

SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2007-2008

Fabrice Béthuel, Philippe Gravejat, et Jean-Claude Saut

Ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii

Séminaire É. D. P. (2007-2008), Exposé n° XV, 28 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2007-2008____A15_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

Ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii

Fabrice Béthuel ¹, Philippe Gravejat ², Jean-Claude Saut ³

Résumé

Cet exposé présente les résultats de l'article [3] au sujet des ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii : la construction d'une branche d'ondes progressives non constantes d'énergie finie en dimensions deux et trois par un argument variationnel de minimisation sous contraintes, ainsi que la non-existence d'ondes progressives non constantes d'énergie petite en dimension trois.

1 Introduction

1.1 L'équation de Gross-Pitaevskii

L'équation de Gross-Pitaevskii décrit des phénomènes tels que la condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra-froids, la superfluidité de l'Hélium II, ou les solitons sombres en optique non linéaire (cf les articles de V.L. Ginzburg et L.P. Pitaevskii [19], L.P. Pitaevskii [40], et E.P. Gross [27], ainsi que, par exemple, les articles de revue de C. Coste [10], ou de Y.S. Kivshar et B. Luther-Davies [34]). C'est une équation de type Schrödinger non linéaire, qui s'écrit sous la forme

$$i\partial_t\Psi = \Delta\Psi + \Psi(1 - |\Psi|^2). \quad (\text{GP})$$

La solution Ψ , définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, et à valeurs complexes, est la fonction d'ondes associée au phénomène étudié.

L'équation (GP) est hamiltonienne. Son hamiltonien, l'énergie de Ginzburg-Landau, est donné par l'expression

$$E(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Psi|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - |\Psi|^2)^2 = \int_{\mathbb{R}^N} e(\Psi). \quad (1.1)$$

Nous nous limiterons ici à l'analyse des solutions Ψ d'énergie finie de l'équation (GP). Ce n'est pas nécessaire, au moins sur le plan mathématique (cf les articles de D. Chiron [8, 9], et de F. Béthuel et D. Smets [6]), mais la description des phénomènes cités ci-dessus requiert en général cette condition. Une solution Ψ d'énergie finie vérifie, au moins formellement, la condition $|\Psi(x, t)| \rightarrow 1$, lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, alors que l'analyse des équations de Schrödinger non linéaires porte plutôt sur des solutions de limite nulle à l'infini. Cette différence, essentielle, complique quelque peu l'étude de l'équation (GP), que ce soit pour la résolution du problème de Cauchy associé, ou pour l'existence de solutions particulières.

L'équation (GP) conserve, au moins formellement, une seconde quantité intégrale : le moment, défini par

$$P(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle i\nabla\Psi, \Psi \rangle, \quad (1.2)$$

¹Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Boîte Courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, France. E-mail : bethuel@ann.jussieu.fr

²Centre de Recherche en Mathématiques de la Décision, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France. E-mail : gravejat@ceremade.dauphine.fr

³Laboratoire de Mathématiques, Université Paris Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail : Jean-Claude.Saut@math.u-psud.fr

qui décrit l'évolution du centre de masse de la solution Ψ . La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire du plan complexe identifié à l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^2 . L'une des difficultés de l'analyse de l'équation (GP) est de donner un sens rigoureux au moment P . Lorsque Ψ est d'énergie finie, la quantité $\langle i\nabla\Psi, \Psi \rangle$ n'est pas a priori intégrable en raison de la condition de limite non nulle à l'infini; la formule (1.2) n'a pas de sens. Une façon élémentaire de lui donner un sens est de définir le moment $P(\Psi)$ par

$$P(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle i\nabla\Psi, \Psi - 1 \rangle. \quad (1.3)$$

Lorsque la fonction Ψ , et non pas seulement son module, a pour limite 1 à l'infini, et que la différence $\Psi - 1$ est suffisamment intégrable, le moment $P(\Psi)$ est bien définie par la formule (1.3). C'est le cas pour les solutions de l'équation (GP) de type ondes progressives (en dimension supérieure ou égale à deux).

L'équation de Gross-Pitaevskii présente une seconde forme, la forme hydrodynamique, qui s'obtient à l'aide de la transformation de Madelung [37] :

$$\Psi = \sqrt{\rho} \exp i\varphi.$$

Cette forme hydrodynamique s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \nabla \rho^2 = \rho \nabla \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{|\nabla \rho|^2}{2\rho^2} \right), \end{cases} \quad (1.4)$$

où $v = -2\nabla\varphi$. Le système (1.4) est semblable aux équations d'Euler pour un fluide irrotationnel de pression $p(\rho) = \rho^2$. Il en diffère par le terme non linéaire du membre droit de la seconde équation, que l'on désigne en général sous le terme de pression quantique. Cette analogie permet de calculer la vitesse des ondes sonores c_s autour de la solution constante $\Psi_1 = 1$ de l'équation (GP). La linéarisation de (GP) pour une perturbation $\Psi = \sqrt{1 + \tilde{\rho}} \exp i\tilde{\varphi}$ de la solution Ψ_1 conduit en effet à l'équation des ondes

$$\partial_t^2 \tilde{\rho} - 2\Delta \tilde{\rho} = 0,$$

de sorte que la vitesse des ondes sonores vaut

$$c_s = \sqrt{2}.$$

Cette vitesse joue un rôle primordial dans l'étude des ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii.

1.2 Ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii

Les ondes progressives sont les solutions particulières de l'équation (GP) qui s'expriment sous la forme

$$\Psi(x, t) = v(x_1 - ct, x_2, \dots, x_N).$$

Elles correspondent à la propagation d'un profil v suivant la direction x_1 à une vitesse c , supposée constante. La fonction v , définie sur \mathbb{R}^N et à valeurs complexes, vérifie l'équation

$$ic\partial_1 v + \Delta v + v(1 - |v|^2) = 0. \quad (\text{OPc})$$

Si v est solution de cette équation pour une vitesse c donnée, la fonction conjuguée de v est solution de cette même équation pour la vitesse $-c$, de sorte qu'il est possible de se restreindre à des vitesses c positives.

L'intérêt pour les ondes progressives d'énergie finie provient de leur rôle supposé dans la dynamique associée à l'équation de Gross-Pitaevskii. Plusieurs travaux à la fois numériques et formels se sont attachés à décrire les conditions de leur existence, ainsi que certaines de leurs propriétés qualitatives. S.V. Iordanskii et A.V. Smirnov [30] ont ainsi analysé leur limite transsonique en dimension trois, puis C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] ont dressé une liste exhaustive de leurs principales caractéristiques en dimensions deux et trois.

La première question à soulever à leur sujet est bien sûr celle de leur existence. L'équation (OPc) possède des solutions très simples, comme les fonctions constantes de module un, ou la fonction nulle. Il est de plus possible de construire de nouvelles solutions par des transformations géométriques élémentaires à partir d'une solution v donnée. À titre d'exemple, l'équation (OPc) est invariante par multiplication par une constante de module un ou par translation. Elle est également invariante par la transformation qui, à une fonction v donnée, associe la fonction \tilde{v} , définie par

$$\tilde{v}(x) = \overline{v(x)} \exp(-icx_1).$$

Cependant, les solutions construites à partir des solutions constantes à l'aide de ces diverses transformations demeurent constantes, ou sont d'énergie infinie. Se pose donc la question de l'existence d'ondes progressives qui ne soient ni constantes, ni d'énergie infinie.

C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] ont répondu par l'affirmative à cette question. Ils ont établi, à l'aide d'outils numériques et formels, que l'équation (OPc) possède une branche de solutions v_c non constantes d'énergie finie pour des vitesses

$$0 < c < \sqrt{2}.$$

À l'inverse, il n'existe pas de telles solutions pour une vitesse nulle, ou pour des vitesses

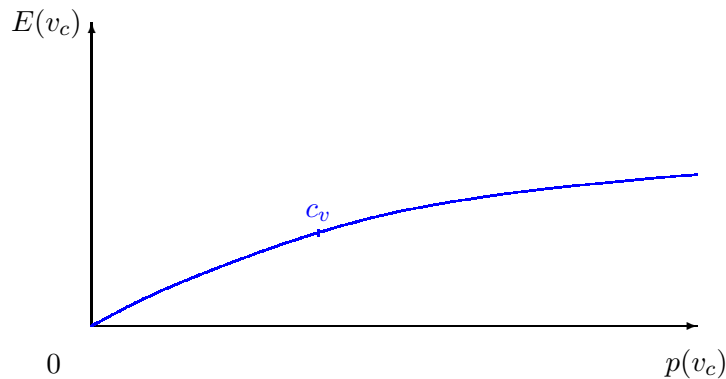
$$c \geq \sqrt{2}.$$

Autrement dit, les seules ondes progressives non constantes d'énergie finie sont subsoniques, et ne peuvent être ni stationnaires, ni soniques, ni supersoniques.

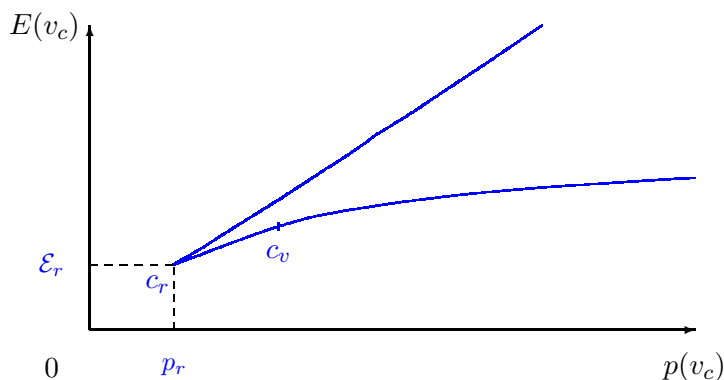
C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] ont tracé la branche de solutions subsoniques de l'équation (OPc) dans le plan énergie E - moment scalaire p . Le terme de moment scalaire désigne ici la première composante

$$p(v) = P_1(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle i\partial_1 v, v - 1 \rangle,$$

du moment P défini par l'expression (1.3). En dimension deux, leur tracé a l'allure suivante :



En dimension trois, il prend la forme suivante :

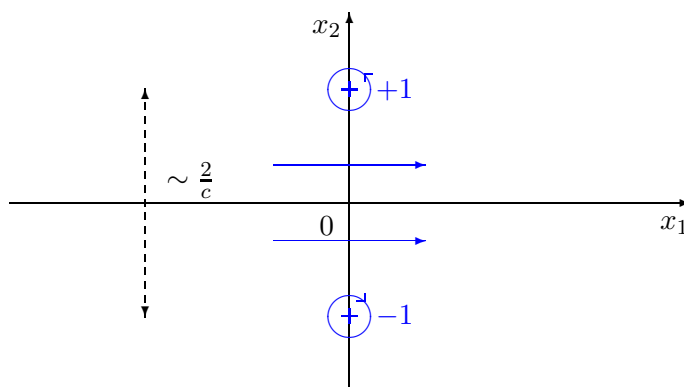


Sur ces deux courbes, chaque point représente une onde progressive v_c d'énergie $E(v_c)$ et de moment $p(v_c)$ donnés. La vitesse c de l'onde progressive est la pente de la tangente à la courbe au point considéré, en raison de la relation

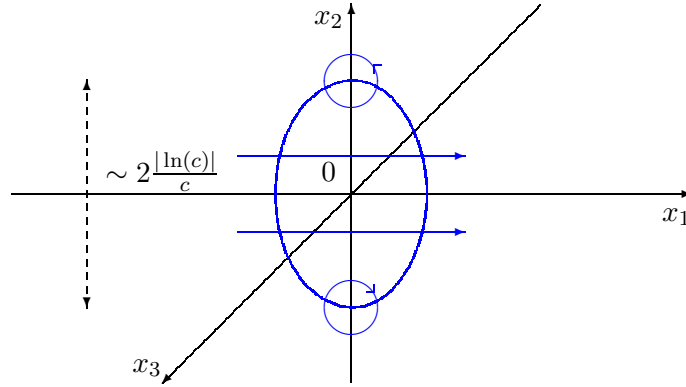
$$c = \frac{\partial E}{\partial p}(p(v_c)),$$

laquelle est formellement valable le long de la courbe. Que ce soit en dimension deux ou en dimension trois, l'énergie et le moment scalaire de v_c deviennent infinis lorsque sa vitesse c tend vers 0. En dimension deux, ces deux quantités tendent vers 0 à la limite transsonique, c'est-à-dire lorsque c tend vers la vitesse du son $c_s = \sqrt{2}$. À l'inverse, en dimension trois, l'énergie et le moment scalaire de v_c deviennent infinis à la limite transsonique : la courbe présente deux branches, séparées par un point de rebroussement atteint pour une valeur de la vitesse c_r , une énergie \mathcal{E}_r , et un moment scalaire p_r .

