Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2007-2008

François Bouchut et Gianluca Crippa

**Équations de transport à coefficient dont le gradient est donné par une intégrale singulière**

*Séminaire É. D. P.* (2007-2008), Exposé n° I, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2007-2008____A1_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2007-2008
Exposé n° I, 1-13

# ÉQUATIONS DE TRANSPORT À COEFFICIENT DONT LE GRADIENT EST DONNÉ PAR UNE INTÉGRALE SINGULIÈRE

FRANÇOIS BOUCHUT AND GIANLUCA CRIPPA

Abstract. Nous rappelons tout d'abord l'approche maintenant classique de renormalisation pour établir l'unicité des solutions faibles des équations de transport linéaires, en mentionnant les résultats récents qui s'y rattachent. Ensuite, nous montrons comment l'approche alternative introduite par Crippa et DeLellis estimant directement le flot lagrangien permet d'obtenir des résultats nouveaux. Nous établissons l'existence et l'unicité du flot associé à une équation de transport dont le coefficient a un gradient donné par l'intégrale singulière d'une fonction intégrable. L'application au système d'Euler bidimensionnel des fluides incompressibles et au système de Vlasov-Poisson permet d'obtenir des résultats nouveaux de convergence forte pour des suites de solutions.

## 1. Equations de transport linéaires scalaires

▷ Nous considérons des équations de transport multidimensionnelles

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x(bu) + lu = f, \tag{1}$$

où $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, $u(t,x) \in \mathbb{R}$ est l'inconnue, et le champ de vecteurs $b(t,x) \in \mathbb{R}^N$ est donné, ainsi que les coefficients $l(t,x)$ et $f(t,x)$.

Le problème (1) est complété par une donnée de Cauchy

$$u(0,x) = u^0(x). \tag{2}$$

▷ Les caractéristiques sont données par l'EDO

$$\frac{dX}{ds} = b(s,X), \qquad X(t) = x, \tag{3}$$

pour une fonction $X(s)$. Les données sont le temps initial $t$ et la position initiale $x$. Les caractéristiques sont classiquement liées à (1) par la propriété

$$(\partial_t u + b\cdot\nabla_x u)\,(s,X(s)) = \frac{d}{ds}\Big(u(s,X(s))\Big). \tag{4}$$

Notant $X(s,t,x) = X_{t,x}(s)$, si $l = -\operatorname{div} b$ et $f = 0$ on trouve que la solution de (1) est donnée par

$$u(t,x) = u^0(X(0,t,x)). \tag{5}$$

## 2. PROBLÈME DE CAUCHY, RENORMALISATION

### 2.1. Y a-t-il existence et unicité ?

- On démontre facilement avec la théorie de Cauchy-Lipschitz que si $l, f \in L^\infty$, $u^0 \in L^1_{loc}$, $b \in C^0 \cap L^\infty_t(Lip_x)$ alors (1) a une unique solution $u \in C([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.
- Problème du transport à coefficient peu régulier : *quels sont les coefficients $b$ pour lesquels le problème de Cauchy* (1) *est bien posé ?*

Pour simplifier on va supposer que $b \in L^\infty$.

▷ Une étape importante a été franchie avec le travail de DiPerna et Lions [9], qui ont montré que le problème est bien posé si

$$\operatorname{div} b \in L^\infty, \qquad \nabla_x b \in L^1_{loc}. \tag{6}$$

Plus précisément, il y a existence et unicité d'une solution faible $u \in C([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$, ainsi que stabilité des solutions sous hypothèse de bornes $L^\infty$ sur $b$ et $\operatorname{div} b$, et de convergence de $b$ dans $L^1_{loc}$.

