Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2007-2008

Clotilde Fermanian Kammerer

Propagation des mesures de Wigner à travers un croisement de codimension 1 dégénéré

Séminaire É. D. P. (2007-2008), Exposé n° XXII, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2007-2008____A22_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2007-2008
Exposé n$^{\text{o}}$ XXII, 1-10

Propagation des mesures de Wigner à travers un croisement de codimension 1 dégénéré

Clotilde FERMANIAN KAMMERER

1 Introduction

Les résultats que je présente ici résultent d'un travail avec T. Duyckaert de l'Université de Cergy-Pontoise et T. Jecko de l'Université de Rennes 1 ([7]). C'est le fruit de discussions autour d'un article antérieur de T. Jecko ([15]) qui était consacré à l'obtention d'estimations sur la résolvante de l'opérateur de Schrödinger semi-classique matriciel

$$P(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta\,\mathrm{Id} + V(x)$$

où le potentiel V est une matrice hermitienne $N \times N$ présentant des croisements de valeurs propres de codimension 1. Le résultat de [15] repose sur l'analyse de la mesure de Wigner d'une famille de solutions de $P(\varepsilon)\psi^\varepsilon = 0$ et introduit des conditions relativement contraignantes sur les projecteurs spectraux de la matrice V. Nous avons voulu mieux comprendre cette condition et nous sommes intéressés à des systèmes plus généraux mais présentant le même type de croisements de modes ; ce sont les résultats obtenus dans ce cadre que je vais sous exposer ici.

On considère une famille (ψ^ε) uniformément bornée dans $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^N)$ et solution d'un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\mathrm{op}_\varepsilon(A(x,\xi))\psi^\varepsilon = o(\varepsilon) \;\;\text{dans}\;\; L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^N),$$

où la notation $\mathrm{op}_\varepsilon(a)$ pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2d}, \mathbf{C}^{N,N})$ désigne l'opérateur pseudodifférentiel semi-classique de symbole a, à savoir l'opérateur défini par

$$\forall f \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^N), \;\; \mathrm{op}_\varepsilon(a)f(x) = (2\pi)^{-d}\int \mathrm{e}^{i\xi(x-y)} a\left(\frac{x+y}{2}, \varepsilon\xi\right) f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi.$$

La matrice $A(x,\xi)$ est supposée hermitienne et dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ des paramètres x et ξ. On fait aussi l'hypothèse que ses valeurs propres et ses projecteurs spectraux sont des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^{2d}$ et l'on écrit

$$A(x,\xi) = \sum_{1\le j\le K} \lambda_j(x,\xi)\Pi_j(x,\xi)$$

avec pour $1 \le j \le K \le N$, $\lambda_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2d}, \mathbf{R})$, $\Pi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2d}, \mathbf{C}^{N,N})$, $\Pi_j^2 = \Pi_j$ et $\lambda_j \neq \lambda_k$ pour $j \neq k$. On appelle alors point de croisement un point (x^*, ξ^*) pour lequel il existe deux indices distincts j et k tels que $\lambda_j(x^*,\xi^*) = \lambda_k(x^*,\xi^*)$. L'ensemble des points de croisement sera noté Σ et l'on a

$$\Sigma = \left\{(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2d}, \;\; \exists j,k \in \{1,\cdots,K\}, \;\; j \neq k, \;\; \lambda_j(x,\xi) = \lambda_k(x,\xi)\right\}.$$

On s'intéresse au cas où Σ est une hypersurface. Remarquons que si $N = 2$ et si l'ensemble Σ est une sous-variété, l'existence de valeurs propres et de vecteurs propres réguliers est équivalent au fait que Σ est de codimension 1.

Nous nous intéressons aux propriétés des mesures de Wigner associées à la famille (ψ^ε) c'est-à-dire aux mesures à valeurs matricielles μ telles qu'il existe une suite ε_k tendant vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ pour laquelle

$$\forall a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{2d}, \mathbf{C}^{N,N}), \quad \left(\mathrm{op}_{\varepsilon_k}(a)\psi^{\varepsilon_k}, \psi^{\varepsilon_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{tr} \int a \, \mathrm{d}\mu.$$