L'existence de branches d'ondes progressives v_c , paramétrisées par la vitesse c , suggère d'analyser leur évolution en fonction de leur vitesse c . C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] ont ainsi établi que, lorsque la vitesse c est petite, les ondes progressives v_c présentent des vortex, c'est-à-dire des points en lesquels v_c s'annule, et autour desquels l'application $\frac{v_c}{|v_c|}$ a un degré topologique non nul. En dimension deux, v_c présente deux vortex de degrés -1 et 1 , symétriques par rapport à l'axe x_1 , et à une distance équivalente à $\frac{2}{c}$ lorsque c tend vers 0, comme l'indique le schéma suivant :



De manière analogue, en dimension trois, v_c présente un anneau de vortex autour de l'axe x_1 , de diamètre équivalent à $\frac{2|\ln(c)|}{c}$ lorsque c tend vers 0, qui est représenté sur la figure suivante :



Ces deux schémas représentent des solutions qui vérifient la symétrie naturelle associée à l'équation (OPc) : la symétrie par rapport à l'axe x_1 en dimension deux, l'invariance par rotation autour de l'axe x_1 en dimension trois. Les ondes progressives v_c obtenues par C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] présentent ces symétries, ce qui explique le positionnement ci-dessus de leurs vortex.

Lorsque la vitesse c augmente, les ondes progressives v_c ne s'annulent plus au-dessus d'une vitesse critique c_v , qui semble numériquement inférieure à celle du point de rebroussement c_r en dimension trois.

Enfin, lorsque c approche la vitesse du son $c_s = \sqrt{2}$, la fonction v_c devient une onde de raréfaction : elle converge uniformément vers une constante de module un. Il est alors possible de la relever, c'est-à-dire de l'écrire sous la forme

$$v_c = \varrho_c \exp i\varphi_c,$$

où le module ϱ_c et la phase φ_c sont définis sur \mathbb{R}^N et à valeurs réelles. À la limite transsonique, ces deux fonctions sont gouvernées, à un changement d'échelles près, par l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KPI),

$$\partial_t \psi + \psi \partial_1 \psi + \partial_1^3 \psi - \sum_{j=2}^N \partial_1^{-1} (\partial_j^2 \psi) = 0. \quad (\text{KPI})$$

Cette équation généralise l'équation de Korteweg-de Vries (KdV),

$$\partial_t \psi + \psi \partial_x \psi + \partial_x^3 \psi = 0, \quad (\text{KdV})$$

aux dimensions supérieures ou égales à deux. Elle décrit l'évolution d'ondes essentiellement unidirectionnelles, faiblement dispersives, et faiblement non linéaires (cf l'article de B.B. Kadomtsev et V.I. Petviashvili [33]). Pour préciser le lien entre les équations (GP) et (KPI), il est nécessaire de définir les fonctions N_c et $\partial_1 \Theta_c$, données par les changement d'échelles

$$N_c(x) = \frac{6}{2-c^2} \left(1 - \varrho_c \left(\frac{x_1}{\sqrt{2-c^2}}, \frac{\sqrt{2}x_\perp}{2-c^2} \right)^2 \right), \quad \text{et} \quad \partial_1 \Theta_c(x) = \frac{6\sqrt{2}}{(2-c^2)^{\frac{3}{2}}} \partial_1 \varphi_c \left(\frac{x_1}{\sqrt{2-c^2}}, \frac{\sqrt{2}x_\perp}{2-c^2} \right), \quad (1.5)$$

où $x = (x_1, x_\perp)$, et $x_\perp = (x_2, \dots, x_N)$. À la limite $c \rightarrow \sqrt{2}$, les fonctions N_c et $\partial_1 \Theta_c$ convergent vers une solution N de l'équation des ondes solitaires de vitesse 1 pour l'équation (KPI), à savoir

$$\partial_1 N - N \partial_1 N - \partial_1^3 N + \sum_{j=2}^N \partial_1^{-1} (\partial_j^2 N) = 0. \quad (1.6)$$

Pour conclure quant aux travaux de C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31], il faut noter qu'ils ont aussi décrit le comportement asymptotique des ondes progressives v_c , ainsi

que leur stabilité, lorsqu'elles sont soumises au flot associé à l'équation (GP). En ce qui concerne leur comportement asymptotique, il est donné par les développements formels suivants, à une constante multiplicative de module un près,

$$v_c(x) \simeq 1 + \frac{i\alpha x_1}{x_1^2 + (1 - \frac{c^2}{2})x_2^2} + \dots, \quad (1.7)$$

en dimension deux, et

$$v_c(x) \simeq 1 + \frac{i\alpha x_1}{(x_1^2 + (1 - \frac{c^2}{2})(x_2^2 + x_3^2))^{\frac{3}{2}}} + \dots, \quad (1.8)$$

en dimension trois. Le coefficient dipolaire élastique α , qui apparaît dans ces deux formules, dépend explicitement de l'énergie $E(v_c)$ et du moment scalaire $p(v_c)$ à travers les relations

$$2\pi\alpha\sqrt{1 - \frac{c^2}{2}} = cE(v_c) + 2\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)p(v_c), \quad (1.9)$$

en dimension deux, et

$$4\pi\alpha = \frac{c}{2}E(v_c) + 2p(v_c), \quad (1.10)$$

en dimension trois. Ces développements indiquent qu'une onde progressive v_c tend vers une constante de module un à l'infini, ce qui n'est pas complètement évident, au sens où le caractère fini de l'énergie implique que le module de v_c tend vers 1 à l'infini, mais n'implique a priori rien pour la phase de v_c . De surcroît, la différence entre l'onde progressive v_c et sa limite à l'infini a une décroissance algébrique explicite, essentiellement gouvernée par la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^{N-1}}$, comme le soulignent les formules (1.7) et (1.8).

Quant à la stabilité des ondes progressives v_c , il s'agit de déterminer si la solution Ψ de l'équation (GP) associée à une donnée initiale Ψ_0 proche de v_c , reste proche de la fonction $(x, t) \mapsto v_c(x_1 - ct, x_\perp)$ en temps grand. C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] estiment que c'est bien le cas en dimension deux, ainsi que pour les ondes progressives sur la branche inférieure en dimension trois, mais qu'au contraire, les ondes progressives sur la branche supérieure en dimension trois sont instables. Cette différence est liée au fait que les ondes progressives en dimension deux, ou sur la branche inférieure en dimension trois, minimisent l'énergie E à moment scalaire p fixé, alors qu'il n'en est rien pour la branche supérieure en dimension trois (cf la partie 3 ci-dessous).

2 Contexte mathématique

L'ensemble des résultats énoncés par C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] a conduit à un certain nombre de travaux mathématiques, qui les ont pour l'essentiel confirmés. Avant de rappeler ces travaux, et d'énoncer les principaux résultats de cet exposé, il est utile de mentionner plusieurs avancées récentes sur l'équation (GP), qui s'appliquent aux dimensions deux et trois que nous considérons dans cette partie.

2.1 L'équation de Gross-Pitaevskii

Rappelons que l'intérêt pour les ondes progressives d'énergie finie provient de leur rôle supposé dans la dynamique en temps long associée à l'équation de Gross-Pitaevskii. Aussi est-il nécessaire de montrer que cette dynamique existe, à savoir que l'équation (GP) est bien posée globalement. P. Gérard [17] a résolu cette question en dimensions deux et trois : le problème de Cauchy associé à l'équation (GP) admet une unique solution globale dans l'espace d'énergie

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) = \{v \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N), \text{ t.q. } E(v) < +\infty\},$$

qui conserve de plus, l'énergie initiale.

Théorème ([17]). *Soit $N = 2$ ou $N = 3$, et Ψ_0 , une fonction de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Il existe une unique solution globale Ψ dans $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{E}(\mathbb{R}^N))$ de l'équation (GP) de donnée initiale Ψ_0 . De plus, cette solution conserve l'énergie de Ginzburg-Landau*

$$E(\Psi(t)) = E(\Psi_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Le problème de Cauchy pour l'équation (GP) est bien posé globalement dans l'espace d'énergie en dimension un (cf le livre de P.E. Zhidkov [43]). En dimension deux ou trois, il est bien posé globalement dans l'espace $\{1\} + H^1(\mathbb{R}^N)$ (cf l'article de F. Béthuel et J.-C. Saut [5]), l'espace de Zhidkov $X^2(\mathbb{R}^2)$ (cf l'article d'O. Goubet [20]), les espaces $\{v\} + H^1(\mathbb{R}^N)$, où v est par exemple, une onde progressive d'énergie finie (cf l'article de C. Gallo [16]). En dimension quatre ou supérieure, l'existence globale de solutions d'énergie petite résulte des travaux de P. Gérard [17], C. Gallo [15], et S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai [28]. Pour plus de détails sur l'étude du problème de Cauchy pour l'équation (GP), nous renvoyons à l'article de revue de P. Gérard [18].

L'existence globale des solutions de l'équation (GP) dans l'espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ permet d'envisager l'étude dynamique des ondes progressives v , qui appartiennent à cet espace, en particulier, l'étude de leur stabilité. Cette étude semble néanmoins requérir un résultat de conservation du moment scalaire p , lequel n'est pas bien défini dans l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Il est par contre bien défini et conservé dans l'espace $\{v\} + H^1(\mathbb{R}^N)$ (cf l'article de C. Gallo [15]), qui offre donc un cadre adapté à l'analyse de la stabilité des ondes progressives. Ce n'est cependant pas la seule difficulté de cette analyse. Aussi est-il naturel d'envisager en premier lieu, l'étude dynamique de solutions particulières plus simples : les solutions constantes de module un.

En dimension trois, P. Gérard [18] a ainsi montré la stabilité des solutions constantes de l'équation (GP) soumises à de petites perturbations dans l'espace d'énergie.

Théorème ([18]). *Soit $N = 3$, et λ , un nombre complexe de module un. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$, tel que, si Ψ_0 est une fonction de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie*

$$d_E(\Psi_0, \lambda) < \delta,$$

alors, la solution Ψ de l'équation (GP) de donnée initiale Ψ_0 vérifie

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(d_E(\Psi(t), \lambda) \right) < \varepsilon.$$

La notation d_E désigne ici une distance sur l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$, définie par l'expression

$$d_E(u, \tilde{u}) = |\mu - \tilde{\mu}| + \|\nabla v - \nabla \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \||v|^2 + 2\operatorname{Re}(v) - |\tilde{v}|^2 - 2\operatorname{Re}(\tilde{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

où $u = \mu(1+v) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{u} = \tilde{\mu}(1+\tilde{v}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$, et μ et $\tilde{\mu}$ sont des nombres complexes de module un.