### 2.2. Renormalisation.

La méthode de DiPerna et Lions [9] est basée sur la *propriété de renormalisation* :

- Montrer que toute fonction $u(t,x) \in L^\infty$ telle que $\partial_t u + b \cdot \nabla_x u \in L^1_{loc}$ vérifie pour toute nonlinéarité régulière $\beta$

$$\Big(\partial_t + b \cdot \nabla_x\Big)\Big(\beta(u)\Big) = \beta'(u)\Big(\partial_t + b \cdot \nabla_x\Big)u. \tag{7}$$

▷ On en déduit l'unicité des solutions faibles : si $u \in L^\infty$ vérifie (1) avec donnée initiale nulle, on multiplie l'équation par $u$ (en utilisant (7)), on intègre en $x$, et un lemme de Gronwall conclut que $\int u^2 dx \equiv 0$. On en déduit également la continuité forte en temps : $u \in C([0,T], L^1_{loc})$.
▷ L'existence de solutions faibles dans $L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^N)$ est facile dès que $b \in L^\infty$, $\operatorname{div} b \in L^\infty$ à cause de la linéarité et de bornes a priori.
▷ La stability se déduit également de la propriété de renormalisation en raisonnant sur $u^2$ et en utilisant que la convergence faible de $u^2$ implique la convergence forte de $u$.

2.3. **Renormalisation pour un coefficient BV.** La méthode de renormalisation a été étendue au cas $b \in BV_x$ par Ambrosio en 2004 dans [1]. La preuve repose comme dans DiPerna et Lions sur l'utilisation de commutateurs

$$\operatorname{div}(bu) * \eta_\varepsilon - \operatorname{div}(b(u * \eta_\varepsilon)), \tag{8}$$

où $\eta_\varepsilon$ est une suite régularisante. Plus précisément,

- DiPerna et Lions ont montré que ce commutateur tend vers 0 dans $L^1_{loc}$ quand $\varepsilon \to 0$ (sous hypothèse $\nabla_x b \in L^1_{loc}$),
- Ambrosio a montré que ce commutateur "peut être rendu arbitrairement petit" en choisissant de façon appropriée le noyau de régularisation (sous hypothèse $b \in BV_x$).

Ceci permet de conclure que le problème de Cauchy est bien posé dans le cas $b \in BV_x$, i.e. $\nabla_x b \in L^1_t(\mathcal{M}_x)$.

2.4. **Renormalisation : problèmes ouverts.** ▷ La question de la renormalisation reste ouverte dans le cas $b \in BD_x$ (i.e. la partie symétrique de $\nabla_x b$ est une mesure).

▷ La question de la renormalisation reste ouverte dans le cas où $b$ n'as pas nécessairement une divergence bornée, mais seulement une *compression bornée*. Ceci signifie qu'il existe $\rho(t,x)$ et une constante $L > 0$ tels que

$$0 < \frac{1}{L} \le \rho(t,x) \le L < \infty, \qquad \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho b) = 0. \tag{9}$$

Si $b \in BV_x$, a-t-on la propriété de renormalisation ?

Il faut voir que si $\rho \in BV_x$, le résultat est vrai car on peut utiliser le coefficient $\tilde{b} = (\rho, \rho b)$, qui vérifie $\operatorname{div}_{t,x} \tilde{b} = 0$.

▷ Dans toute la suite on suppose que $\operatorname{div} b \in L^\infty$. Pour des coefficients $b$ avec uniquement des bornes unilatérales

$$\nabla_x b + (\nabla_x b)^t \le C, \tag{10}$$

la situation est très différente, voir [6].

2.5. **Renormalisation et unicité.** En général, pour un coefficient $b \in L^\infty$ tel que $\operatorname{div} b = 0$ (pour simplifier), on a

**Proposition 1.** [3] On a l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) Unicité *forward* et *backward* des solutions faibles,
- (ii) L'espace de Banach des fonctions $u \in C([0,T], L^2 faible)$ telles que $\partial_t u + \operatorname{div}(bu) \in L^2$ muni de la norme du graphe admet les fonctions $C^\infty$ à support compact en $x$ comme sous-espace dense,

- (iii) Toute solution faible de $\partial_t u + \operatorname{div}(bu) = 0$ est continue fortement en temps, $u \in C([0,T], L^2)$ et est renormalisée, i.e.
$$\partial_t(\beta(u)) + \operatorname{div}(b\beta(u)) = 0 \tag{11}$$
pour toute fonction $\beta$ régulière.