Une telle mesure est alors positive au sens où $\mu = (\mu_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ a des éléments diagonaux $\mu_{i,i}$ qui sont des mesures de Radon positives et des éléments anti-diagonaux $\mu_{i,j}$ qui sont des mesures absolument continues par rapport à $\mu_{i,i}$ et $\mu_{j,j}$; pour $i \neq j$, la mesure $\mu_{i,j}$ d'ecrit les interactions entre la i-ième et la j-ième composante de ψ^ε. En dehors de Σ, il est démontré dans [11] que la mesure μ se décompose sur les différents modes suivant

$$\mu = \sum_{1\leq j\leq K} \Pi_j \mu \, \Pi_j$$

où les mesures μ_j vérifient une sorte d'invariance le long des trajectoires classiques associées à chaque mode puisque

$$H_{\lambda_j}\mu_j = [\mu_j, F_j],$$

où

$$F_j = \left[\Pi_j, \{\lambda_j, \Pi_j\}\right] + \frac{1}{2}\sum_k (\lambda_j - \lambda_k)\Pi_j\{\Pi_k, \Pi_k\}\Pi_j, \tag{1}$$

le champ H_{λ_j} est le champ hamiltonien associé à la fonction $\lambda_j(x,\xi)$

$$H_{\lambda_j}(x,\xi) = \nabla_\xi \lambda_j(x,\xi)\cdot\nabla_x - \nabla_x\lambda_j(x,\xi)\cdot\nabla_\xi$$

et ses courbes intégrales sont appelées trajectoires classiques.

Nous démontrons dans [7] que cette propriété est toujours satisfaite si Σ vérifie certaines conditions géométriques. Notons Σ_j^0 (resp. Σ_j^k) l'ensemble des points de Σ tel que H_{λ_j} est transverse (resp. tangeant à l'ordre $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$) à Σ en ce point, posons

$$\Sigma_j^{reg} = \underset{k\in\mathbf{N}}{\cup} \Sigma_j^k$$

et désignons par $J(x^*,\xi^*)$ l'ensemble des indices des valeurs propres se croisant au point $(x^*,\xi^*) \in \Sigma$,

$$J(x^*,\xi^*) = \{j \in \{1,\cdots,N\},\ \ \exists k \in \{1,\cdots,N\},\ \ k\neq j \text{ et } \lambda_j(x^*,\xi^*) = \lambda_k(x^*,\xi^*)\}.$$

Théorème 1 . *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ tel que*

$$\forall (x^*,\xi^*) \in \Omega\cap\Sigma,\ \ \forall j \in J(x^*,\xi^*),\ \ H_{\lambda_j}(x^*,\xi^*) \neq 0 \ \ \textit{et} \ \ (x^*,\xi^*) \in \Sigma_j^{reg} \tag{2}$$

alors pour F_j défini par (1)

$$H_{\lambda_j}\mu_j = [\mu_j, F_j] \ \ \textit{dans} \ \ \Omega. \tag{3}$$

Après un paragraphe de commentaires sur ce théorème où j'évoquerai les travaux antérieurs sur le sujet et les applications aux estimations de résolvante, je donnerai quelques éléments de preuve du théorème 1. Nous verrons alors comment ce résultat peut être étendu à un ensemble Σ_j^{reg} un peu plus gros et contenant en particulier les points isolés de Σ_j^∞. Enfin, je voudrais mentionner que dans le cas où λ_j est une valeur propre simple, le commutateur de la première partie de F_j avec μ_j est nul. Ceci implique que, s'il s'agit d'une équation de Schrödinger avec $A(x,\xi) = \frac{|\xi|^2}{2}\,\mathrm{Id} + V(x)$ dans $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^2)$, l'équation (3) s'écrit $H_{\lambda_j}\mu_j = 0$.

2 Commentaires et autres résultats

On trouve assez peu de travaux consacrés aux croisements de codimension 1. Citons l'article de G. Hagedorn [12] où est analysée la propagation d'un paquet d'onde gaussien pour une équation d'évolution de type Schrödinger avec potentiel matriciel ainsi que le travail de M. Brassart [1] dans un cadre périodique. Nous nous pencherons plus précisément sur l'article [15] et sur ce que donnent les méthodes de [8] et [9].