L'étape suivante dans la compréhension de l'évolution en temps long du flot de l'équation (GP) associée à des données initiales Ψ_0 proche d'une solution constante λ est l'analyse du problème du scattering pour l'équation (GP). Il s'agit de déterminer si les solutions Ψ associées aux données initiales Ψ_0 évoluent en temps long comme les solutions ψ de l'équation linéarisée autour de la constante λ :

$$i\partial_t \psi = \Delta \psi - 2\lambda \langle \lambda, \psi \rangle. \quad (2.1)$$

S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai [28] ont résolu ce problème en toute dimension supérieure ou égale à quatre. En dimensions trois, ils ont construit des solutions dispersives Ψ de l'équation (GP) (cf l'article [29]) : il existe des données initiales Ψ_0 proches d'une solution constante λ telles que les solutions Ψ associées aux données initiales Ψ_0 évoluent en temps long comme les solutions de l'équation (2.1).

Théorème ([29]). *Soit $N = 3$, λ , un nombre complexe de module un, et $\varphi \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Il existe une solution globale $\Psi = \lambda(1 + U\phi_1 + i\phi_2)$ de l'équation (GP) telle que*

$$\phi_1(t) + i\phi_2(t) - \exp(itH)\varphi \longrightarrow 0 \text{ dans } \dot{H}^1(\mathbb{R}^3), \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty,$$

où $U = \sqrt{\frac{-\Delta}{2-\Delta}}$ et $H = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)}$.

Remarque. L'énoncé précédent reprend les notations, et en particulier, les changements de variables, introduits par S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai [29]. La fonction

$$\psi(\cdot, t) = \lambda \left(U \operatorname{Re}(\exp(itH)\varphi(\cdot)) + i \operatorname{Im}(\exp(itH)\varphi(\cdot)) \right),$$

est solution de l'équation (2.1).

Remarque. S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai [29] ont également construit des solutions dispersives Ψ de l'équation (GP) en dimension deux, mais leur comportement asymptotique est plus complexe que celui fourni par l'équation (2.1) (cf l'article de revue de K. Nakanishi [39]).

2.2 Ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii

En dimension deux ou supérieure, plusieurs travaux récents confirment les résultats avancés par C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] sur les ondes progressives pour l'équation (GP). Avant de décrire ces travaux, rappelons que l'équation (OPc) est intégrable en dimension un, de sorte que la plupart des propriétés des ondes progressives sont explicites.

Théorème ([42, 38, 24, 16]). *Soit $N = 1$, $c \geq 0$, et v , une solution d'énergie finie de l'équation (OPc).*

i) Si $c \geq \sqrt{2}$, v est une constante de module un.

ii) Si $0 \leq c < \sqrt{2}$, v est soit identiquement égale à une constante de module un, soit égale, à multiplication par une constante de module un et translation près, à la fonction

$$v_c(x) = \sqrt{1 - \frac{c^2}{2}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{2}x\right) - i\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Lorsque c est différent de 0, la fonction v_c s'écrit également

$$v_c(x) = \sqrt{1 - \frac{2-c^2}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{2}x\right)}} \exp i \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{c} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{2}x\right)\right) - \frac{\pi}{2} \right).$$

Nous ne détaillerons pas les propriétés des ondes progressives en dimension un. Nous renvoyons à l'article de revue [1].

Résultats d'existence

En dimension deux, F. Béthuel et J.-C. Saut [5] ont résolu la question de l'existence d'ondes progressives non constantes d'énergie finie pour des vitesses c petites. Ils ont également établi la présence de vortex à la limite $c \rightarrow 0$.

Théorème ([5]). *Soit $N = 2$. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que l'équation (OPc) a une solution v_c non constante d'énergie finie pour chaque valeur de $c \in]0, c_0[$. De plus, la fonction v_c présente deux vortex de degré ± 1 , situés à une distance équivalente à $\frac{2}{c}$ lorsque $c \rightarrow 0$. Enfin, l'énergie et le moment scalaire de v_c vérifient*

$$E(v_c) \sim 2\pi \ln(c), \text{ et } p(v_c) \sim \frac{2\pi}{c}, \text{ lorsque } c \rightarrow 0.$$

De même, en dimension supérieure ou égale à trois, F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets [4] et D. Chiron [7] ont construit des ondes progressives non constantes d'énergie finie pour des vitesses petites. Elles présentent également des anneaux de vortex à la limite $c \rightarrow 0$.

Théorème ([4, 7]). *Soit $N \geq 3$. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que l'équation (OPc) a une solution v_c non constante d'énergie finie pour chaque valeur de $c \in]0, c_0[$. L'énergie et le moment scalaire de v_c vérifient*

$$E(v_c) \sim \frac{\pi^{\frac{N+1}{2}} (N-1)(N-2)^{N-2} |\ln(c)|^{N-1}}{\Gamma(\frac{N+1}{2}) c^{N-2}}, \text{ et } p(v_c) \sim \frac{\pi^{\frac{N+1}{2}} (N-2)^{N-1} \left(\frac{|\ln(c)|}{c}\right)^{N-1}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})},$$

lorsque $c \rightarrow 0$. De plus, la fonction v_c présente un anneau de vortex, de diamètre équivalent à $\frac{2|\ln(c)|}{c}$ en dimension $N = 3$, lorsque $c \rightarrow 0$.

Résultats de non-existence

En dimension deux ou supérieure, F. Béthuel et J.-C. Saut [5] ont montré la non-existence de solutions stationnaires non constantes de l'équation (OPc) (cf également les articles de C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31]).

Théorème ([5]). *Soit $N \geq 2$. Une onde progressive d'énergie finie et de vitesse $c = 0$ pour l'équation de Gross-Pitaevskii est constante.*

Il n'existe pas non plus d'ondes progressives non constantes, de vitesse supersonique en dimension deux ou supérieure.

Théorème ([22]). *Soit $N \geq 2$. Une onde progressive d'énergie finie et de vitesse $c > \sqrt{2}$ pour l'équation de Gross-Pitaevskii est constante.*

Ce résultat persiste en dimension deux pour les ondes progressives de vitesse sonique.

Théorème ([24]). *Soit $N = 2$. Une onde progressive d'énergie finie et de vitesse $c = \sqrt{2}$ pour l'équation de Gross-Pitaevskii est constante.*

Remarque. À notre connaissance, la question de la non-existence des ondes progressives de vitesse sonique est par contre ouverte en dimension trois ou supérieure.

Enfin, dans le cadre de l'étude des ondes progressives d'énergie petite, É. Tarquini [41] a montré l'existence d'une énergie minimale $\mathcal{E}(N, c) > 0$, qui dépend de la dimension N et de la vitesse c considérées, au dessous de laquelle les seules solutions de l'équation (OPc) de vitesse c sont les solutions constantes.

Théorème ([41]). *Soit $N \geq 2$ et $0 < c < \sqrt{2}$. Il existe une constante $\mathcal{E}(N, c) > 0$ telle que toutes les solutions v d'énergie finie de l'équation (OPc) qui vérifient*

$$E(v) \leq \mathcal{E}(N, c),$$

sont constantes.

La non-existence d'ondes progressives d'énergie petite est un indice qui plaide en faveur du scattering des solutions petites. En effet, les ondes progressives n'évoluent pas comme l'équation linéarisée (2.1) en temps grand, de sorte que leur existence compromet la possibilité d'un scattering des solutions petites. Cependant, le résultat d'É. Tarquini [41] n'empêche pas l'existence d'ondes progressives d'énergie aussi petite que possible. La valeur minimale de l'énergie $\mathcal{E}(N, c)$ satisfait en effet la relation

$$\mathcal{E}(N, c) \rightarrow 0, \text{ lorsque } c \rightarrow \sqrt{2},$$

de sorte qu'il peut exister des ondes progressives non constantes d'énergie très petite lorsque leur vitesse c est suffisamment proche de la vitesse du son $\sqrt{2}$ (cf les théorèmes 2 et 4 ci-dessous).

Propriétés qualitatives

Sur le plan qualitatif, A. Farina [14] a calculé une borne a priori sur le module des solutions subsoniques de l'équation (OPc). Cette borne a l'avantage d'être explicite, et de ne dépendre que de la vitesse de la solution considérée.

Théorème ([14]). *Soit $N \geq 1$ et $c \in \mathbb{R}$. Si v est une solution d'énergie finie de l'équation (OPc), alors,*

$$|v| \leq \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}. \quad (2.2)$$

La borne (2.2) se déduit des propriétés elliptiques de l'équation (OPc). Ces propriétés fournissent des bornes similaires pour les dérivées de toute solution de l'équation (OPc). S'en déduit la compacité locale des suites de solutions de l'équation (OPc), qui intervient de manière essentielle dans la construction de ces solutions (cf le paragraphe 4.2 ci-dessous).

Un autre argument important dans la construction de solutions de l'équation (OPc) est l'étude de leur comportement à l'infini : leur décroissance à l'infini fournit la compacité forte des suites de solutions de l'équation (OPc), une fois établie leur compacité locale (cf le paragraphe 4.2 ci-dessous).

Avant d'étudier l'éventuelle décroissance des solutions v de l'équation (OPc), il est nécessaire de calculer leur limite à l'infini. Le caractère fini de l'énergie $E(v)$ indique que le module $|v|$ de ces solutions tend vers 1 à l'infini. L'existence d'une limite à l'infini pour la phase de v n'est pas aussi immédiate. En dimension deux, F. Béthuel et J.-C. Saut [5] ont néanmoins justifié l'existence d'une limite à l'infini des ondes progressives subsoniques.

Théorème ([5]). *Soit $N = 2$ et $0 < c < \sqrt{2}$. Si v est une onde progressive d'énergie finie et de vitesse c pour l'équation de Gross-Pitaevskii, alors, il existe un nombre complexe λ_∞ de module un, tel que*

$$v(x) \rightarrow \lambda_\infty, \text{ lorsque } |x| \rightarrow +\infty.$$

Ce résultat demeure valable en toute dimension supérieure ou égale à trois, ainsi que pour des ondes progressives de vitesse sonique.

Théorème ([21, 24]). *Soit $N \geq 3$ et $0 < c \leq \sqrt{2}$. Si v est une onde progressive d'énergie finie et de vitesse c pour l'équation de Gross-Pitaevskii, alors, il existe un nombre complexe λ_∞ de module un, tel que*

$$v(x) \rightarrow \lambda_\infty, \text{ lorsque } |x| \rightarrow +\infty.$$

Quitte à multiplier l'onde progressive v par un nombre complexe de module un, nous pouvons supposer que la constante λ_∞ est égale à 1. Le comportement asymptotique de la solution v est alors donné par le théorème suivant.

Théorème ([23, 25, 26]). *Soit $N \geq 2$ et $0 < c < \sqrt{2}$. Si v est une onde progressive d'énergie finie et de vitesse c pour l'équation de Gross-Pitaevskii, alors, il existe une fonction v_∞ définie sur la sphère \mathbb{S}^{N-1} et à valeurs réelles telle que*

$$|x|^{N-1} \left(v(x) - 1 \right) - i v_\infty \left(\frac{x}{|x|} \right) \rightarrow 0, \text{ lorsque } |x| \rightarrow +\infty. \quad (2.3)$$

De plus, il existe des constantes $\alpha, \beta_2, \dots, \beta_N$ telles que la fonction v_∞ est égale à

$$v_\infty(\sigma) = \alpha \frac{\sigma_1}{\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^2 \sigma_1^2}{2}\right)^{\frac{N}{2}}} + \sum_{j=2}^N \beta_j \frac{\sigma_j}{\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^2 \sigma_1^2}{2}\right)^{\frac{N}{2}}}, \forall \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \mathbb{S}^{N-1}. \quad (2.4)$$

Les constantes α et β_j sont données par les relations

$$\alpha = \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{2\pi^{\frac{N}{2}}} \left(1 - \frac{c^2}{2}\right)^{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{4-N}{2}cE(v) + \left(2 + \frac{N-3}{2}c^2\right)p(v)\right), \quad (2.5)$$

$$\beta_j = \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\pi^{\frac{N}{2}}} \left(1 - \frac{c^2}{2}\right)^{\frac{N-1}{2}} P_j(v), \quad (2.6)$$

où $P_j(v)$ désigne la $j^{\text{ième}}$ composante du moment $P(v)$.