2.6. **Renormalisation et unicité : contrexemples.** Un contrexemple construit par N. Depauw dans [8] montre qu'il existe des champs de vecteurs $b \in L^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $\operatorname{div} b = 0$ tels que alternativement :

- Le problème de Cauchy a une solution faible unique, mais elle n'est ni renormalisée, ni fortement continue en temps,
- Le problème de Cauchy a plusieurs solutions renormalisées.

Dans ces contrexemples, le coefficient $b$ est "presque" BV.
Il existe également des solutions renormalisées qui ne sont pas fortement continues en temps.

*Question* : peut-on espérer une "bonne théorie" hors de BV ?

▷ Réponse positive 1 : Oui avec un structure particulière, comme par exemple [5], [10].
▷ Réponse positive 2 : Oui, on peut faire un peu mieux que BV, en abandonnant l'unicité des solutions faibles, et en utilisant la formulation lagrangienne. C'est ce que nous allons dans la suite expliquer.

## 3. Approche Lagrangienne

L'approche Lagrangienne consiste à chercher le flot $X(s,t,x)$ solution de
$$\partial_s X = b(s, X), \quad X(t,t,x) = x. \tag{12}$$
Une fois connu le flot $X$, on a des formules de représentation pour les solutions. Par exemple pour le problème
$$\partial_t u + b \cdot \nabla_x u = 0, \quad u(0,x) = u^0(x), \tag{13}$$
on a la représentation
$$u(t,x) = u^0(X(0,t,x)). \tag{14}$$
L'idée est de prouver l'existence, l'unicité, et la stabilité du flot. On définit ensuite la "bonne solution" de (13) par la superposition (14). C'est alors automatiquement une solution faible, qui est stable par approximation de $b$.

Mais il faut voir que ceci n'implique pas l'unicité des solutions faibles de (13). En revanche, L'unicité des solutions faibles de (13) implique l'unicité du flot solution de (12).

3.1. **Unicité du flot lagrangien.** Une démonstration directe d'unicité du flot a été proposée par Crippa et DeLellis dans [7], travail qui fait suite à [2]. L'estimation de base est la suivante.

$\triangleright$ On considère les flots lagrangiens à compression bornée $X(s,x)$, i.e. on fixe le temps initial à zéro, on demande à $X$ de vérifier

$$\partial_s X = b(s,X), \quad X(0,x) = x, \tag{15}$$

et la propriété de bornitude de la mesure image (compression bornée)

$$\forall s,\ \forall A \quad \frac{1}{L}|A| \le |\{x \ :\ X(s,x) \in A\}| \le L|A|. \tag{16}$$

$\triangleright$ On veut exploiter l'estimation a priori suivante. En dérivant (15) on trouve $\partial_s \nabla_x X = (\nabla_x b(s,X))(\nabla_x X)$, d'où

$$\begin{gathered}\partial_s |\nabla_x X| \le |\nabla_x b(s,X)|\, |\nabla_x X|\,, \\ \partial_s \log|\nabla_x X| \le |\nabla_x b(s,X)|\,.\end{gathered} \tag{17}$$

Ceci donne formellement grâce à (16) que si $\nabla_x b \in \mathcal{M}$ (i.e. $b \in BV_x$), alors $\log|\nabla_x X| \in \mathcal{M}$.

3.2. **Fonction d'estimation.** Considérons deux flots $X, \overline{X}$ associés au même coefficient $b$. On fixe $\delta > 0$ et on définit

$$G_\delta(s) = \int_{B_r} \log\left(1 + \frac{|X(s,x) - \overline{X}(s,x)|}{\delta}\right) dx. \tag{18}$$

Afin de montrer que $X = \overline{X}$, il suffit de montrer que $G_\delta(s)$ explose moins vite que $\log\frac{1}{\delta}$ quand $\delta \to 0$. En effet, si jamais on avait $X \not\equiv \overline{X}$, il existerait un ensemble $A$ avec $|A| > 0$ et une constante $\alpha > 0$ tels que $|X(s,x) - \overline{X}(s,x)| > \alpha$ pour $(s,x) \in A$. On aurait alors $\int_0^T G_\delta(s)ds \ge \log(1+\alpha/\delta)|(0,T) \times B_r \cap A|$.