Dans l'article [15], T. Jecko démontre l'invariance le long des trajectoires classiques de la mesure de Wigner dans le cas où

$$A(x,\xi) = \frac{|\,\xi\,|^2}{2}\,\mathrm{Id} + V(x),$$

pour un potentiel V vérifiant essentiellement les mêmes hypothèses que les notres, à savoir l'existence de valeurs propres et de projecteurs spectraux réguliers et le fait que l'ensemble de croisement est une variété de codimension 1. A la place de la condition géométrique sur la tangence éventuelle des trajectoires hamiltoniennes au lieu de croisement, T. Jecko fait une hypothèse sur les projecteurs spectraux $\Pi_j(x)$ associés à la matrice $V(x)$. Si $\gamma(x) = 0$ est une équation de Σ près d'un point $x^* \in \Sigma$ (le fait d'appartenir ou non au croisement est maintenant décidé par la variable x puisque la partie matricielle du Hamiltonien est une fonction de x), T. Jecko suppose que les projecteurs ne varient pas dans les directions normales au croisement, plus précisément

$$\forall x \in \{\gamma(x) = 0\}, \;\text{ si }\; \xi\cdot\gamma(x) = 0 \;\text{ alors }\; \forall j \in J(x), \;\; \xi\cdot\Pi_j(x) = 0.$$

On peut construire des exemples pour lesquels ni cette condition ni la condition géométrique (2) ne sont vérifiées, on peut alors démontrer qu'il y a des transferts d'énergie entre les modes dus aux variations des projecteurs (cf. [7]).

Il est aussi intéressant de faire le lien entre notre résultat et ce que permet d'obtenir les méthodes de [8] et [9]. On se restreint alors au cas $N = 2$ des symboles $A(x,\xi)$ qui sont des matrices 2×2. Prenons

$$A(x,\xi) = a(x,\xi)\,\mathrm{Id} + g(x,\xi)\begin{pmatrix} b(x,\xi) & c(x,\xi) \\ c(x,\xi) & -b(x,\xi)\end{pmatrix}$$

et supposons que $\nabla g \neq 0$ et $b^2 + c^2 \neq 0$ sur $\{g = 0\}$. On a alors deux valeurs propres

$$\lambda_j(x,\xi) = a - (-1)^j g\sqrt{b^2 + c^2}, \;\; j \in \{1,2\}$$

et on peut démontrer en suivant [8] et [9] que pour $j \in \{1,2\}$

$$H_{\lambda_j}\mu_j = [\mu_j, F_j] + \nu_j, \;\; \mathrm{Supp}\,\nu_j \subset \{\nabla_\xi a\cdot\nabla_x g - \nabla_x a\cdot\nabla_\xi g = 0\}.$$

Dans le cas de l'équation de Schrödinger de [15], on obtient ainsi que le support de ν_j est inclus dans $\{\xi\cdot\nabla\gamma(x)=0\}$ et on peut vérifier que la condition sur les projecteurs assure la nullité de la mesure ν_j sur son support. Notons

$$\{a,g\}=\nabla_\xi a\nabla_x g-\nabla_x a\nabla_\xi g,$$

si cette quantité est non nulle en un point de croisement, alors les champs H_{λ_1} et H_{λ_2} sont transverses au croisement puisque l'on peut vérifier que

$$H_{\lambda_{1,2}}g(x,\xi)=\{a,g\}\sqrt{b^2+c^2}.$$

Pour résumer, les méthodes de [8] et [9] permettent de démontrer l'équation (3) au niveau des points du croisement où les champs hamiltoniens associés aux valeurs propres sont transverses. Ce sont les points du croisement que l'on qualifie de génériques dans [9]. Le théorème 1 permet donc de traiter aussi des situations non génériques. Il est intéressant de noter que c'est, avec le résultat de [15], le premier résultat concernant la propagation des mesures de Wigner près d'un point de croisement non générique. Dans le cas générique, nous démontrons dans [7] une forme normale microlocale dans l'esprit de celles de Colin de Verdière pour les croisements de codimension 2 et 3 (cf. [4] et [5]).