Ce théorème confirme et précise les formules (1.7), (1.8), (1.9) et (1.10), lesquelles ne traitent que le cas d'ondes progressives à symétrie axiale autour de l'axe x_1 . Il est de plus optimal. En effet, par les résultats de F. Béthuel et J.-C. Saut [5] en dimension deux, et de F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets [4] et D. Chiron [7] en dimension trois, il existe en toute dimension supérieure ou égale à deux des ondes progressives non constantes d'énergie finie à symétrie axiale autour de l'axe x_1 (cf également les théorèmes 2, 3 et 7 ci-dessous). La constante α associée à de telles ondes est non nulle, les constantes β_j étant nulles (cf l'article [25]). Le comportement asymptotique d'une telle onde progressive est donc exactement donné par les formules (2.3), (2.4) et (2.5).

3 Principaux résultats

Les résultats démontrés dans l'article [3] concernent l'existence d'ondes progressives non constantes d'énergie finie en dimensions deux et trois. Nous construisons ces ondes progressives par un argument variationnel qui consiste à minimiser l'énergie de Ginzburg-Landau E sous la contrainte d'un moment scalaire p fixé. Pour être plus précis, nous considérons le problème (\mathcal{P}_p) suivant

$$E_{\min}(p) = \inf \left\{ E(v), v \in W(\mathbb{R}^N), p(v) = p \right\}, \quad (\mathcal{P}_p)$$

où p est un réel positif fixé, et $W(\mathbb{R}^N)$, un espace fonctionnel bien choisi. Une solution u_p de ce problème est une onde progressive d'énergie $E(u_p) = E_{\min}(p)$ finie, pour l'équation (GP). Elle n'est pas constante dès que p est différent de 0, puisque son moment scalaire est alors non nul. La vitesse $c = c(u_p)$ de cette onde progressive est le multiplicateur de Lagrange de l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème (\mathcal{P}_p) , qui est l'équation (OPc). Il est difficile de contrôler avec précision ce multiplicateur, de sorte qu'il n'est pas possible de construire des ondes progressives de vitesse c fixée. Nous construisons par contre des ondes progressives v de moment scalaire $p(v)$ fixé, ce qui revient à paramétriser les ondes progressives par leur moment scalaire au lieu de leur vitesse, dans l'esprit des tracés de C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31].

Le choix de l'espace fonctionnel $W(\mathbb{R}^N)$ n'est pas immédiat, et doit répondre à au moins deux exigences. Les ondes progressives u_p , solutions de ce problème, doivent appartenir à cet espace. Il faut également que l'énergie de Ginzburg-Landau et le moment scalaire soient bien définis sur cet espace, et que leurs définitions soient compatibles avec les méthodes de calcul des variations qui seront mises en oeuvre afin de résoudre le problème de minimisation (\mathcal{P}_p) . Ces deux impératifs conduisent au choix de l'espace $W(\mathbb{R}^N) = \{1\} + V(\mathbb{R}^N)$, où

$$V(\mathbb{R}^N) = \{v : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{C}, \text{ t.q. } (\nabla v, \text{Re}(v)) \in L^2(\mathbb{R}^N)^2, \text{Im}(v) \in L^4(\mathbb{R}^N), \text{ et } \nabla \text{Re}(v) \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^N)\}.$$

Les solutions d'énergie finie de l'équation (OPc) appartiennent toutes à l'espace $W(\mathbb{R}^N)$ en raison de leur décroissance à l'infini. De plus, l'énergie de Ginzburg-Landau E , définie par l'identité (1.1), et le moment scalaire p , donné par

$$p(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle i\partial_1 v, v - 1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\partial_1(\text{Re}(v))\text{Im}(v) - \partial_1(\text{Im}(v))(\text{Re}(v) - 1) \right), \quad (3.1)$$

sont bien définies, et de classe \mathcal{C}^1 sur l'espace $W(\mathbb{R}^N)$, de sorte que le problème (\mathcal{P}_p) est bien posé, et que les solutions de ce problème sont bien des ondes progressives u_p d'énergie finie pour l'équation (GP).

La résolution du problème (\mathcal{P}_p) se fait en deux étapes : l'analyse a priori des propriétés de la courbe minimisante $p \mapsto E_{\min}(p)$, puis la preuve de l'existence de minimiseurs u_p (lorsque p vérifie certaines conditions en dimension trois). Les principales propriétés de la courbe minimisante sont les suivantes.

Théorème 1 ([3]). *Soit $N = 2$ ou $N = 3$.*

i) La courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est strictement croissante, concave, lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ (avec une constante de Lipschitz égale à $\sqrt{2}$), et tend vers $+\infty$, lorsque p tend vers $+\infty$. Elle vérifie en particulier l'inégalité

$$E_{\min}(p) \leq \sqrt{2}p, \quad \forall p \geq 0. \quad (3.2)$$

ii) L'inégalité (3.2) est stricte en dimension deux pour tout réel $p > 0$. La courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est alors strictement concave.

iii) En dimension trois, il existe un réel $p_0 > 0$ tel que

$$E(p) = \sqrt{2}p, \quad \forall 0 \leq p \leq p_0.$$

Lorsque $p > p_0$, l'inégalité (3.2) devient stricte, et la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est strictement concave.

Les propriétés de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ permettent de résoudre le problème de minimisation (\mathcal{P}_p) pour toute valeur $p > 0$ en dimension deux, et d'obtenir ainsi des solutions non constantes d'énergie finie de l'équation (OPc).

Théorème 2 ([3]). *Soit $N = 2$ et $p > 0$. Il existe une solution $u_p \in W(\mathbb{R}^2)$ du problème de minimisation*

$$E(u_p) = E_{\min}(p) = \inf \left\{ E(v), v \in W(\mathbb{R}^2), p(v) = p \right\}.$$

La fonction u_p est une solution non constante d'énergie finie et de moment scalaire $p(u_p) = p$ de l'équation (OPc) pour une vitesse $c = c(u_p) \in]0, \sqrt{2}[$.

En dimension trois, les propriétés de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ énoncées dans le théorème 1 conduisent à un théorème d'existence quelque peu différent.

Théorème 3 ([3]). *Soit $N = 3$, et p_0 , la constante positive du théorème 1.*

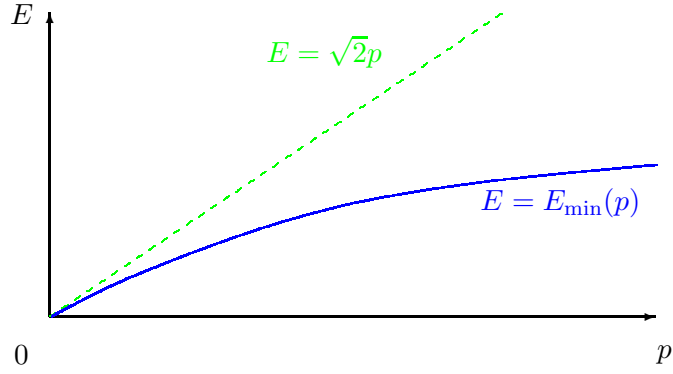
i) Lorsque $0 < p < p_0$, le problème de minimisation (\mathcal{P}_p) n'a pas de solutions dans l'espace $W(\mathbb{R}^3)$.

ii) Lorsque $p \geq p_0$, il existe une solution $u_p \in W(\mathbb{R}^3)$ du problème de minimisation

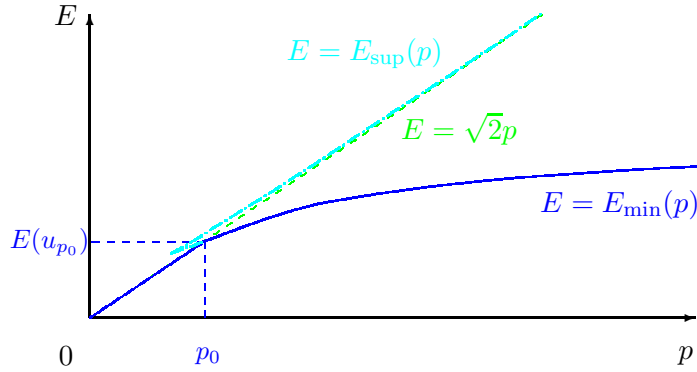
$$E(u_p) = E_{\min}(p) = \inf \left\{ E(v), v \in W(\mathbb{R}^3), p(v) = p \right\}.$$

La fonction u_p est une solution non constante d'énergie finie et de moment scalaire $p(u_p) = p$ de l'équation (OPc) pour une vitesse $c = c(u_p) \in]0, \sqrt{2}[$.

Les théorèmes d'existence 2 et 3 complètent les résultats obtenus au préalable par F. Béthuel et J.-C. Saut [5] en dimension deux, F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets [4] et D. Chiron [7] en dimension trois. Les théorèmes 1 et 2 fournissent la courbe suivante d'ondes progressives en dimension deux.



Les théorèmes 1 et 3 fournissent le schéma suivant en dimension trois.



Sur ces deux schémas, la courbe bleue royale représente la courbe minimisante $p \mapsto E_{\min}(p)$. Dans sa partie strictement concave, chaque point de la courbe correspond à une onde progressive u_p non constante, d'énergie finie et de vitesse $c = c(u_p)$, pour l'équation (GP). Lorsque la courbe est différentiable, la vitesse c est égale à la pente de la courbe. Cependant, le fait de savoir si la courbe est différentiable en tout point (elle l'est a priori, sauf en un ensemble au plus dénombrable de points) reste un problème ouvert, de sorte que la question de savoir s'il existe des solutions non constantes d'énergie finie de (OPc) pour toute vitesse $c \in]0, \sqrt{2}[$ est également ouverte.

Les théorèmes d'existence 2 et 3 confirment les résultats de C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31]. En dimension trois, ces derniers affirment en outre que la branche de solutions peut être prolongée au point p_0 à travers la droite $E = \sqrt{2}p$. Sa représentation dans le plan énergie-moment bifurque en un certain point $0 < p_r < p_0$, puis est asymptotique à la droite $E = \sqrt{2}p$ (cf la courbe E_{sup} ci-dessus). L'existence de cette branche supérieure demeure également ouverte. L'argument de minimisation sous contrainte utilisé ici ne peut fonctionner pour construire cette branche supérieure, puisque les ondes progressives sur cette branche ne minimisent pas l'énergie E à moment scalaire p fixé.

Les théorèmes précédents sont complétés par la preuve de la non-existence d'ondes progressives non constantes d'énergie petite en dimension trois, qui améliore le résultat d'É. Tarquini [41].

Théorème 4 ([3]). *Soit $N = 3$. Il existe une constante universelle $\mathcal{E} > 0$ telle que toute solution v de l'équation (OPc) qui vérifie*

$$E(v) \leq \mathcal{E},$$

est constante.

En dimension deux, il existe au contraire des ondes progressives u_p non constantes d'énergie petite, puisque

$$E(u_p) = E_{\min}(u_p) \leq \sqrt{2}p \rightarrow 0, \text{ lorsque } p \rightarrow 0,$$

par l'inégalité (3.2). Ces ondes progressives d'énergie petite correspondent à la limite transsonique, comme le montre l'inégalité (3.4) du théorème suivant, de sorte qu'il est possible d'affiner leur description grâce aux changements d'échelles (1.5), et aux résultats d'A. de Bouard et J.-C. Saut [11, 12, 13], qui décrivent les ondes solitaires pour l'équation (KPI).