Afin d'estimer $G_\delta(s)$, on note que $G_\delta(0) = 0$ et on calcule

$$\begin{aligned} G_\delta{}'(s) &= \int_{B_r} \frac{\partial_s (X - \overline{X})}{\delta + |X - \overline{X}|} \cdot \frac{X - \overline{X}}{|X - \overline{X}|}\, dx \\ &\le \int_{B_r} \frac{|b(s,X) - b(s,\overline{X})|}{\delta + |X - \overline{X}|}\, dx. \end{aligned} \tag{19}$$

Supposons tout d'abord que

$$\frac{|b(s,x) - b(s,y)|}{|x-y|} \le \varphi(s,x) + \varphi(s,y), \tag{20}$$

où $\varphi$ est localement intégrable en $t, x$. Alors

$$G_\delta{}'(s) \leq \int_{B_r} \big(\varphi(s,X) + \varphi(s,\overline{X})\big)\, dx \leq 2\,L \int_{\widetilde{B_r}} \varphi(s,x)\, dx, \qquad (21)$$

et $G_\delta(s) \leq C\|\varphi\|_{L^1_{tx}} < \infty$. Ceci permet de conclure à l'unicité, sous réserve d'avoir (20) avec $\varphi \in L^1_{loc}$

3.3. **Estimation du quotient différentiel.** On rappelle le
**Lemme 1.** [11] Si $b(x)$ est assez régulier, on a

$$\frac{\Big|b(x) - b(y)\Big|}{|x-y|} \leq C\Big(M[\nabla b](x) + M[\nabla b](y)\Big), \qquad (22)$$

où $M[u]$ est la fonction maximale,

$$M[g](x) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} |g(y)|\, dy. \qquad (23)$$

▷ En particulier, si $b \in W^{1,p}_x$ avec $1 < p < \infty$, on a $M[\nabla b] \in L^p$, ce qui permet de conclure.

▷ Si $\nabla b \in L \log L$ alors $M[\nabla b] \in L^1_{loc}$, ce qui permet de conclure également.

▷ Cela ne donne pas la réponse pour $b \in W^{1,1}$, ni pour $b \in BV$.

▷ Il est possible également de faire des estimations d'erreur, ou de compacité, voir [7].

## 4. Coefficient à gradient donné par une intégrale singulière

Considérons maintenant un coefficient $b(t,x)$ tel que

$$\partial_j b_i = \sum_k S_{ijk}\, g_{ijk}, \qquad g_{ijk}(t,x) \in L^1_{t,x}, \qquad (24)$$

où $S_{ijk}$ est un opérateur d'intégrale singulière en $x$. Plus précisément,

$$S_{ijk}\, g_{ijk} = K_{ijk}(x) \underset{x}{*} g_{ijk}, \qquad (25)$$

où $K_{ijk}(x)$ est un noyau singulier.

▷ Nous considérons ici des noyaux singuliers $K(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ tels que leur restriction à $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ soit de classe $C^1$ et vérifie

$$\forall x \neq 0 \quad |K(x)| \leq \frac{C_0}{|x|^N}, \qquad |\nabla K(x)| \leq \frac{C_1}{|x|^{N+1}}, \qquad (26)$$

ainsi que

$$\forall 0 < R_1 < R_2 < \infty \quad \left| \int_{R_1<|x|<R_2} K(x)\,dx \right| \leq A_2. \tag{27}$$

▷ L'hypothèse sur $b(t,x)$ pour que (24) ait lieu comprend le cas $\nabla_x b \in L^1$ (prendre $K(x) = \delta(x)$), ainsi que le cas $\nabla_x b + (\nabla_x b)^t \in L^1$. Par contre, ni elle n'implique, ni elle est impliquée par la régularité $b \in BV_x$.