Théorème 2 *Soit (x^*,ξ^*) un point générique de Σ alors il existe Ω un voisinage de (x^*,ξ^*) tel que pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe κ_n une transformation canonique de Ω dans un voisinage de 0, U_n un opérateur intégral de Fourier, $B_0,\cdots,B_n$ des matrices $\mathcal{C}^\infty$ et $f_1,\cdots,f_n$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ telles que B_0 est inversible, $\kappa_n(x^*,\xi^*)=0$ et si l'on note*

$$\begin{aligned}\kappa:(x,\xi)\mapsto(s,z,\sigma,\zeta),\ \ s,\sigma\in\mathbf{R},\ \ z,\zeta\in\mathbf{R}^{d-1},\\ f_n^\varepsilon=f_1+\varepsilon f_2+\cdots+\varepsilon^{n-1}f_n,\\ B_n^\varepsilon=B_0+\varepsilon B_1+\cdots+\varepsilon^n B_n,\end{aligned}$$

alors microlocalement dans Ω, on a

$$\begin{aligned}&U_n\mathrm{op}_\varepsilon(B_n^\varepsilon)\mathrm{op}_\varepsilon(A)\mathrm{op}_\varepsilon(B_n^\varepsilon)^*U_n^*\\&\qquad=\frac{\varepsilon}{i}\partial_s\,\mathrm{Id}+\begin{pmatrix}s&\varepsilon\,\mathrm{op}_\varepsilon(f_n^\varepsilon)\\ \varepsilon\,\mathrm{op}_\varepsilon(f_n^\varepsilon)^*&-s\end{pmatrix}+O(\varepsilon^{n+1})\ \ in\ \ \mathcal{L}\left(L^2(\mathbf{R}^d,\mathbf{C}^N)\right).\end{aligned}$$

Venons-en enfin aux applications à l'obtention d'estimations de résolvante pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique matriciel de $L^2(\mathbf{R}^d,\mathbf{C}^N)$

$$P(\varepsilon)=\frac{1}{2}\Delta\,\mathrm{Id}+V(x)$$

qui est un opérateur autoadjoint sur le domaine de $\Delta\mathrm{Id}$ (cf. [17]). On suppose que le potentiel V est longue portée : V a une limite V_∞ à l'infini et il existe $\rho>0$ tel que pour tout $x\in\mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned}\|V(x)-V_\infty\|=O\left(<x>^{-\rho}\right),\\ \forall\alpha\in\mathbf{N}^d,\ \ |\alpha|>1,\ \ \|\partial_x^\alpha V(x)\|=O_\alpha\left(<x>^{-\rho-|\alpha|}\right).\end{aligned}$$

De plus on suppose

$$V(x)=\sum_{1\le j\le K}E_j(x)\Pi_j(x)$$

où E_j, Π_j sont respectivement des fonctions et projecteurs réguliers. On suppose que l'ensemble des points de croisement

$$\Sigma = \{(x,\xi),\ \ \exists j,k \in \{1,\cdots,K\},\ \ j\neq k,\ \ E_j(x)=E_k(x)\}$$

est une hypersurface et on garde les notations précédentes avec $\lambda_j(x,\xi)=\frac{|\xi|^2}{2}+E_j(x)$. Notons

$$R(z,\varepsilon)=(P(\varepsilon)-z)^{-1}$$

sa résolvante, définie pour z dans l'ensemle résolvant et considérons les espaces à poids $L^{2,s}(\mathbf{R}^d,\mathbf{C}^N)$ contenant les fonctions f telles que $x\mapsto <x>^s f(x)$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^d,\mathbf{C}^N)$. En suivant la méthode de N. Burq ([2]) déjà reprise par plusieurs auteurs ([14], [15], [6] et [10] par exemple), on obtient le théorème 3 ci-dessous. Remarquons que ce résultat permet aussi de montrer des effets régularisants pour le propagateur $e^{itP(\varepsilon)}$ ainsi que des estimations de Strichartz en suivant la stratégie de [3]. Posons

$$\Sigma(\lambda^*):=\{(x,\xi)\in\Sigma,\ \ \forall j\in J(x,\xi),\ \ \frac{|\xi|^2}{2}+E_j(x)=\lambda^*\}.$$

Théorème 3 *Soit λ^* tel que pour tout $(x^*,\xi^*)\in\Sigma(\lambda^*)$ on ait*

$$\forall j\in J(x^*,\xi^*),\ \ H_{\lambda_j}(x^*,\xi^*)\neq 0\ \ et\ \ (x^*,\xi^*)\in\Sigma^{reg}.$$

Alors, il y a équivalence entre les deux proposition suivantes:

1. *$\forall s>1/2$, $\exists I$ voisinage de λ^*, $\exists\varepsilon_0>0$, $\exists C_{s,I}>0$, $\forall\lambda\in I$, $\forall\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$,*

$$||\ R(\lambda\pm i0,\varepsilon)\ ||_{\mathcal{L}(L^{2,s},L^{2,-s})}\leq\frac{C_{s,I}}{\varepsilon}.$$