Théorème 5 ([3]). *Soit $N = 2$.*

i) Il existe des constantes $p_1 > 0$, K_0 et K_1 telles que

$$\frac{48\sqrt{2}}{\mathcal{S}_{KP}^2} p^3 - K_0 p^4 \leq \sqrt{2}p - E_{\min}(p) \leq K_1 p^3, \quad \forall 0 \leq p \leq p_1,$$

où \mathcal{S}_{KP} désigne l'action

$$S(N) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_1 N)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_1^{-1}(\partial_2 N))^2 - \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}^2} N^3 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} N^2, \quad (3.3)$$

d'un état fondamental N de vitesse 1 pour l'équation (KPI) ¹.

ii) Soit u_p , un minimiseur du problème (\mathcal{P}_p) construit dans le théorème 2. Il existe des constantes $p_2 > 0$, $K_2 > 0$ et $K_3 > 0$ telles que

$$K_2 p^2 \leq \sqrt{2} - c(u_p) \leq K_3 p^2, \quad \forall 0 \leq p < p_2. \quad (3.4)$$

De plus, la fonction u_p vérifie l'inégalité $|u_p| \geq \frac{1}{2}$, de sorte qu'elle s'écrit $u_p = \varrho_p \exp i\varphi_p$, avec les estimations

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \varrho_p|^2 + |\partial_2 u_p|^2) + \left| \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \varrho_p^2) |\nabla \varphi_p|^2 \right| \leq K p^3,$$

et

$$|u_p(0)| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} |u_p(x)| \leq 1 - K p^2,$$

où K est une constante universelle.

Le théorème 4 plaide en faveur du scattering des solutions petites de l'équation (GP) en dimension trois, tandis que le théorème 5 s'y oppose en dimension deux, puisque les ondes progressives n'évoluent pas comme l'équation linéarisée (2.1). Le théorème 4 n'est cependant qu'un indice du scattering en dimension trois, et ce délicat problème est, à notre connaissance, toujours ouvert (cf l'article de revue de K. Nakanishi [39]).

En guise de conclusion, signalons deux autres propriétés qualitatives des ondes progressives u_p des théorèmes 2 et 3. Ces ondes, comme toutes les solutions d'énergie finie de l'équation (OPc), sont réelles analytiques : leurs parties réelles et imaginaires se prolongent en des fonctions analytiques à N variables.

Théorème 6 ([3]). *Soit $N \geq 2$ et $0 < c < \sqrt{2}$. Une onde progressive de vitesse c est réelle analytique sur \mathbb{R}^N .*

Cette propriété découle du caractère elliptique de l'équation (OPc) lorsque $0 < c < \sqrt{2}$. Elle permet de montrer la symétrie axiale des ondes progressives minimisantes u_p construites dans les théorèmes 2 et 3.

Théorème 7 ([3]). *Soit $N = 2$ ou $N = 3$, et $p \geq 0$. Si u_p est une solution du problème (\mathcal{P}_p) , alors, la fonction u_p est, à translation près, à symétrie axiale autour de l'axe x_1 : il existe une fonction U_p , définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et à valeurs complexes, telle que*

$$u_p(x_1, x_\perp) = U_p(x_1, |x_\perp|), \quad \forall x = (x_1, x_\perp) = (x_1, \dots, x_N).$$

¹Un état fondamental N de vitesse 1 pour l'équation (KPI) est une solution non constante de l'équation (1.6) qui minimise l'action S parmi toutes les solutions non constantes de l'équation (1.6).

4 Quelques idées des preuves

Afin de compléter cet exposé, nous décrivons maintenant quelques idées des preuves des principaux résultats mentionnés ci-dessus, à savoir des théorèmes 1, 2, 3 et 4. Nous renvoyons à l'article [3] pour les détails techniques, ainsi que pour les démonstrations des théorèmes 5, 6 et 7.

Rappelons qu'il s'agit de résoudre le problème de minimisation (\mathcal{P}_p) pour tout nombre strictement positif p fixé. Pour $p = 0$, le problème (\mathcal{P}_p) a pour valeur $E_{\min}(0) = 0$, et l'unique minimiseur est la fonction constante égale à 1. La résolution de ce problème se décompose en deux parties. Nous énonçons d'abord un certain nombre de propriétés a priori de la courbe minimisante $p \mapsto E_{\min}(p)$, qui découlent de la construction de fonctions tests pour le problème (\mathcal{P}_p) , et sont consignées dans le théorème 1. Les propriétés obtenues, en particulier la sous-additivité de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$, permettent ensuite de construire des minimiseurs u_p du problème (\mathcal{P}_p) grâce à des arguments de compacité, ce qui conduit aux théorèmes 2 et 3.

4.1 Propriétés de la courbe minimisante

Nous commençons par les principales propriétés de la courbe minimisante : la borne (3.2), le caractère lipschitzien de la courbe, sa concavité, sa monotonie, sa sous-additivité, ses limites lorsque $p \rightarrow 0$, et lorsque $p \rightarrow +\infty$.

Réduction du problème (\mathcal{P}_p)

Ces propriétés découlent de la construction de fonctions tests pour le problème (\mathcal{P}_p) . Afin de faciliter ces constructions, il est utile de ramener le problème (\mathcal{P}_p) au problème de minimisation

$$E_{\min}(p) = \inf \left\{ E(v), v - 1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), p(v) = p \right\}, \quad (4.1)$$

grâce à la densité de l'espace $\{1\} + \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans l'espace $W(\mathbb{R}^N)$. Cette réduction, en particulier le support compact des fonctions à construire, présente certains avantages, qui simplifient par exemple la preuve ci-dessous du caractère lipschitzien de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$.

Calcul d'une borne supérieure

La première étape de la résolution d'un problème de minimisation sous contrainte tel que le problème (\mathcal{P}_p) consiste à relier les deux quantités intégrales qui jouent un rôle dans ce problème, l'énergie de Ginzburg-Landau E et le moment scalaire p , afin d'obtenir une estimation de la quantité $E_{\min}(p)$.

Ce lien n'est pas apparent sous les formes (1.1) et (3.1) de l'énergie et du moment scalaire, essentiellement parce que l'énergie $E(v)$ ne contrôle que la différence $|v| - 1$, et non pas la fonction $v - 1$. Une solution pour faire apparaître ce lien est de considérer des fonctions v qui ne s'annulent pas sur \mathbb{R}^N , et qu'il est donc possible de relever sous la forme

$$v = \varrho \exp i\varphi,$$

où $\varrho = |v|$ et φ sont des fonctions définies sur \mathbb{R}^N et à valeurs réelles. Dans les variables ϱ et φ , les expressions de l'énergie et du moment scalaire s'écrivent

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varrho|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^2 |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - |\varrho|^2)^2, \text{ et } p(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \varrho^2) \partial_1 \varphi. \quad (4.2)$$

En particulier, lorsque la fonction v vérifie

$$|v| \geq \delta, \quad (4.3)$$

pour un réel strictement positif δ donné, le moment scalaire vérifie

$$|p(v)| \leq \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |1 - \varrho^2| |\partial_1 \varphi|, \quad (4.4)$$

de sorte que par l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$|p(v)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\delta} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^2 |\partial_1 \varphi|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - |\varrho|^2)^2 \right). \quad (4.5)$$

Par les formules (4.2), il s'ensuit que

$$|p(v)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\delta} E(v). \quad (4.6)$$

Cette majoration ne convient pas pour évaluer la valeur de $E_{\min}(p)$, qui consiste à estimer l'énergie $E(v)$ en fonction du moment $p(v)$, et non le contraire. Néanmoins, lorsque cette inégalité est proche d'une égalité, et lorsque δ est proche de 1, il vient

$$E(v) \simeq \sqrt{2}p(v),$$

ce qui conduit à la borne supérieure (3.2), lorsque $p(v) = p$.

Pour démontrer la borne (3.2), il s'agit donc de construire des fonctions v qui vérifient la condition (4.3) pour δ proche de 1, et telles que les inégalités (4.4), (4.5), et finalement (4.6), soient presque des égalités. Des changements d'échelles semblables au changement d'échelles (1.5) fournissent cette construction. Considérons en effet une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, un entier n , et deux réels strictement positifs μ et α à déterminer, et posons

$$v_n(x_1, x_\perp) = \varrho_n(x_1, x_\perp) \exp i\varphi_n(x_1, x_\perp) = \left(1 - \frac{\mu}{n} \partial_1 \psi \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_\perp}{n^\alpha} \right) \right) \exp i \left(\sqrt{2}\mu \psi \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_\perp}{n^\alpha} \right) \right).$$

La fonction v_n appartient à l'espace $\{1\} + \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, et vérifie la condition (4.3) pour δ proche de 1, lorsque n tend vers $+\infty$. De plus,

$$\sqrt{2}\partial_1 \varphi_n(x_1, x_\perp) \simeq 1 - \varrho_n(x_1, x_\perp)^2,$$

à la limite $n \rightarrow +\infty$, de sorte que l'inégalité (4.5) est presque une égalité, tandis que pour $\alpha > 1$, les termes transverses qui apparaissent dans l'énergie sont négligeables. Il suffit donc de choisir μ de manière à ce que

$$p(v_n) = p,$$

pour obtenir

$$E(v_n) \rightarrow \sqrt{2}p,$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci conclut la preuve de la borne (3.2).

La construction précédente fournit également le caractère lipschitzien de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$. Considérons en effet deux valeurs p et q telles que $q > p$, et un réel strictement positif ε fixé. D'après l'identité (4.1), il existe une fonction w_1 à support compact, telle que

$$E(1 + w_1) \leq E_{\min}(p) + \varepsilon, \text{ et } p(1 + w_1) = p.$$

D'après la construction des fonctions v_n ci-dessus, il existe une autre fonction w_2 , toujours à support compact, telle que

$$E(1 + w_2) \leq \sqrt{2}(q - p) + \varepsilon, \text{ et } p(1 + w_2) = q - p.$$

Quitte à traduire, nous pouvons de plus supposer que les supports de w_1 et de w_2 sont disjoints, de sorte que la fonction $w = 1 + w_1 + w_2$ vérifie

$$E(w) = E(1 + w_1) + E(1 + w_2) \leq E_{\min}(p) + \sqrt{2}(q - p) + 2\varepsilon, \text{ et } p(w) = p(1 + w_1) + p(1 + w_2) = q.$$

Il s'ensuit que

$$E_{\min}(q) \leq E(w) \leq E_{\min}(p) + \sqrt{2}(q - p) + 2\varepsilon,$$

ce qui s'écrit

$$E_{\min}(q) \leq E_{\min}(p) + \sqrt{2}(q - p),$$

à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Le même argument permet d'affirmer qu'en fait,

$$|E_{\min}(q) - E_{\min}(p)| \leq \sqrt{2}|q - p|,$$

de sorte que la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est $\sqrt{2}$ -lipschitzienne, donc continue.

