag{4.16}$$

Le lemme 2 assure l'existence d'une solution P_1 pour la première équation, telle que

$$\|\nabla P_1\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|F\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))}. \tag{4.17}$$

Par construction $\operatorname{div}(F - \nabla P_1) = 0$ et $(F - \nabla P_1) \in L^1(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ donc, d'après le lemme 4 et (4.17), $\widetilde{F}_n$ a une trace sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ qui vérifie

$$\|\widetilde{F}_n|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s-\frac{1}{p}}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|F\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))}. \tag{4.18}$$

Cela permet de résoudre (4.16) explicitement par la formule

$$P_2 = \mathcal{F}^{-1}_{x'}\Big[-e^{-|\xi'|x_n}\frac{1}{|\xi'|}\mathcal{F}_{x'}[\widetilde{F}_n|_{\partial\mathbb{R}^n_+}]\Big]. \tag{4.19}$$

Grâce au Lemme 3 et à l'inégalité (4.18), on obtient $\nabla P_2 \in L^1(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et

$$\|\nabla P_2\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|\widetilde{F}_n|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s-\frac{1}{p}}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|F\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))}. \tag{4.20}$$

Donc, finalement, si l'on change F en $F - \nabla P_1 - \nabla P_2$, on peut se ramener au cas où

$$\operatorname{div} F = 0 \;\text{ dans }\; \mathbb{R}^n_+ \quad \text{et} \quad F_n = 0 \;\text{ sur } \partial\mathbb{R}^n_+. \tag{4.21}$$

4.2.2 Résolution du problème modèle

Il s'agit maintenant de résoudre le système (4.8) dans le cas (4.21) avec $F \in L^1(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ pour $1/p - 1 < s < 1/p$ et $1 < p < \infty$. Notre résultat principal est le suivant :

Lemme 5 *Avec les hypothèses ci-dessus, le système* (4.8) *a une unique solution* $(v, \nabla P)$ *telle que*

$$v \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)) \quad \textit{et} \quad \partial_t v, \nabla^2 v, \nabla P \in L^1(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)). \tag{4.22}$$

De plus, il existe une constante C *ne dépendant que de* n, p *et* s, *et telle que*

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|\partial_t v, \nabla^2 v, \nabla P\|_{L^1(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C \left(\|F\|_{L^1(\mathbb{R}; \dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \right).$$

Dém. Soit $(\xi_0, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ les variables de Fourier correspondant à (t, x'). Notons

$$u(\cdot, \cdot, x_n) := \mathcal{F}_{t,x'}[v(\cdot, \cdot, x_n)], \quad q(\cdot, \cdot, x_n) := \mathcal{F}_{t,x'}[P(\cdot, \cdot, x_n)], \quad f(\cdot, \cdot, , x_n) := \mathcal{F}_{t,x'}[F(\cdot, \cdot, x_n)].$$

Notons r l'unique nombre complexe vérifiant $\arg r \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et $r^2 = i\xi_0 + |\xi'|^2$. En variables (ξ_0, ξ', x_n), le système (4.8) s'écrit (avec des notations évidentes)

$$\begin{cases} r^2 u_\tau - \partial^2_{x_n} u_\tau = f_\tau - i\xi' q, \\ r^2 u_n - \partial^2_{x_n} u_n = f_n - \partial_{x_n} q, \\ i\xi' \cdot u_\tau + \partial_{x_n} u_n = 0, \\ u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = u_b. \end{cases} \tag{4.23}$$

En prenant la divergence de $(4.8)_1$ et en se souvenant que $\operatorname{div} F = 0$, on obtient

$$|\xi'|^2 q - \partial^2_{x_n} q = 0, \tag{4.24}$$

donc, puisque l'on souhaite que q tende vers 0 pour x_n tendant vers $+\infty$, on obtient, pour une fonction inconnue q_0,

$$q(\xi_0, \xi', x_n) = q_0(\xi_0, \xi') e^{-|\xi'| x_n}. \tag{4.25}$$

D'après [11], on a

$$u_\tau(\xi_0, \xi', x_n) = u_{b\tau} e^{-r x_n} + \frac{1}{2r} \int_0^\infty [e^{-r|x_n - s_n|} - e^{-r(x_n + s_n)}][f_\tau(\xi_0, \xi', s_n) - i\xi' e^{-|\xi'| s_n} q_0]\, ds_n,$$
$$u_n(\xi_0, \xi', x_n) = u_{bn} e^{-r x_n} + \frac{1}{2r} \int_0^\infty [e^{-r|x_n - s_n|} - e^{-r(x_n + s_n)}][f_n(\xi_0, \xi', s_n) + |\xi'| e^{-|\xi'| s_n} q_0]\, ds_n.$$