2. *Pour toute trajectoire classique $(x_s^{(j)},\xi_s^{(j)})$ telle que $\lambda^*=E_j(x_s^{(j)})+\dfrac{|\xi_s^{(j)}|^2}{2}$ on a*

$$|\ x_s^{(j)}\ |\underset{s\to\pm\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

La deuxième assertion est appelée hypothèse de non-capture: l'énergie λ^* est non captante. Pour montrer qu'elle implique l'estimation de résolvante, on raisonne par l'absurde, ce qui conduit à analyser une famille de fonctions de masse 1 vérifiant une équation de la forme

$$P(\varepsilon)\psi^\varepsilon=\lambda^*\psi^\varepsilon+o(1)$$

Les hypothèses du théorème permettent d'appliquer le résultat du théorème 1, on a donc invariance le long des trajectoires classiques de la mesure de Wigner de (ψ^ε). Les hypothèses de longue portée faites sur le potentiel permettent de montrer que la mesure est nulle à l'infini. Le fait que les trajectoires vont à l'infini et l'invariance le long des trajectoires impliquent alors la nullité de la mesure, ce qui est en contradiction avec le fait que la suite est supposée de masse 1. La preuve du caractère nécessaire de l'hypothèse de non capture se fait en suivant un argument de Wang ([18]): on construit des familles de solution de

$$i\varepsilon\partial_t\psi^\varepsilon+(P(\varepsilon)-\lambda^*)\,\psi^\varepsilon=0$$

qui se concentrent sur une trajectoire classique. L'estimation de résolvante permet de démontrer que les quantités $\displaystyle\int_{-T}^{+T}<x_t^{(j)}>^{-s}\,dt$ sont bornées en T, ce qui n'est possible que si les trajectoires vont à l'infini.

3 Eléments de preuve

Nous allons maintenant expliquer la preuve du théorème 1. La première étape consiste à établir la décomposition de μ en somme des μ_j en dehors de Σ ainsi que l'équation

$$H_{\lambda_j}\mu_j = [\mu_j, F_j] + \nu_j, \;\; \mathrm{Supp}\,\nu_j \subset \Sigma.$$

La deuxième étape consiste en l'analyse de cette équation de transport et à montrer que la mesure ν_j est nulle sous les hypothèses géométriques que nous avons faites.

Commençons par décrire rapidement la première étape qui est une relecture de [11]. On projette l'équation sur les modes en posant

$$\psi_j^\varepsilon = \mathrm{op}_\varepsilon(\Pi_j)\psi^\varepsilon.$$

La mesure $\mu_j = \Pi_j\mu\Pi_j$ est alors une mesure de Wigner de (ψ_j^ε) et on a

$$\mathrm{op}_\varepsilon(\lambda_j(x,\xi))\psi_j^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{i}\mathrm{op}_\varepsilon(B_j) + o(\varepsilon) \;\text{ in }\; L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^N),$$

avec

$$B_j = \frac{1}{2}\left(\{\lambda_j, \Pi_j\} - \{\Pi_j, A\}\right).$$

Pour $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{2d}, \mathbf{C}^{N,N})$, on a

$$\left(\frac{i}{\varepsilon}\left[\mathrm{op}_\varepsilon(a), \mathrm{op}_\varepsilon(\lambda_j)\right]\psi_j^\varepsilon, \psi_j^\varepsilon\right) = \left(\mathrm{op}_\varepsilon(\{a,\lambda_j\})\psi_j^\varepsilon, \psi_j^\varepsilon\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int \mathrm{tr}\left(H_{\lambda_j} a \, d\mu_j\right).$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation satisfaite par (ψ_j^ε), on obient

$$\begin{aligned}\left(\frac{i}{\varepsilon}\left[\mathrm{op}_\varepsilon(a), \mathrm{op}_\varepsilon(\lambda_j)\right]\psi_j^\varepsilon, \psi_j^\varepsilon\right) &= \left(\mathrm{op}_\varepsilon(a)\mathrm{op}_\varepsilon(B_j)\psi^\varepsilon, \psi_j^\varepsilon\right) + \left(\mathrm{op}_\varepsilon(a)\psi_j^\varepsilon, \mathrm{op}_\varepsilon(B_j)\psi^\varepsilon\right)\\ &= \left(\mathrm{op}_\varepsilon(\Pi_j a B_j + B_j^* a \Pi_j)\psi^\varepsilon, \psi^\varepsilon\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int \mathrm{tr}\left(\Pi_j a B_j + B_j^* a\Pi_j\right) d\mu.\end{aligned}$$