Concavité par symétrisation

Il s'agit maintenant d'établir la concavité de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$. Comme cette courbe est continue, il suffit de montrer que

$$\frac{E_{\min}(p) + E_{\min}(q)}{2} \leq E_{\min}\left(\frac{p + q}{2}\right). \quad (4.7)$$

Cette inégalité se déduit d'un argument de symétrisation basé sur une idée d'O. Lopes [36]. Considérons un réel strictement positif ε , et une fonction v telle que

$$E(v) \leq E_{\min}\left(\frac{p + q}{2}\right) + \varepsilon, \text{ et } p(v) = \frac{p + q}{2}.$$

Puisque la quantité $\langle i\partial_1 v, v - 1 \rangle$ est intégrable, la relation de Chasles implique l'existence d'un nombre réel α tel que

$$\frac{1}{2} \int_{\{x_N \geq \alpha\}} \langle i\partial_1 v, v - 1 \rangle = \frac{p}{2}, \text{ et } \frac{1}{2} \int_{\{x_N < \alpha\}} \langle i\partial_1 v, v - 1 \rangle = \frac{q}{2}.$$

Ces relations permettent de construire par réflexion par rapport à l'hyperplan d'équation $x_n = \alpha$, deux fonctions v^+ et v^- , de moments respectifs p et q , et d'énergie totale égale à $E(v^+) + E(v^-) = 2E(v)$, qui peuvent servir de fonctions tests pour le problème (\mathcal{P}_p) . Pour être plus précis, si nous notons

$$\begin{aligned} v^+(x_1, \dots, x_N) &= v(x_1, \dots, x_N) \text{ si } x_N \geq \alpha, \\ v^+(x_1, \dots, x_N) &= v(x_1, \dots, 2\alpha - x_N) \text{ si } x_N \leq \alpha, \end{aligned}$$

respectivement

$$\begin{aligned} v^-(x_1, \dots, x_N) &= v(x_1, \dots, x_N) \text{ si } x_N \leq \alpha, \\ v^-(x_1, \dots, x_N) &= v(x_1, \dots, 2\alpha - x_N) \text{ si } x_N \geq \alpha, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$p(v^+) = p, \text{ et } p(v^-) = q,$$

de sorte que

$$E_{\min}(p) + E_{\min}(q) \leq E(v^+) + E(v^-). \quad (4.8)$$

Comme

$$E(v^+) + E(v^-) = 2E(v) \leq 2E_{\min}\left(\frac{p + q}{2}\right) + 2\varepsilon,$$

l'inégalité (4.7) se déduit de la relation (4.8) par un passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

La courbe minimisante $p \mapsto E_{\min}(p)$ est donc concave sur \mathbb{R}_+ , et comme elle est également positive, elle est nécessairement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Sous-additivité et existence de minimiseurs

La sous-additivité de la courbe minimisante est une autre conséquence de sa concavité. Considérons en effet des nombres réels positifs p_1, \dots, p_ℓ tels que

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k = p.$$

Puisque $E_{\min}(0) = 0$, et que la fonction $p \mapsto E_{\min}(p)$ est concave, nous avons

$$E_{\min}(p_k) \geq \frac{p_k}{p} E_{\min}(p).$$

La sommation de cette inégalité sur tous les indices k entraîne la sous-additivité de la fonction $p \mapsto E_{\min}(p)$, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^{\ell} E_{\min}(p_k) \geq E_{\min}(p). \quad (4.9)$$

Cette inégalité, lorsqu'elle est stricte, joue un rôle primordial dans l'argument de concentration-compacité qui permet de construire les minimiseurs u_p des théorèmes 2 et 3.

Au contraire, lorsque $\ell \geq 2$, et lorsque l'inégalité (4.9) est une égalité, la courbe minimisante est affine sur l'intervalle $]0, p[$, de sorte que le problème de minimisation (\mathcal{P}_p) n'est pas atteint pour toute valeur q dans l'intervalle $]0, p[$. Supposons en effet qu'il existe une fonction u_q telle que

$$E(u_q) = E_{\min}(q), \text{ et } p(u_q) = q,$$

et reprenons l'argument de symétrisation précédent. Si s est un nombre réel tel que $|s| < \min\{|q|, |p - q|\}$, il existe un nombre α_s tel que

$$\frac{1}{2} \int_{\{x_N \geq \alpha_s\}} \langle i\partial_1 u_q, u_q - 1 \rangle = \frac{q + s}{2}, \text{ et } \frac{1}{2} \int_{\{x_N < \alpha_s\}} \langle i\partial_1 u_q, u_q - 1 \rangle = \frac{q - s}{2}.$$

Les fonctions u_q^+ et u_q^- , construites par réflexion de la fonction u_q par rapport à l'hyperplan d'équation $x_n = \alpha_s$, vérifient

$$p(u_q^+) = q + s, \text{ et } p(u_q^-) = q - s,$$

de sorte que

$$E_{\min}(q + s) + E_{\min}(q - s) \leq E(u_q^+) + E(u_q^-) = 2E(u_q) = 2E_{\min}(q). \quad (4.10)$$

Comme la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est affine entre 0 et p , il vient

$$E_{\min}(q + s) + E_{\min}(q - s) = 2E_{\min}(q),$$

de sorte que l'inégalité (4.10) est une égalité. Les fonctions u_q^+ et u_q^- sont donc des minimiseurs du problème (\mathcal{P}_p) , c'est-à-dire des solutions de l'équation (OPc) pour un multiplicateur de Lagrange c donné. En particulier, ce sont des fonctions régulières : leur symétrie par rapport à l'hyperplan d'équation $x_n = \alpha_s$ implique que

$$\partial_N u_q = \partial_N u_q^+ = \partial_N u_q^- = 0,$$

sur l'hyperplan d'équation $x_n = \alpha_s$. Cette propriété reste vraie pour tout un intervalle de valeurs de s , c'est-à-dire pour tout un intervalle de valeurs de α_s . Comme la fonction u_q est réelle analytique sur \mathbb{R}^N , ce n'est possible que si u_q est identiquement constante sur \mathbb{R}^N , ce qui est contradictoire avec le fait que $p(u_q) = q \neq 0$. En conclusion, lorsque $\ell \geq 2$, et lorsque l'inégalité (4.9) est une égalité, le problème de minimisation (\mathcal{P}_p) n'a pas de solutions quelle que soit la valeur q dans l'intervalle $]0, p[$.

Borne supérieure pour des moments petits en dimension deux

Par le raisonnement précédent, l'existence de minimiseurs pour le problème (\mathcal{P}_p) est lié au caractère strict de l'inégalité de sous-additivité (4.9), qui est lui-même lié à la stricte concavité de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$. L'énoncé du théorème 1 souligne que cette stricte concavité découle du signe de la quantité $\Sigma(p) = \sqrt{2}p - E_{\min}(p)$: la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est strictement concave lorsque la quantité $\Sigma(p)$, qui est positive par l'inégalité (3.2), ne s'annule pas. Avant d'envisager la construction variationnelle de solutions u_p du problème (\mathcal{P}_p) , il est donc important de savoir quelles sont les valeurs de p pour lesquelles $\Sigma(p)$ s'annule.

En dimension deux, cette question se résout grâce au changement d'échelles fourni par la limite transsonique. A. de Bouard et J.-C. Saut [12, 11] ont en effet montré l'existence d'ondes solitaires N pour l'équation (KPI). Ils ont construit ces ondes solitaires comme des minimiseurs du hamiltonien associé à l'équation (KPI),

$$E_{KP}(N) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_1 N)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_1^{-1}(\partial_2 N))^2 - \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}^2} N^3,$$

sous la contrainte d'une norme L^2 fixée. Ces minimiseurs N sont des états fondamentaux pour l'équation (1.6). Au changement d'échelles (1.5) près, les ondes progressives u_p pour l'équation (GP) sont supposées converger vers ces états fondamentaux N . Il suffit donc de considérer le changement d'échelles inverse de (1.5), c'est-à-dire

$$w_{\varepsilon,t}(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{t\varepsilon^2}{2} N\left(\varepsilon x_1, \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} x_2\right) \right) \exp\left(i \frac{t\varepsilon}{\sqrt{2}} \partial_1^{-1} N\left(\varepsilon x_1, \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} x_2\right)\right), \quad (4.11)$$

à partir d'un état fondamental N pour avoir une bonne approximation des ondes progressives u_p à la limite transsonique, c'est-à-dire pour p tendant vers 0. Les paramètres t et ε permettent ici d'ajuster la construction de sorte que

$$p(w_{\varepsilon,t}) = p.$$

Cette construction fournit alors l'estimation

$$E_{\min}(p) \leq \sqrt{2}p - \frac{48\sqrt{2}}{\mathcal{S}_{KP}^2} p^3 + \mathcal{O}(p^4), \quad (4.12)$$

à la limite $p \rightarrow 0$, dans laquelle \mathcal{S}_{KP} désigne l'action, définie par la formule (3.3), d'un état fondamental de l'équation (KPI).

L'inégalité (4.12) et les propriétés précédentes de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ implique que la quantité $\Sigma(p)$ est strictement positive en dimension deux, de sorte que la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est strictement concave (cf les arguments variationnels du paragraphe 4.2).

Estimations pour des moments grands

Cette propriété n'est plus vraie en dimension trois, mais l'asymptote calculée par F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets [4],

$$E_{\min}(p) \sim \pi\sqrt{p} \ln(p), \quad (4.13)$$

lorsque $p \rightarrow +\infty$, permet de montrer l'existence d'un nombre réel positif p_0 tel que la quantité $\Sigma(p)$ est strictement positive pour tout $p > p_0$.

Pour conclure quant à l'étude des propriétés de la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$, remarquons que les résultats de F. Béthuel et J.-C. Saut [5] conduisent à l'asymptote

$$E_{\min}(p) \sim 2\pi \ln(p), \quad (4.14)$$

lorsque $p \rightarrow +\infty$, en dimension deux. Il résulte en particulier des asymptotes (4.13) et (4.14) que la courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est strictement croissante en dimensions deux et trois, ce qui achève l'esquisse de la preuve du théorème 1.

4.2 Construction des minimiseurs u_p

Nous passons maintenant à la construction de minimiseurs u_p pour le problème (\mathcal{P}_p) . La méthode la plus simple pour les construire consiste à considérer une suite minimisante pour le problème (\mathcal{P}_p) , et à montrer sa convergence vers un minimiseur par un argument de compacité. Cet argument de compacité pose malheureusement problème. En raison d'un certain manque de régularité, il ne semble pas clair que même une suite de Palais-Smale pour le problème (\mathcal{P}_p) converge fortement, à une sous-suite près, vers un minimiseur u_p du problème (\mathcal{P}_p) .

Minimiseurs u_p^n sur le tore \mathbb{T}^n

Une solution pour pallier cette difficulté consiste à compactifier le problème. Au lieu de considérer le problème de minimisation dans tout l'espace \mathbb{R}^N , nous considérons les problèmes de minimisation

$$E_{\min}^n(p) = \inf \left\{ E(v) = \int_{\mathbb{T}^n} e(v), v \in H^1(\mathbb{T}^n), p(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^n} \langle i\partial_1 v, v - 1 \rangle = p \right\},$$

définies pour des fonctions v , $2\pi n$ -périodiques sur le tore \mathbb{T}^n identifié à l'hypercube $(-\pi n, \pi n)^N$. Grâce au théorème de compacité de Rellich, et à la semi-continuité inférieure de l'énergie E sur l'espace $H^1(\mathbb{T}^n)$, l'existence de solutions u_p^n , qui vérifient

$$ic_p^n \partial_1 u_p^n + \Delta u_p^n + u_p^n(1 - |u_p^n|^2) = 0, \quad (4.15)$$

ne pose plus de difficultés. Le problème est maintenant de passer à la limite $n \rightarrow +\infty$. Il s'agit donc de borner les solutions u_p^n dans un espace fonctionnel adapté, puis de montrer leur convergence forte vers une solution u_p du problème (\mathcal{P}_p) , ce qui requiert à nouveau de la compacité. L'avantage de cet argument réside dans le fait que les fonctions u_p^n vérifient l'équation de type elliptique (4.15), et possèdent des propriétés qualitatives que ne possèdent pas des fonctions minimisantes quelconques. Ces propriétés fournissent en particulier la compacité qui permet de passer à la limite $n \rightarrow +\infty$.

Bornes sur l'énergie $E(u_p^n)$ et la vitesse c_p^n

Avant d'énoncer ces propriétés, il est nécessaire de déterminer une borne indépendante de n pour les fonctions u_p^n . Leur énergie $E(u_p^n)$ fournit une telle borne. En effet, la réduction aux fonctions à support compact du problème (\mathcal{P}_p) , opérée dans l'expression (4.1), garantit l'existence d'une fonction $v_\varepsilon \in \{1\} + \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $p(v_\varepsilon) = p$, et

$$E(v_\varepsilon) \leq E_{\min}(p) + \varepsilon,$$

pour tout nombre $\varepsilon > 0$ fixé. Lorsque n est suffisamment grand, la fonction v_ε peut être considérée comme une fonction de $H^1(\mathbb{T}^n)$, de sorte que

$$E_{\min}^n(p) \leq E(v_\varepsilon) \leq E_{\min}(p) + \varepsilon.$$

Il en résulte que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} E(u_p^n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} E_{\min}^n(p) \leq E_{\min}(p), \quad (4.16)$$

ce qui fournit la borne requise sur les fonctions u_p^n .