Comme ici $u_{b\tau} \equiv 0$, en dérivant la deuxième égalité par rapport à x_n, puis en faisant tendre x_n vers 0, on trouve

$$\partial_{x_n} u_n|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = -r u_{bn} + \int_0^\infty e^{-r s_n} f_n(s_n)\, ds_n + \frac{|\xi'|}{r + |\xi'|} q_0. \tag{4.26}$$

Comme f_n est nulle sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ et $\operatorname{div} F = 0$, on a

$$-r \int_0^\infty e^{-r s_n} f_n\, ds_n = \int_0^\infty \partial_{s_n}(e^{-r s_n}) f_n\, ds_n = -\int_0^\infty e^{-r s_n} \partial_{s_n} f_n\, ds_n = \int_0^\infty e^{-r s_n} i\xi' \cdot f_\tau\, ds_n.$$

De plus $\partial_{x_n} u_n = -i\xi' \cdot u_\tau = 0$ sur $\partial\mathbb{R}^n_+$. Donc $q_0 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ avec

$$\begin{aligned} &q_1(\xi_0, \xi') = i \frac{\xi_0}{|\xi'|} u_{bn}, && q_2(\xi_0, \xi') = r u b_{bn}, \\ &q_3(\xi_0, \xi') = |\xi'| u_{bn}, && q_4(\xi_0, \xi') = \int_0^\infty e^{-r s_n} \left[\frac{i\xi'}{|\xi'|} \cdot f_\tau - f_n \right] ds_n. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Il ne reste plus qu'à étudier la contribution respective de ces quatre termes dans la pression.

Étude de q_1. Nous allons d'abord démontrer que $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_1 \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s+1-1/p}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+))$ et que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_1\right\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s+1-1/p}_{p,1}(\partial\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.28}$$

Formellement, $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_1$ est la trace sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ de $\partial_t|D_{x'}|^{-1}Ev_{bn}$ avec Ev_{bn} défini en (4.12). Donc il suffit de démontrer que $\partial_t Ev_{bn}$ admet une trace sur $\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+$ telle que

$$\|\partial_t Ev_{bn}|_{\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+}\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{s-1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.29}$$

Comme (4.12) est vérifié, on sait déjà que $\partial_t Ev_{bn} \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$. Pour montrer que la trace sur $\partial\mathbb{R}^n_+$ est bien définie, on va interpréter $\partial_t Ev_{bn}$ comme la n-ième composante d'un champ de vecteurs à divergence nulle et coefficients dans $L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$. Le lemme 4 nous permettra alors d'obtenir (4.29). Il suffit de considérer les temps positifs puisque $\partial_t Ev_{bn} \equiv 0$ pour $t \leq 0$.

Pour $k = 1,\cdots,n-1$, notons w_k la solution de

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n_+,\\ \partial_{x_n} w = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{n-1},\\ w|_{t=0} = v_{0k} & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

En raisonnant comme pour démontrer la proposition 2 (mais en utilisant un prolongement symétrique pour préserver la condition de Neumann), on obtient

$$\|\nabla^2 w_k\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Soit w_n la solution de (4.9). Le champ de vecteurs $V := (w_1,\cdots,w_n)$ est à divergence nulle – car $\operatorname{div} V|_{t=0} = 0$ sur $\mathbb{R}^n_+$ et $V\cdot n = 0$ sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n_+$ – et

$$\|\partial_t V, \nabla^2 V\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