On remarque alors qu'en dehors de Σ, $(\mathrm{op}_\varepsilon(a)\psi_j^\varepsilon, \psi_k^\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $j \neq k$ car

$$\Pi_k a \Pi_j = \left[A, \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j}\Pi_k a \Pi_j\right],$$

donc

$$\left(\mathrm{op}_\varepsilon(a)\psi_j^\varepsilon, \psi_k^\varepsilon\right) = \left(\left[\mathrm{op}_\varepsilon(A), \mathrm{op}_\varepsilon\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\Pi_k a\Pi_j\right)\right]\psi^\varepsilon, \psi^\varepsilon\right) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon).$$

Par conséquent, en dehors de Σ, $\Pi_j\mu\Pi_k = 0$ pour $k \neq j$ et

$$\mathrm{tr}\left((\Pi_j a B_j + B_j^* a \Pi_j)\mu\right) = \mathrm{tr}\left((\Pi_j a B_j + B_j^* a\Pi_j)\mu_j\right) + \mathrm{tr}(a\nu_j)$$

où la mesure ν_j est à support dans Σ et absolument continue par rapport à μ_j car elle décrit la limite de quantités de la forme $(f^\varepsilon, \psi_j^\varepsilon)$. Un calcul de [11] permet alors de montrer que

$$\mathrm{tr}\left((\Pi_j a B_j + B_j^* a\Pi_j)\mu_j\right) = \mathrm{tr}\left(a[\mu_j, F_j]\right).$$

Dans la deuxième étape, il nous reste à analyser dans $\mathbf{R}^D$, une équation de transport de la forme

$$H\mu = b\mu + c\mu + \nu$$

où H est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^D)$, b et c des matrices $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^D)$, ν une mesure à valeurs matricielles supportée dans une hypersurface Σ et absolument continue par rapport à la mesure à valeur matrice hermitienne positive μ. Le lemme suivant est crucial

Lemma 1 *Si H est transverse à Σ alors $\mu(\Sigma) = \nu(\Sigma) = 0$.*

Voyons tout d'abord comment ce lemme permet de conclure notre preuve. S'inspirant de [16], on raisonne par récurrence en remarquant tout d'abord qu'avec les notations du théorème 1, on a nécessairement $\mu_j(\Sigma_j^0) = 0$ par application du lemme. Supposons maintenant que nous ayons démontré $\mu_j(\Sigma_j^k) = 0$ pour $0 \le j \le k$ et montrons que $\mu_j(\Sigma_j^{k+1}) = 0$. Pour cela considérons $(x^*, \xi^*) \in \Sigma_j^{k+1}$ et désignons par $g(x,\xi) = 0$ une équation de Σ au voisinage de (x^*, ξ^*). On a alors

$$H_{\lambda_j}^{k+1} g(x^*, \xi^*) = 0 \;\text{ et }\; H_{\lambda_j}^{k+2} g(x^*, \xi^*) \neq 0.$$

Notre point (x^*, ξ^*) est donc un point de l'hypersurface $\{H_{\lambda_j}^{k+1} g(x^*, \xi^*) = 0\}$ et le champ H_{λ_j} est transverse à cette hypersurface en (x^*, ξ^*). On en déduit, en appliquant le lemme, que la mesure μ ne charge pas Σ_j^{k+1}. On montre ainsi par récurrence que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \;\; \mu_j(\Sigma_j^k) = \nu_j(\Sigma_j^k) = 0.$$

ce qui donne le théorème 1.

Avant de passer à la preuve de ce lemme clé, remarquons que l'argument développé ci-dessus donne très précisémet que μ_j et ν_j s'annulent au voisinage des points (x^*, ξ^*) de Σ_j^∞ pour lesquels il existe un voisinage U et une hypersurface Θ telle que $\Sigma_j^\infty \cap U \subset \Theta$ et H_{λ_j} transverse à Θ. En particulier, nous démontrons ainsi que $\nu_j = 0$ au voisinage des points isolés de Σ_j^∞ ; en revanche, nous ne pouvons pas traiter de cette manière une situation où des branches de trajectoire classiques correspondant à des modes différents sont confondues et incluses dans le croisement; l'hypothèse de T. Jecko sur les projecteurs fournit alors un cadre où l'on peut encore dire quelque-chose.