**Théorème 1.** [4]

- Si $b \in L^\infty$, $\operatorname{div} b \in L^\infty$ et si $b$ vérifie (24), alors il existe un unique flot lagrangien $X$ associé à $b$.
- De plus, si on a une suite de champs de vecteurs $b_n$ vérifiant chacun les hypothèses, avec $b_n$ et $\operatorname{div} b_n$ uniformément bornés dans $L^\infty$, $b_n \to b$ dans $L^1_{loc}$ avec $b$ vérifiant aussi (24), alors $X_n \to X$ dans $L^1_{loc}$.

**Question ouverte** : a-t-on l'unicité des solutions faibles du transport ? A-t-on la propriété de renormalisation ?

**Schéma de preuve du Théorème 1**

Pour l'unicité on utilise l'approche de Crippa et DeLellis, et la fonction

$$G_\delta(s) = \int_{B_r} \log\left(1 + \frac{|X(s,x) - \overline{X}(s,x)|}{\delta}\right) dx. \tag{28}$$

Il suffit de montrer que $G_\delta(s) = o(\log \frac{1}{\delta})$ quand $\delta \to 0$. Mais

- Rappellons que dans le cas $\nabla_x b \in L \log L$, on avait $G_\delta(s) = O(1)$. On a donc une "réserve" de $\log \frac{1}{\delta}$.
- Il faut passer de l'hypothèse $\nabla_x b \in L \log L$ à $\nabla_x b \in L^1$, et améliorer d'un log, ce qui correspond à la réserve disponible.
- Il faut en plus traiter les intégrales singulières "gratuitement".

4.1. **Intégrales singulières.** ▷ un opérateur d'intégrale singulière $Sg \equiv K * g$ vérifie

$$\begin{gathered} \|Sg\|_{L^p} \leq C_p \|g\|_{L^p}, \quad 1 < p < \infty, \\ |||Sg|||_{M^1} \leq C \|g\|_{L^1}, \end{gathered} \tag{29}$$

où la pseudo-norme $M^1$ (appelée aussi $L^1$ faible, ce n'est pas une norme) est définie par

$$|||g|||_{M^1} = \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon |\{x \ : \ |g(x)| > \varepsilon\}|. \tag{30}$$

On a $L^1 \subset M^1$.

▷ L'opérateur maximal (23) vérifie les mêmes estimations

$$\begin{gathered} \|M[g]\|_{L^p} \leq C_p \|g\|_{L^p}, \quad 1 < p < \infty, \\ |||M[g]|||_{M^1} \leq C \|g\|_{L^1}. \end{gathered} \tag{31}$$

▷ L'opérateur maximal $M[g]$ n'est pas borné sur $L^1$ (ni les opérateurs d'intégrale singulière). En fait, $M[g] \in L^1_{loc} \Leftrightarrow g \in L \log L_{loc}$.

4.2. **Compensations dans les intégrales singulières et fonctions maximales.** ▷ La composition de deux opérateurs d'intégrale singulière $S_1$, $S_2$ est encore un opérateur d'intégrale singulière, de noyau $K = K_1 * K_2$ (si $K_1$ et $K_2$ sont assez réguliers). En particulier, on a

$$|||S_2 S_1 g|||_{M^1} \leq C\|g\|_{L^1}, \tag{32}$$

bien que $S_1$ et $S_2$ ne vérifient pas d'estimation permettant d'établir cette inégalité. *Il y a "compensation" dans les intégrales.* Ceci est possible parce qu'il n'y a pas de valeur absolue dans les définitions de $S_1$ et $S_2$.

▷ On peut définir une fonction maximale sans valeur absolue par

$$M_\rho[g](x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int \rho_\varepsilon(x-y) g(y)\, dy \right| = \sup_{\varepsilon>0} |(\rho_\varepsilon * g)(x)|\,. \tag{33}$$

avec $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon)/\varepsilon^N$. Si on prend $\rho(x) = \mathbb{1}_{|x|<1}$ on retrouve l'ancienne fonction maximale (23) (mais avec les valeurs absolues à l'extérieur). On considère des fonctions $\rho \in L^1_c(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}\rho \subset B(0,1)$, et on suppose $\rho$ "assez régulier".