Cette borne n'est pas suffisante pour obtenir la compacité nécessaire au passage à la limite $n \rightarrow +\infty$. Il faut également utiliser le caractère elliptique de l'équation (4.15), qui dégénère lorsque c_p^n tend vers $+\infty$. Il est donc nécessaire de borner le multiplicateur de Lagrange c_p^n

indépendamment de n . Si nous considérons une solution v de l'équation (OPc) dans l'espace entier \mathbb{R}^N , l'identité de Pohozaev

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{N}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1-|v|^2)^2 = c(N-1)p(v), \quad (4.17)$$

qui s'obtient en multipliant l'équation (OPc) par la fonction $\langle x, \nabla v(x) \rangle$, puis en intégrant par parties, permet de contrôler la vitesse c . Elle conduit en effet à

$$|c| \leq \frac{NE(v)}{(N-1)p(v)}.$$

Dans le cas du tore \mathbb{T}^n , des termes de bord doivent être pris en compte, mais il n'en demeure pas moins qu'il existe une constante K , indépendante de n , telle que

$$|c_p^N| \leq K \frac{E(u_p^n)}{p(u_p^n)} \leq K \frac{E_{\min}(p)}{p}, \quad (4.18)$$

de sorte que la vitesse c_p^n est bornée indépendamment de n .

Estimations elliptiques

En raison du caractère elliptique de l'équation (4.15), la borne (4.18) fournit des estimations uniformes des fonctions u_p^n et de leurs dérivées, indépendantes de n . Le principe du maximum implique par exemple que

$$|u_p^n| \leq \sqrt{1 + \frac{(c_p^n)^2}{4}},$$

puis les estimations elliptiques conduisent à

$$|\partial^\alpha u_p^n| \leq K(\alpha, c_p^n), \quad (4.19)$$

quel que soit l'exposant α considéré (cf les articles de A. Farina [14] et de É. Tarquini [41]). Il suffit alors d'invoquer le théorème d'Ascoli-Arzelà et le procédé diagonal de Cantor pour construire une fonction $u_p \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que, à une sous-suite près,

$$u_p^n \rightarrow u_p \text{ dans } \mathcal{C}_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^N),$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. La fonction u_p est solution de l'équation (OPc) pour une vitesse c égale à la limite, à extraction près, de la suite $(c_p^n)_{n \geq 1}$.

Rien ne garantit malheureusement que la fonction u_p soit bien solution du problème (\mathcal{P}_p) , ni même qu'elle ne soit pas constante. Il s'agit donc maintenant de montrer que le passage à la limite n'occasionne pas de pertes en énergie, ce qui réclame un argument de concentration-compacité en raison de l'invariance par translation du problème (\mathcal{P}_p) .

Localisation de l'énergie

Afin de mener à bien cet argument et de ne pas perdre une partie de l'énergie à la limite $n \rightarrow +\infty$, il est nécessaire de localiser avec précision l'énergie des fonctions u_p^n . Les estimations elliptiques (4.19) permettent de localiser l'énergie là où le module $|u_p^n|$ est loin de 1 : si une boule $B(x_0, 1)$ contient peu d'énergie, alors, le module $|u_p^n|$ reste proche de 1 sur la boule $B(x_0, \frac{1}{2})$. En effet, il résulte des estimations elliptiques (4.19) que

$$|\eta(x) - \eta(y)| \leq K|x - y|,$$

où $\eta = 1 - |u_p^n|^2$, de sorte que, si nous notons \bar{x} , un point de la boule $\overline{B(x_0, \frac{1}{2})}$ tel que

$$|\eta(\bar{x})| = \sup_{y \in B(x_0, \frac{1}{2})} |\eta(y)|,$$

alors

$$|\eta(y)| \geq |\eta(\bar{x})| - K|y - \bar{x}| \geq \frac{|\eta(\bar{x})|}{2},$$

dès que $|\bar{x} - y| \leq r = \frac{|\eta(\bar{x})|}{2K}$. Nous obtenons donc

$$E(u_p^n, B(x_0, 1)) \geq \frac{1}{4} \int_{B(\bar{x}, \min\{r, \frac{1}{2}\})} \eta^2 \geq K \min\{|\eta(\bar{x})|^{N+2}, |\eta(\bar{x})|^2\},$$

de sorte que

$$\|1 - |u_p^n|\|_{L^\infty(B(x_0, \frac{1}{2}))} \leq |\eta(\bar{x})| \leq K \max\left\{E(u_p^n, B(x_0, 1))^{\frac{1}{N+2}}, E(u_p^n, B(x_0, 1))^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Le module de u_p^n est donc proche de 1, lorsque la densité d'énergie est petite : l'énergie se concentre dans les zones de la forme

$$\mathcal{V}_\delta^n = \left\{x \in \mathbb{T}^n, \text{ t.q. } |1 - |u_p^n(x)|| \geq \delta\right\},$$

où δ est un nombre strictement positif donné.

Avant de passer à l'argument de concentration-compacité, soulignons que, pour δ fixé, les ensembles \mathcal{V}_δ^n sont non vides pour n suffisamment grand, lorsque $\Sigma(p)$ est strictement positif. En effet, il résulte de l'inégalité (4.6) que les solutions u_p^n vérifient

$$\min_{x \in \mathbb{T}^n} |u_p^n(x)| \leq \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{E_{\min}^n(p)}{\sqrt{2p}}\right\},$$

de sorte que par l'inégalité (4.16),

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\min_{x \in \mathbb{T}^n} |u_p^n(x)|\right) \leq \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{E_{\min}(p)}{\sqrt{2p}}\right\}.$$

En particulier, lorsque $\Sigma(p) > 0$, l'ensemble \mathcal{V}_δ^n est non vide pour n suffisamment grand, dès que

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\Sigma(p)}{\sqrt{2p}}\right\}.$$

Argument de concentration-compacité

L'argument de concentration-compacité consiste alors par un recouvrement approprié de l'ensemble \mathcal{V}_δ^n , et grâce aux propriétés de décroissance des solutions d'énergie finie de l'équation (OPc), à choisir un nombre fini ℓ , indépendant de n , de points x_1^n, \dots, x_ℓ^n de \mathcal{V}_δ^n , tels que

$$|x_i^n - x_j^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

pour $i \neq j$, et à construire des fonctions $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, telles que, quitte à extraire,

$$u_p^n(\cdot + x_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_i(\cdot) \text{ dans } \mathcal{C}_{loc}^k(\mathbb{R}^N), \quad (4.20)$$

sans qu'il n'y ait de perte d'énergie lors du passage à la limite, c'est-à-dire en conservant les relations

$$E_{\min}(p) = \sum_{i=1}^{\ell} E(u_i), \text{ et } p = \sum_{i=1}^{\ell} p(u_i). \quad (4.21)$$

Nous renvoyons à l'article [3] pour les détails techniques de cette construction. Remarquons simplement que le nombre ℓ est supérieur ou égal à 1 lorsque $\Sigma(p) > 0$, et que les fonctions u_1, \dots, u_{ℓ} , solutions de l'équation (OPc) pour une même vitesse limite $c \neq 0$, sont non constantes, en raison de l'inégalité

$$|u_i(0)| \leq 1 - \delta < 1,$$

qui découle de la limite (4.20) et du fait que les points x_1^n, \dots, x_{ℓ}^n appartiennent à \mathcal{V}_{δ}^n .

Conclusion

Afin de conclure la preuve des théorèmes 2 et 3, il suffit maintenant de montrer que

$$\ell = 1.$$

Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que $\ell \geq 2$. Les égalités (4.21) entraînent alors que

$$E_{\min}(p) = \sum_{i=1}^{\ell} E(u_i) \geq \sum_{i=1}^{\ell} E_{\min}(p(u_i)). \quad (4.22)$$

Cependant, les fonctions u_i sont des solutions non constantes de l'équation (OPc) pour une même vitesse $c \neq 0$, de sorte que par l'identité de Pohozaev (4.17), les moments $p(u_i)$ vérifient

$$0 < p(u_i) < p. \quad (4.23)$$

Il vient donc par la condition de sous-additivité (4.9) que

$$\sum_{i=1}^{\ell} E_{\min}(p(u_i)) \geq E_{\min}(p).$$

L'inégalité (4.22) est donc une égalité. Cette dernière affirmation a deux conséquences. La courbe $p \mapsto E_{\min}(p)$ est d'abord affine entre 0 et p , de sorte qu'il n'existe pas de minimiseurs du problème (\mathcal{P}_p) pour les valeurs q du moment comprises entre 0 et p . Au contraire, l'égalité dans l'expression (4.22) implique que les fonctions u_i sont des minimiseurs du problème (\mathcal{P}_p) pour toutes les valeurs $p(u_i)$, ce qui fournit une contradiction à la vue des inégalités $0 < p(u_i) < p$. En conclusion, lorsque $\Sigma(p) > 0$, la valeur de ℓ est exactement 1, de sorte que le problème (\mathcal{P}_p) possède un minimiseur $u_p = u_1$.

En dimension deux, la condition (3.2) est vraie pour tout réel p strictement positif, ce qui conclut la preuve du théorème 2.

En dimension trois, le théorème 4 énonce que le problème (\mathcal{P}_p) n'a pas de minimiseurs pour p suffisamment petit, de sorte que $\Sigma(p)$ est nul pour p suffisamment petit. Comme

$$\Sigma(p) \rightarrow +\infty,$$

lorsque $p \rightarrow +\infty$ par l'asymptote (4.13), il existe une valeur p_0 strictement positive telle que le problème (\mathcal{P}_p) n'a pas de solutions, et a pour valeur

$$E_{\min}(p) = \sqrt{2}p,$$

pour $0 < p < p_0$, et qu'au contraire, le problème (\mathcal{P}_p) a un minimiseur u_p , et une valeur qui vérifie

$$E_{\min}(p) < \sqrt{2}p,$$

pour $p \geq p_0$.

4.3 Non-existence des ondes progressives d'énergie petite en dimension trois

Nous terminons enfin par la preuve du théorème 4, qui garantit la non-existence d'ondes progressives d'énergie petite en dimension trois.

Équation de convolution

Cette preuve repose sur le caractère surlinéaire de l'équation (OPc). Afin d'éclairer cette affirmation, considérons une solution v d'énergie finie et de vitesse c subsonique de l'équation (OPc) en dimension trois. Lorsque l'énergie $E(v)$ est suffisamment petite, la fonction v ne s'annule pas sur \mathbb{R}^3 , de sorte qu'il est possible de la relever sous la forme

$$v = \varrho \exp i\varphi,$$

où les fonctions ϱ et φ sont définies sur \mathbb{R}^3 et à valeurs réelles. Dans les nouvelles variables ϱ et φ , l'équation (OPc) s'écrit

$$\frac{c}{2}\partial_1\varrho^2 + \operatorname{div}\left(\varrho^2\nabla\varphi\right) = 0, \quad (4.24)$$

$$c\varrho\partial_1\varphi - \Delta\varrho - \varrho(1 - \varrho^2) + \varrho|\nabla\varphi|^2 = 0. \quad (4.25)$$

En particulier, la fonction $\eta = 1 - \varrho^2$ satisfait l'équation

$$\Delta^2\eta - 2\Delta\eta + c^2\partial_1^2\eta = -2\Delta(|\nabla v|^2 + \eta^2 - c\eta\partial_1\varphi) - 2c\partial_1\operatorname{div}(\eta\nabla\varphi),$$

ce qui conduit à l'équation de convolution

$$\eta = K_0 * F + 2c\sum_{j=1}^3 K_j * G_j, \quad (4.26)$$

où K_0 et K_j désignent les noyaux de transformées de Fourier égales à

$$\widehat{K}_0(\xi) = \frac{|\xi|^2}{|\xi|^4 + 2|\xi|^2 - c^2\xi_1^2}, \text{ et } \widehat{K}_j(\xi) = \frac{\xi_1\xi_j}{|\xi|^4 + 2|\xi|^2 - c^2\xi_1^2}, \quad (4.27)$$

tandis que les non-linéarités F et G sont données par

$$F = 2(|\nabla v|^2 + \eta^2) - 2c\eta\partial_1\varphi, \text{ et } G = \eta\nabla\varphi.$$

L'équation de convolution (4.26) est surlinéaire. Les non-linéarités F et G dépendent de manière quadratique des variables η ou $\nabla\varphi$. Elles sont de plus contrôlées par la densité d'énergie $e(v)$. En effet, lorsque l'énergie $E(v)$ est suffisamment petite, le minimum de la fonction v sur \mathbb{R}^3 est supérieur à $\frac{1}{2}$. Il existe donc une constante universelle $K > 0$ telle que

$$|F| + |G| \leq K\left(|\nabla v|^2 + \eta^2 + \varrho^2|\nabla\varphi|^2\right) \leq Ke(v). \quad (4.28)$$

Cette inégalité, combinée avec la forme explicite des noyaux K_0 et K_j , permet par un argument de surlinéarité de montrer que la fonction v est nécessairement constante si son énergie est suffisamment petite.