Démontrons maintenant le lemme 1 ; la variable x désigne maintenant un point quelconque de $\mathbf{R}^D$. On travaille localement près d'un point $x \in \Sigma$ et on se ramène à

$$x = 0, \;\; \partial_{x_1}\mu = \nu, \;\; \nu << \mu, \;\; \Sigma = \{\gamma(x) = 0\}, \;\; \partial_{x_1}\gamma \ge c_1 > 0.$$

On considère

$$\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}) \quad \text{telle que} \quad 0 \le \chi \le 1, \quad |s| \le \frac{1}{2} \Longrightarrow \chi(s) = 1, \quad |s| \ge 1 \Longrightarrow \chi(s) = 0$$

$$f_\varepsilon^0(x) = \chi\left(\frac{\gamma(x)}{\varepsilon}\right)\chi\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right), \quad f_\varepsilon(t,x) = f_\varepsilon^0\left(x_1 + t, x_2, \ldots, x_N\right).$$

On vérifie alors que

$$x \in \operatorname{supp} f_\varepsilon^0 \Longrightarrow |x| \le r \;\text{ and }\; |\gamma(x)| \le \varepsilon \tag{4}$$

$$x \in \operatorname{supp} f_\varepsilon(t,.) \Longrightarrow |x| \le r + |t| \;\text{ and }\; |\gamma(x_1 + t, x_2, \ldots, x_N)| \le \varepsilon. \tag{5}$$

On choisit $\mid t \mid< r$ et on teste μ contre $f_\varepsilon(t,.)$ en posant

$$F_\varepsilon(t) = \mathrm{tr}\left(\langle \mu, f_\varepsilon(t,.)\rangle\right),$$

On a alors par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(0) = \mathrm{tr}\left(\left\langle \mu, \mathbf{1}_\Sigma\, \chi\Big(\frac{|x|^2}{r^2}\Big)\right\rangle\right) \geq \mathrm{tr}\left(\mu\left(B_0(r/2)\cap\Sigma\right)\right)$$

et on veut montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(0) = 0$. Pour cela, on va estimer $F'_\varepsilon(t)$ pour des t proche de 0 et utiliser une suite (t_n) tendant vers 0 telle que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarquons tout d'abord que

$$F'_\varepsilon(t) = \mathrm{tr}\left\langle \mu, \frac{\partial}{\partial t} f_\varepsilon(t,.)\right\rangle = \mathrm{tr}\left\langle \mu, \frac{\partial}{\partial x_1} f_\varepsilon(t,.)\right\rangle = -\mathrm{tr}\left\langle \nu, f_\varepsilon(t,.)\right\rangle \leq C_1$$

car la mesure ν comme la mesure μ est finie. Par ailleurs, pour que $F'_\varepsilon(t)\neq 0$ il faut que le support de $f_\varepsilon(t)$ rencontre celui de ν, c'est-à-dire qu'il faut qu'il existe des points x tels que $\mid x \mid< 2r$, $\gamma(x_1+t, x_2,\cdots, x_D) < \varepsilon$ et $\gamma(x) = 0$. Or $\mid \gamma(x_1+t,x_2,\cdots,x_D) - \gamma(x) \mid\geq c_1 \mid t \mid$. Donc $F'_\varepsilon(t) = 0$ pour $\mid t\mid> \frac{\varepsilon}{c_1}$. On a donc

$$\mid F_\varepsilon(0) - F_\varepsilon(t) \mid\leq C_1 \frac{\varepsilon}{c_1}.$$

Construisons maintenant la suite (t_n). On remarque que

$$\forall t\in[-r,+r],\quad \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(t) = \mathrm{tr}\left(\left\langle \mu, \mathbf{1}_{\Sigma_t}\right\rangle\right) \text{ où } \Sigma_t = \left\{x,\ \mid x \mid< 2r,\ \gamma(x_1+t,x_2,\ldots,x_D) = 0\right\}.$$

Les ensembles Σ_t sont deux à deux disjoints et l'on a $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \Sigma_{1/n} \subset \{\mid x\mid< 2r\}$. On a donc

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(\Sigma_{1/n}) \leq \mu\left(\{\mid x \mid< 2r\}\right) < +\infty.$$

Donc la suite $\mu\left(\Sigma_{1/n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui permet d'écrire

$$F_\varepsilon(0) \leq C_1\frac{\varepsilon}{c_1} + F_\varepsilon(1/n),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(0) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(1/n) \leq \mu(\Sigma_{1/n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où $F_\varepsilon(0) = 0$, ce qui clôt la preuve du lemme 1 et donc du théorème 1.