**Proposition 2.** Soit $S$ un opérateur d'intégrale singulière de noyau $K$, et $M_\rho$ un opérateur maximal de noyau $\rho$ vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|[\varepsilon^N K(\varepsilon x)] * \rho(x)\|_{C_b} \leq B \tag{34}$$

(c'est vrai si $\rho \in W^{1,p}$ avec $p > N$).
Alors pour $g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$|||M_\rho[Sg]|||_{M^1} \leq C(\|\rho\|_{L^1} + B)\|g\|_{L^1}. \tag{35}$$

Autrement dit, la composition de $S$ par $M_\rho$ est bornée de $L^1$ dans $M^1$. En fait on a même mieux : soit $\rho^\beta$ une famille de poids avec $\rho^\beta \in L^1_c$, $\operatorname{supp}\rho^\beta \subset B(0,1)$, et

$$\sup_\beta \left(\|\rho^\beta\|_{L^1} + B_{\rho^\beta}\right) \leq Q. \tag{36}$$

Alors

$$\left|\left|\left| M_{\{\rho^\beta\}_\beta}[Sg] \right|\right|\right|_{M^1} \leq C\, Q \|g\|_{L^1}, \tag{37}$$

où $M_{\{\rho^\beta\}_\beta}$ désigne la fonction maximale associée à la famille $\{\rho^\beta\}_\beta$, i.e. le sup dans (33) est pris à la fois sur $\varepsilon > 0$ et sur $\beta$.

La preuve de la Proposition 2 se fait à l'aide du lemme classique d'interpolation :

**Lemme 2.** Soit $S_+ : L^2(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$S_+(u+v) \leq S_+(u) + S_+(v), \qquad S_+(\lambda u) = |\lambda| S_+(u),$$
$$\|S_+(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq B_2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$
$$\left(\mathit{supp}\, u \subset \overline{B}(x_0, R) \text{ et } \int u = 0\right) \Rightarrow \int_{|x-x_0|>2R} S_+(u)\, dx \leq B_1 \|u\|_{L^1}(\mathbb{R}^N). \tag{38}$$

Alors

$$|||S_+(u)|||_{M^1} \leq C(B_2 + B_1)\|u\|_{L^1}. \tag{39}$$

Pour prouver la Proposition 2, on décompose

$$\rho_\varepsilon * Sg = \Delta_\varepsilon * g + (\int \rho)\Big(\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) K\Big) * g, \tag{40}$$

avec

$$\Delta_\varepsilon(x) = \Big(K(\varepsilon x) * \rho\Big)(x/\varepsilon) - (\int \rho)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) K(x). \tag{41}$$

Le terme en $\Delta_\varepsilon$ dans (40) s'estime à la main, tandis que pour le second terme on utilise le Lemme 2 ci-dessus.

4.3. **Estimation des quotients différentiels.** Il faut améliorer l'estimation classique

$$\frac{\Big|b(x) - b(y)\Big|}{|x-y|} \leq C\Big(M[\nabla b](x) + M[\nabla b](y)\Big). \tag{42}$$

On suppose que $b$ vérifie

$$\partial_j b_i = \sum_k S_{ijk}\, g_{ijk}, \tag{43}$$

où $S_{ijk}$ est un opérateur d'intégrale singulière en $x$, et $g_{ijk}(x) \in L^1$. On montre qu'alors

$$\frac{\Big|b(x) - b(y)\Big|}{|x-y|} \leq \varphi(x) + \varphi(y), \tag{44}$$

où

$$\varphi = C \sum_{ijk} M_{\{\rho^\beta\}_\beta}[S_{ijk}\, g_{ijk}], \tag{45}$$

pour une certaine famille $\{\rho^\beta\}_\beta$ (ici $\beta$ paramétrise les directions prises par $x - y$). D'après la Proposition 2 on a donc $\varphi \in M^1$.