Argument de surlinéarité

Commençons par préciser notre argument de surlinéarité sur une équation élémentaire. Supposons qu'une quantité E vérifie l'inégalité

$$E \leq AE^2, \quad (4.29)$$

où A est une constante strictement positive. Si E n'est pas nulle, alors elle satisfait l'inégalité

$$E \geq \frac{1}{A},$$

c'est-à-dire que la quantité E est bornée inférieurement par une constante strictement positive. Il résulte de l'équation de convolution (4.26) que l'énergie $E(v)$ vérifie une inégalité de la forme (4.29), de sorte qu'elle est ou bien nulle, c'est-à-dire que la fonction v est constante, ou bien minorée par une constante strictement positive.

Plus précisément, l'équation de convolution (4.26) fournit par l'inégalité de Young la relation

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta^2 \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^3} |K_0|^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |F|^2 \right) + K \sum_{j=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |K_j|^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |G_j|^2 \right),$$

où K désigne ici, ainsi que dans la suite de cette preuve, une constante universelle strictement positive. Par l'inégalité (4.28), les formules explicites (4.27) et la formule de Plancherel, il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta^2 \leq KE(v)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{K}_0|^2 \right), \quad (4.30)$$

La multiplication des équations (4.24) et (4.25) par les fonctions φ , respectivement $1 - \varrho^2$, puis leur intégration par parties amènent l'inégalité

$$E(v) \leq Kc^2 \int_{\mathbb{R}^3} \eta^2,$$

de sorte que la relation (4.30) devient

$$E(v) \leq Kc^2 E(v)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{K}_0|^2 \right).$$

Cette inégalité est exactement de la forme (4.29). Si $E(v)$ n'est pas nulle, c'est-à-dire si v n'est pas constante, elle conduit à

$$E(v) \geq \frac{1}{Kc^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{K}_0|^2 \right)}.$$

Grâce aux formules explicites (4.27), l'intégrale L^2 du noyau K_0 vaut

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{K}_0|^2 = \frac{\pi^2}{c} \arcsin \left(\frac{c}{\sqrt{2}} \right),$$

de sorte que

$$E(v) \geq \frac{1}{K\pi^2 c \arcsin \left(\frac{c}{\sqrt{2}} \right)} \geq \mathcal{E} = \frac{\sqrt{2}}{K\pi^3} > 0,$$

ce qui conclut la preuve du théorème 4.

Remarque. Le raisonnement précédent reste valable en dimension deux. Cependant, l'intégrale L^2 du noyau K_0 est égale à

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{K_0}|^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2(2-c^2)}},$$

de sorte que l'équation (4.30) conduit à

$$E(v) \geq \mathcal{E}(c) = K\sqrt{2-c^2}. \quad (4.31)$$

La quantité $\mathcal{E}(c)$ converge maintenant vers 0 lorsque $c \rightarrow \sqrt{2}$. En particulier, la relation (4.31) n'exclut plus l'existence d'ondes progressives non constantes d'énergie petite en dimension deux (cf le théorème 2).

5 Conclusion

En guise de conclusion, rappelons quelques problèmes, qui demeurent à notre connaissance, ouverts.

En premier lieu, se pose toujours l'existence des ondes progressives non constantes d'énergie finie pour toute vitesse subsonique. Une solution à cette question consisterait à améliorer la régularité en tout point des courbes $p \mapsto E_{\min}(p)$: si ces courbes étaient de classe \mathcal{C}^1 , il existerait des solutions de l'équation (OPc) pour toute vitesse subsonique, au moins en dimension deux. En dimension trois, cet argument ne suffit pas : il est d'abord nécessaire de construire la branche supérieure de solutions. Cette construction pourrait découler d'arguments variationnels différents de la minimisation sous contraintes tels que le lemme du col.

En dimension deux, l'analyse de la limite transsonique semble possible grâce aux estimations des minimiseurs u_p pour p petit, énoncées dans le théorème 4 (cf l'article en préparation [2]). En revanche, en dimension trois, la limite transsonique correspond à la limite $p \rightarrow +\infty$ de la branche supérieure de solutions, qui n'a pas de construction rigoureuse à ce jour, de sorte que l'analyse de la limite transsonique reste improbable.

Enfin, la question de la stabilité orbitale des ondes progressives, sans parler de leur stabilité asymptotique, demeure ouverte en dimensions deux et trois. En dimension un, Zhiwu Lin [35] a prouvé la stabilité orbitale des ondes progressives de vitesse $0 < c < \sqrt{2}$. En dimensions deux et trois, C.A. Jones, S.J. Putterman et P.H. Roberts [32, 31] conjecturent la stabilité des ondes progressives minimisantes u_p construites dans les théorèmes 2 et 3. Rappelons une dernière fois que l'intérêt pour les ondes progressives provient en particulier de leur rôle supposé dans la dynamique en temps long de l'équation de Gross-Pitaevskii, de sorte que la preuve de leur stabilité asymptotique constituerait une forme d'achèvement de leur analyse.

Références

- [1] F. Béthuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. Existence and properties of travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. *Preprint*.
- [2] F. Béthuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. On the KP-I transonic limit of two-dimensional Gross-Pitaevskii travelling waves. *Preprint*.
- [3] F. Béthuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation II. *Preprint*.
- [4] F. Béthuel, G. Orlandi, and D. Smets. Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation. *J. Eur. Math. Soc.*, 6(1) :17–94, 2004.
- [5] F. Béthuel and J.-C. Saut. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation I. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, 70(2) :147–238, 1999.

- [6] F. Béthuel and D. Smets. A remark on the Cauchy problem for the 2D Gross-Pitaevskii equation with non zero degree at infinity. *Differential Integral Equations*, 20(3) :325–338, 2007.
- [7] D. Chiron. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two. *Nonlinear Anal.*, 58(1-2) :175–204, 2004.
- [8] D. Chiron. Boundary problems for the Ginzburg-Landau equation. *Commun. Contemp. Math.*, 7(5) :597–648, 2005.
- [9] D. Chiron. Vortex helices for the Gross-Pitaevskii equation. *J. Math. Pures Appl.*, 84(11) :1555–1647, 2005.
- [10] C. Coste. Nonlinear Schrödinger equation and superfluid hydrodynamics. *Eur. Phys. J. B*, 1 :245–253, 1998.
- [11] A. de Bouard and J.-C. Saut. Remarks on the stability of generalized KP solitary waves. In *Mathematical problems in the theory of water waves (Luminy, 1995)*, volume 200 of *Contemp. Math.*, pages 75–84. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [12] A. de Bouard and J.-C. Saut. Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 14(2) :211–236, 1997.
- [13] A. de Bouard and J.-C. Saut. Symmetries and decay of the generalized Kadomtsev-Petviashvili solitary waves. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(5) :1064–1085, 1997.
- [14] A. Farina. From Ginzburg-Landau to Gross-Pitaevskii. *Monatsh. Math.*, 139 :265–269, 2003.
- [15] C. Gallo. The Cauchy problem for defocusing nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing initial data at infinity. *Preprint*.
- [16] C. Gallo. The dark solitons of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Preprint*.
- [17] P. Gérard. The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 23(5) :765–779, 2006.
- [18] P. Gérard. The Gross-Pitaevskii equation in the energy space. *Preprint*.
- [19] V.L. Ginzburg and L.P. Pitaevskii. On the theory of superfluidity. *Sov. Phys. JETP*, 34 :1240, 1958.
- [20] O. Goubet. Two remarks on solutions of Gross-Pitaevskii equations on Zhidkov spaces. *Monatsh. Math.*, 151(1) :39–44, 2007.
- [21] P. Gravejat. Limit at infinity for travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(2) :147–152, 2003.
- [22] P. Gravejat. A non-existence result for supersonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Commun. Math. Phys.*, 243(1) :93–103, 2003.
- [23] P. Gravejat. Decay for travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 21(5) :591–637, 2004.
- [24] P. Gravejat. Limit at infinity and nonexistence results for sonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Differential Integral Equations*, 17(11-12) :1213–1232, 2004.
- [25] P. Gravejat. Asymptotics for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Asymptot. Anal.*, 45(3-4) :227–299, 2005.
- [26] P. Gravejat. First order asymptotics for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Adv. Differential Equations*, 11(3) :259–280, 2006.
- [27] E.P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4(2) :195–207, 1963.

- [28] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T.-P. Tsai. Scattering for the Gross-Pitaevskii equation. *Math. Res. Lett.*, 13(2) :273–285, 2006.
- [29] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T.-P. Tsai. Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions. *Ann. Henri Poincaré*, 8(7) :1303–1331, 2007.
- [30] S.V. Iordanskii and A.V. Smirnov. Three-dimensional solitons in He II. *JETP Lett.*, 27(10) :535–538, 1978.
- [31] C.A. Jones, S.J. Putterman, and P.H. Roberts. Motions in a Bose condensate V. Stability of solitary wave solutions of nonlinear Schrödinger equations in two and three dimensions. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 19 :2991–3011, 1986.
- [32] C.A. Jones and P.H. Roberts. Motions in a Bose condensate IV. Axisymmetric solitary waves. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 15 :2599–2619, 1982.
- [33] B.B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Sov. Phys. Dokl.*, 15(6) :539–541, 1970.
- [34] Y.S. Kivshar and B. Luther-Davies. Dark optical solitons : physics and applications. *Phys. Rep.*, 298 :81–197, 1998.
- [35] Zhiwu Lin. Stability and instability of traveling solitonic bubbles. *Adv. Differential Equations*, 7(8) :897–918, 2002.
- [36] O. Lopes. A constrained minimization problem with integrals on the entire space. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 25(1) :77–92, 1994.
- [37] E. Madelung. Quantumtheorie in Hydrodynamische form. *Zts. f. Phys.*, 40 :322–326, 1926.
- [38] M. Maris. Stationary solutions to a nonlinear Schrödinger equation with potential in one dimension. *Proc. Roy. Soc. Edinb. A*, 133(2) :409–437, 2003.
- [39] K. Nakanishi. Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation. *Preprint*.
- [40] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13(2) :451–454, 1961.
- [41] É. Tarquini. A lower bound on the energy of travelling waves of fixed speed for the Gross-Pitaevskii equation. *Monatsh. Math.*, 151(4) :333–339, 2007.
- [42] T. Tsuzuki. Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation. *J. Low Temp. Phys.*, 4(4) :441–457, 1971.
- [43] P.E. Zhidkov. *Korteweg-De Vries and nonlinear Schrödinger equations : qualitative theory*, volume 1756 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.