De même, on a $\operatorname{div}\partial_t V = 0$. Donc, comme $\partial_t V \in L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$, le lemme 4 garantit que $\partial_t w_n|_{\mathbb{R}_+\times\partial\mathbb{R}^n_+} \in L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{s-1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$. Finalement $\partial_t Ev_{bn} = \partial_t w_n - \partial_t(E\widetilde{v}_0)_n$, $\operatorname{div}(\partial_t E\widetilde{v}_0) = 0$ et $\partial_t E\widetilde{v}_0 \in L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$. Donc le lemme 4 donne la borne souhaitée pour $((\partial_t E\widetilde{v}_0)_n)|_{\mathbb{R}_+\times\partial\mathbb{R}^n_+}$ et donc aussi pour $(\partial_t Ev_{bn})|_{\partial\mathbb{R}^n_+}$. Il est maintenant facile de conclure à (4.29). Donc $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_1 \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s+1-1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et (4.28) est vérifiée.

Grâce au lemme 3, on peut maintenant construire une extension harmonique Q_1 de $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_1$ à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$, telle que $Q_1 \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s+1}_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$, $Q_1|_{\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+} = \mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_1$ et

$$\|\nabla Q_1\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.30}$$

Étude de q_2 *et de* q_3. Nous allons construire des extensions Q_2 et Q_3 de $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_2$ et $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_3$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$ vérifiant

$$\|\nabla Q_i\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)} \quad \text{pour} \quad i = 2,3. \tag{4.31}$$

Pour cela, on utilise le fait que la résolution explicite de (4.12) donne $\mathcal{F}_{t,x'}[Ev_{bn}] = u_{bn}e^{-rx_n}$, et que, d'après (4.13), $\nabla Ev_{bn} \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s+1}_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$. Donc $Q_3 := \mathcal{F}^{-1}_{t,x'}\left[|\xi'|u_{bn}e^{-rx_n}\right]$ vérifie

$$\|\nabla Q_3\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \leq C\|v_{0n}\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.32}$$

On remarque que $\partial_{x_n}Ev_{bn} = -\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}\left[re^{-rx_n}u_{bn}\right]$. Donc $Q_2 := \mathcal{F}^{-1}_{t,x'}[re^{-rx_n}u_{bn}] \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^{s+1}_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et vérifie (4.32). Par construction, les fonctions Q_2 et Q_3 restreintes à $\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+$ coïncident bien avec $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_2$ et $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_3$.

Étude de q_4. Posons $h(\cdot,\cdot,x_n) := \mathcal{F}^{-1}_{t,x'}\Big(i\frac{\xi'}{|\xi'|}\cdot f_\tau(\cdot,\cdot,x_n) - f_n(\cdot,\cdot,x_n)\Big)$ et notons v la solution de

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = h & \text{dans} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+, \\ v = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{4.33}$$

Après un calcul facile (voir [10]), on constate que

$$\partial_{x_n} v|_{\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+} = \mathcal{F}^{-1}_{t,x'}\left[\int_0^\infty e^{-rs_n}\mathcal{F}_{t,x'}h\,ds_n\right].$$

La proposition 2 permet alors de conclure que $Q_4 := \partial_{x_n} v$ vérifie

$$\big(\mathcal{F}_{t,x'}Q_4\big)|_{\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+} = q_4 \quad \text{et} \quad \|\nabla Q_4\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \le C\|F\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))}. \tag{4.34}$$

Construction de la pression. Puisque $\operatorname{div} F = 0$, on doit avoir $\Delta P = 0$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$. Par ailleurs, d'après (4.25), on sait que $P = \mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_0$ sur $\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+$. Par construction, $Q := Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$ vaut bien $\mathcal{F}^{-1}_{t,x'}q_0$ sur $\mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+$, mais n'a pas de raison d'être harmonique. Le terme de pression P recherché vaut donc $Q + Q'$ avec

$$\begin{cases} \Delta Q' = -\Delta Q & \text{dans} \quad \mathbb{R}^n_+, \\ Q' = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{4.35}$$

On a établi que $\nabla Q \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et que

$$\|\nabla Q\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \le C\big(\|F\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}\big). \tag{4.36}$$

Donc le lemme 2 assure que l'équation (4.35) a une solution telle que $\nabla Q' \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et

$$\|\nabla Q'\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \le C\big(\|F\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}\big).$$

En combinant avec (4.36), on conclut que $\nabla P \in L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))$ et

$$||\nabla P||_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} \le C\left(\|F\|_{L^1(\mathbb{R};\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+))} + \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n_+)}\right). \tag{4.37}$$

4.3 Fin de la démonstration

Maintenant que la pression est construite, on peut voir le système de Stokes initial (1.4) comme une équation de la chaleur dans le demi-espace avec terme source $F - \nabla P$. Le fait que $\operatorname{div} v = 0$ est une conséquence de la construction de P. En appliquant la proposition 2 et le lemme 5, il est alors facile d'achever la démonstration du théorème 2.