4.4. **Argument final.** Rappelons que

$$G_\delta{}'(s) \le \int_{B_r} \frac{|b(s,X)-b(s,\overline{X})|}{\delta+|X-\overline{X}|}\,dx. \tag{46}$$

Utilisant

$$\begin{aligned}\frac{|b(s,X)-b(s,\overline{X})|}{\delta+|X-\overline{X}|} &\le \min\left\{\frac{C}{\delta}, \varphi(s,X)+\varphi(s,\overline{X})\right\}\\ &\le \min\left\{\frac{C}{\delta}, \varphi(s,X)\right\} + \min\left\{\frac{C}{\delta}, \varphi(s,\overline{X})\right\},\end{aligned} \tag{47}$$

on obtient

$$\begin{aligned}&G_\delta{}'(s) \le 2L\Big\|\min\Big\{\frac{1}{\delta}, \varphi(s,x)\Big\}\Big\|_{L^1(\widetilde{B_r})},\\ &G_\delta(s) \le 2L\Big\|\min\Big\{\frac{1}{\delta}, \varphi(t,x)\Big\}\Big\|_{L^1((0,T)\times\widetilde{B_r})}.\end{aligned} \tag{48}$$

Notant $\mathcal{B} = (0,T)\times\widetilde{B_r}$, il reste à utiliser l'inégalité d'interpolation

$$\|u\|_{L^1(\mathcal{B})} \le |\!|\!| u |\!|\!|_{M^1}\Big(1+\log\frac{|\mathcal{B}|\|u\|_{L^\infty}}{|\!|\!| u |\!|\!|_{M^1}}\Big), \tag{49}$$

ce qui donne

$$G_\delta(s) \le C(1+\log\frac{1}{\delta}). \tag{50}$$

Pour conclure, on écrit que pour tout $\varepsilon>0$ on peut décomposer $g_{ijk} = g^1_{ijk}+g^2_{ijk}$, avec $\|g^1_{ijk}\|_{L^1} \le \varepsilon$, et $\|g^2_{ijk}\|_{L^2_c} \le C_\varepsilon$. On en déduit que

$$G_\delta(s) \le C\,\varepsilon\Big(1+\log\frac{1}{\delta\varepsilon}\Big)+C_\varepsilon, \tag{51}$$

ce qui donne pour tout $\varepsilon>0$

$$\limsup_{\delta\to 0}\frac{G_\delta(s)}{\log\frac{1}{\delta}} \le C\,\varepsilon, \tag{52}$$

d'où

$$G_\delta(s) = o(\log\frac{1}{\delta}), \tag{53}$$

ce qui donne l'unicité. La stabilité se traite de la même façon, en estimant les termes d'erreur supplémentaires. L'existence s'ensuit par approximation du coefficient.

## 5. Applications

5.1. **Le système d'Euler incompressible.** En deux dimensions, le système d'Euler incompressible s'écrit

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}(\omega u) = 0, \tag{54}$$

avec donnée initiale $\omega^0(x)$ et

$$u = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} * \omega. \tag{55}$$

Comme $\partial_j(x_i/|x|^2)$ est un noyau singulier, on est dans le cas qui nous intéresse dès que $\omega \in L^1$. On définit alors les solutions de (54) pour une donnée $\omega^0 \in L^1$ par superposition avec le flot.

**Proposition 3.** [4] i) On a existence pour $\omega^0 \in L^1$.
ii) Soit une suite de solutions de (54)-(55) de données initiales $\omega_n^0$, avec $\omega_n^0 \rightharpoonup \omega^0$ dans $L^1$ faible. Alors après extraction d'une sous-suite, on a

$$\begin{aligned} &\omega_n \rightharpoonup \omega \quad \text{dans } L^1 \text{ faible}, \\ &X_n \to X \quad \text{dans } L^1_{loc} \text{ fort}, \end{aligned} \tag{56}$$

et $\omega$ est une solution de (54)-(55). Si de plus $\omega_n^0 \to \omega^0$ fort, alors $\omega_n \to \omega$ fort.
**Remarque :** la convergence de $\omega$ vers une solution était connue, mais

avec une autre notion de solution faible (définition du produit $\omega u$ par symétrisation).