4 Conclusion

Nous renvoyons à [7] pour une preuve des autres théorèmes et une discussion de situations où apparaissent des tangences d'ordre infini engendrant des phénomènes de transfert entre les modes. Il faut noter en particulier que dans une situation générique, de telles interactions n'interviendront pas au premier ordre en ε mais à des ordres inférieurs, comme le laisse prévoir la présence d'un terme d'ordre ε sur les coefficients antidiagonaux du symbole dans la forme normale du théorème 2 ; de telles interactions mériteraient d'ailleurs d'être étudiées.

References

[1] M. Brassart: Limite semi-classique de transformées de Wigner dans des milieux périodiques ou aléatoires. Thèse de l'Université de Sophia-Antipolis (2002).

[2] N. Burq: Semiclassical estimates for the resolvent in non trapping geometry. *Int. Math. Res. Notices*, **5** (2002), p. 221–241.

[3] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov: On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. *Ann. I. H. Poincaré*, **21** (2004), p. 295–318.

[4] Y. Colin de Verdière: The level crossing problem in semi-classical analysis. I. The symmetric case. Proceedings of the International Conference in Honor of Frédéric Pham (Nice, 2002), *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **53** (2003), no. 4, p. 1023–1054.

[5] Y. Colin de Verdière : The level crossing problem in semi-classical analysis. II. The Hermitian case. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **54** (2004), no. 5, p. 1423–1441.

[6] T. Duyckaerts: Opérateur de Schrödinger avec potentiel singulier multipolaire. *Bull. Soc. math. France*, **134**, N^{o}2, p.201-239 (2006).

[7] T. Duyckaerts, C. Fermanian Kammerer, T. Jecko: Degenerated codimension 1 crossings and resolvent estimates (en cours de rédaction).

[8] C. Fermanian Kammerer, P. Gérard: Mesures semi-classiques et croisements de modes. *Bull. Soc. math. France*, **130**, N^{o}1, (2002), p.123–168.

[9] C. Fermanian Kammerer, P. Gérard: A Landau-Zener formula for non-degenerated involutive codimension 3 crossings. *Ann. Henri Poincaré*, **4**, (2003), p.513-552.

[10] C. Fermanian Kammerer, V. Rousse: Resolvent estimates for a Schrödinger operator with matrix-valued potential presenting eigenvalue crossings. Application to Strichartz estimates, *Comm. in Part. Diff. Eq.* **33**, 1, p. 19-44 (2008).

[11] P. Gérard, P. Markowich, N. Mauser, and F. Poupaud: Homogenization limits and Wigner transforms. *Commun. Pure Appl. Math.* **50**, 4 (1997), pp. 323–379.

[12] G. A. Hagedorn: Molecular Propagation through Electron Energy Level Crossings. *Memoirs of the A. M. S.*, **111**, N^o 536, (1994).

[13] T. Jecko: Estimations de la résolvante pour une molécule diatomique dans l'approximation de Born-Oppenheimer. *Comm. Math. Phys.* **195**, 3 (1998), p. 585–612.

[14] T. Jecko: From classical to semiclassical non-trapping behaviour. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 338 (2004), p. 545–548.

[15] T. Jecko: Non-trapping condition for semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials. *Math. Phys. Electronic Journal*, No. 2, vol. 11, (2005).

[16] R. B. Melrose, J. Sjöstrand: Singularities of boundary value problems I and II, *Comm. Pure Appl. Math.* **31**, p. 593-617 (1978), **35**, p. 129-168 (1982).

[17] M. Reed, B. Simon: *Method of Modern Mathematical Physics, Tome II : Fourier Analysis, Self-adjointness.* Academic Press 1979.

[18] X. P. Wang: Semiclassical estimates in asymptotically euclidean scattering. *J. Funct. Anal.* **97** (1991), p. 466-483.

Adresse: C. Fermanian Kammerer,
Université Paris 12, Mathématiques, UMR 8050 du CNRS
61, avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil cedex France
Clotilde.Fermanian@univ-paris12.fr