Références

[1] H. Abidi : Équations de Navier-Stokes avec densité et viscosité variables dans l'espace critique, *Revista Matemática Iberoamericana,* **23**(2), 537–586 (2007).

[2] H. Abidi and M. Paicu : Existence globale pour un fluide inhomogène, *Annales de l'Institut Fourier,* **57**(3), 883–917 (2007).

[3] S. Antontsev, A. Kazhikhov and V. Monakhov : Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids. Studies in Mathematics and its Applications, 22. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[4] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and R. Danchin : *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations,* Springer, to appear.

[5] M. Cannone : *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes.* With a preface by Yves Meyer. Diderot Editeur, Paris, 1995.

[6] M. Cannone, F. Planchon and M. Schonbek : Strong solutions to the incompressible Navier-Stokes equations in the half-space. *Comm. Partial Differential Equations*, **25**(5-6), 903–924 (2000).

[7] J.-Y. Chemin : Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel, *Journal d'Analyse Mathématique*, **77**, 27–50 (1999).

[8] R. Danchin : Density-dependent incompressible fluids in critical spaces, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,* **133**(6), 1311–1334 (2003).

[9] R. Danchin : Density-dependent incompressible fluids in bounded domains, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **8**(3), 333–381 (2006).

[10] R. Danchin and P. B. Mucha : A critical functional framework for he inhomogeneous Navier-Stokes equations in the half-space, *Journal of Functional Analysis*, **256**(3), 881–927 (2009).

[11] W. Desch, M. Hieber, J. Prüss : L^p-theory of the Stokes equation in a half-space. J. Evol. Equ. **1**(1), 115–142 (2001).

[12] J. Duoandikoetxea : Fourier analysis. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[13] H. Fujita and T. Kato : On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269–315 (1964).

[14] T. Kato : Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.* **187**(4) 471–480 (1984).

[15] H. Kozono : Global L^n-solution and its decay property for the Navier-Stokes equations in half-space $\mathbb{R}^n_+$. *J. Differential Equations*, **79**(1), 79–88 (1989).

[16] O. Ladyzhenskaya and V. Solonnikov : The unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous incompressible inhomogeneous fluids, *Journal of Soviet Mathematics*, **9**, 697–749 (1978).

[17] P.-G. Lemarié-Rieusset : Espaces de Lorentz et Navier-Stokes : le problème des solutions autosimilaires de Leray. *Prépublication de l'Université d'Evry,* **161** (2002).

[18] P.-L. Lions : Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 1 Incompressible Models, *Oxford University Press* (1996).

[19] P. B. Mucha : On an estimate for the linearized compressible Navier-Stokes equations in the L_p-framework. *Colloq. Math.*, **87**(2), 159–169 (2001).

[20] P. B. Mucha : On weak solutions to the Stefan problem with Gibbs-Thomson correction. Differential Integral Equations 20 (2007), no. 7, 769–792.

[21] P. B. Mucha and W. Zajączkowski : On the existence for the Cauchy-Neumann problem for the Stokes system in the L_p- framework, Studia Math., **143**, 75–101 (2000).

[22] V. A. Solonnikov : Unsteady motion of an isolated volume of a viscous incompressible fluid, translation in *Math. USSR-Izv.*, **31** (2), 381–405 (1988).

[23] H. Triebel : Interpolation theory, function spaces, differential operators. North-Holland Mathematical Library, 18. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[24] S. Ukai : A solution formula for the Stokes equation in $\mathbb{R}^n_+$. *Comm. Pure Appl. Math.* **40**(5) 611–621 (1987).