5.2. **Le système de Vlasov-Poisson.** Le système de Vlasov-Poisson en dimension quelconque s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, \tag{57}$$

avec donnée initiale $f^0(x,v)$ et

$$E(t,x) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \frac{x}{|x|^N} \underset{x}{*} \left( \int f(t,x,v)\, dv - \rho_b(x) \right). \tag{58}$$

Comme $\partial_j(x_i/|x|^N)$ est un noyau singulier, on est dans la situation qui nous intéresse dès que $f \in L^1$ (sauf que le noyau singulier est en $x$ plutôt qu'en $(x,v)$). On définit alors les solutions de (57) pour une donnée $f^0 \in L^1$ par superposition avec le flot.

**Proposition 4.** [4] i) On a existence pour $f^0 \in L^1$ d'énergie finie.
ii) Soit une suite de solutions de (57)-(58) de données initiales $f_n^0$, avec

$f_n^0 \rightharpoonup f^0$ dans $L^1$ faible, et d'énergies cinétiques uniformément bornées. Alors après extraction d'une sous-suite, on a

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f \quad \text{dans } L^1 \text{ faible},\\ X_n &\to X \quad \text{dans } L^1_{loc} \text{ fort}, \end{aligned} \tag{59}$$

et $f$ est une solution de (57)-(58). Si de plus $f_n^0 \to f^0$ fort, alors $f_n \to f$ fort.

## 6. Conclusion

Nous avons défini une nouvelle notion de solution pour le transport : par composition avec le flot lagrangien. Cette notion de solution est plus forte que celle de solution faible, utilisée habituellement dans le contexte de la méthode de renormalisation. Nous avons montré que cette notion de solution mène à un problème bien posé, en prouvant l'existence, l'unicité, la stabilité du flot, dans le cas où le coefficient a des dérivées données par des intégrales singulières de fonctions $L^1$. Nous avons donné des exemples où cette régularité apparaît naturellement : le système d'Euler incompressible bidimensionnel et le système de Vlasov-Poisson. Pour ces deux systèmes classiques de la mécanique des fluides, nous avons obtenu de nouveaux résultats de convergence forte du flot pour des données juste intégrables.

De nouvelles questions se posent :

- Sous les hypothèses donnant l'unicité du flot, est-ce qu'il y a unicité des solutions faibles du transport ?
- Est-ce que le cas $BV$, voire $BD$, peut être abordé par la même approche ?

## References


[1] L. Ambrosio, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. **158** (2004), 227-260.

[2] L. Ambrosio, M. Lecumberry, S. Maniglia, *Lipschitz regularity and approximate differentiability of the DiPerna–Lions flow*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **114** (2005), 29-50.

[3] F. Bouchut, G. Crippa, *Uniqueness, renormalization and smooth approximations for linear transport equations*, SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), 1316-1328.

[4] F. Bouchut, G. Crippa, *Transport equations with coefficient having a gradient given by a singular integral, and applications*, In preparation.

[5] F. Bouchut, L. Desvillettes, *On two-dimensional hamiltonian transport equations with continuous coefficients*, Diff. and Int. Eq. **14** (2001), 1015-1024.

[6] F. Bouchut, F. James, S. Mancini, *Uniqueness and weak stability for multi-dimensional transport equations with one-sided Lipschitz coefficient*,

Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (5), **4** (2005), 1-25.

[7] G. Crippa, C. DeLellis, *Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow*, J. Reine Angew. Math. (2008).

[8] N. Depauw, *Non-unicité du transport par un champ de vecteurs presque $BV$*, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, exp. no. XXII, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2003.

[9] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511-547.

[10] M. Hauray, *On two-dimensional Hamiltonian transport equations with $L^p_{loc}$ coefficients*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003), 625-644.

[11] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

François Bouchut, DMA, CNRS & École Normale Supérieure, 45 Rue d'Ulm, F-75230 Paris cedex 05, France
*E-mail address*: Francois.Bouchut@ens.fr

Gianluca Crippa, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma, viale G.P. Usberti 53/A (Campus), 43100 Parma, Italy
*E-mail address*: gianluca.crippa@unipr.it