Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2006-2007

Jean-Michel Bony

Analyse microlocale et équations d'évolution

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° XX, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A20_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

ANALYSE MICROLOCALE ET ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

par

Jean-Michel Bony

Introduction

Si A est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1 formellement autoadjoint sur $\mathbb{R}^n$, on sait lui associer un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires P_t tel que $u_t = P_t u_0$ résolve l'équation $\frac{\partial}{\partial t} + iAu = 0$ avec donnée de Cauchy u_0. On sait de plus que les P_t sont des opérateurs intégraux de Fourier (classiques) associés au flot F_t du champ hamiltonien $H_a = (\partial a/\partial \xi_j ; -\partial a/\partial x_j)$ du symbole a de A. Nous en retiendrons les "bonnes propriétés" suivantes :

— Les P_t appliquent continûment l'espace de Sobolev H^s dans lui-même.

— Le conjugué $P_t B P_{-t}$ d'un opérateur pseudo-différentiel classique de symbole principal b est lui-même un opérateur pseudo-différentiel classique de symbole principal $b \circ F_t^{-1}$.

Si l'on veut étendre la théorie à des équations d'évolution plus générales, il n'est pas obligatoire de renoncer aux propriétés ci-dessus, à condition de les modifier convenablement. Par exemple, l'oscillateur harmonique $A = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$ engendre un groupe bien connu d'opérateurs unitaires P_t. Pour $t = \pi/2$, l'opérateur P_t est à un facteur près la transformation de Fourier tandis que le flot du symbole devient $F_t(x, \xi) = (\xi, -x)$. L'opérateur P_t échange espaces de Sobolev et espaces L^2 à poids ; le conjugué d'un opérateur de symbole b a toujours $\widetilde{b} = b \circ F_t^{-1}$ comme symbole, mais, si b vérifie les estimations standard $\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b\right| \leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$ d'un symbole d'ordre m, le symbole $\widetilde{b}$ vérifie des majorations beaucoup moins classiques : $\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \widetilde{b}\right| \leq C(1+|x|)^{m-|\beta|}$.

L'étude des propagateurs nécessite donc une analyse microlocale suffisamment générale pour prendre en compte des phénomènes du type ci-dessus. Nous utiliserons ici le calcul de Weyl-Hörmander, qui associe un calcul pseudo-différentiel différent à chaque "bonne" métrique riemannienne g sur l'espace des phases $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, et qui permet de définir un "espace de Sobolev" $H(M, g)$ pour toute "bonne" fonction M sur $\mathcal{X}$. Nous sommes ainsi amenés à résoudre deux problèmes assez distincts.

1. On se donne un difféomorphisme symplectique F de $\mathcal{X}$ sur lui-même, un calcul pseudo-différentiel de départ (défini par une métrique g) et une calcul d'arrivée (défini par $\widetilde{g}$). On peut alors définir une classe $\mathrm{OIF}(F, g, \widetilde{g})$ d'opérateurs, dont la vertu essentielle est qu'ils transforment, par conjugaison, les opérateurs du g-calcul en ceux du $\widetilde{g}$-calcul. Nous rappelons dans la section 2 la définition et les principales propriétés de ces opérateurs intégraux de Fourier généralisés — leur calcul symbolique notamment — en renvoyant à [**Bo3**] pour les démonstrations.

2. On se donne une équation d'évolution $\frac{\partial}{\partial t} + iAu = 0$, ainsi qu'un calcul de départ (associé à une métrique g_0). Les théorèmes 3.1 et 3.2 donnent des conditions portant sur le symbole a et son flot hamiltonien F_t pour que les propagateurs P_t existent et appartiennent à $\mathrm{OIF}(F_t, g_0, g_t)$; le calcul d'arrivée dépend de t et est imposé par le flot hamiltonien. Les démonstrations font l'objet des sections 4 et 5.

Les hypothèses s'expriment uniquement en termes de géométrie différentielle à partir du symbole a de A. En particulier, on ne se donne pas à priori d'extension autoadjointe sur L^2 ; ce sont les hypothèses dynamiques faites sur a qui entraînent que A est essentiellement autoadjoint. Le lecteur pourra aussi constater que ces hypothèses sont grosso-modo nécessaires pour remplir le programme ci-dessus (sauf à utiliser un hypothétique calcul pseudo-différentiel plus général que celui de Weyl-Hörmander). Cela ne signifie pas que ces hypothèses soient faciles à vérifier : elles s'expriment par des estimations portant sur le flot hamiltonien et ne sont pas immédiatement lisibles sur le symbole a lui-même.

1. Calcul pseudo-différentiel de Weyl-Hörmander

Ce calcul est développé dans les sections 18.5 et 18.6 du traité [**Hö**], mais nous aurons besoin de quelques compléments extraits de [**B-L**], [**B-C**], [**Bo1**] et [**Bo2**].

1.1. Quantification. — On note $X = (x, \xi)$ le point courant de l'*espace des phases* $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Celui-ci est muni de la *forme symplectique* σ definie par

$$\sigma(X, Y) = \langle \xi, y \rangle - \langle \eta, x \rangle\,; \qquad X = (x, \xi),\ Y = (y, \eta).$$

Pour $a \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$, on note $a^w(x, D)$ ou simplement a^w l'opérateur appliquant $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$a^w(x, D)u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\, a\left(\tfrac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) \tfrac{dy d\xi}{(2\pi)^n}. \tag{1}$$

La même formule, prise au sens faible, définit un opérateur appliquant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lorsque a est une distribution tempérée sur $\mathcal{X}$.

Pour a et b appartenant (par exemple) à $\mathcal{S}(\mathcal{X})$, on définit le composé $a\#b$ par $(a\#b)^w = a^w \circ b^w$ et on a

$$a\#b(X) = \iint e^{-2i\sigma(X-S, X-T)} a(S) b(T) \tfrac{dS\, dT}{\pi^{2n}}. \tag{2}$$

L'ordre 3 nous suffira pour le développement suivant :

$$a\#b = ab + \tfrac{1}{2i}\{a\,,\,b\} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2i}\sigma(\partial_Y, \partial_Z)\right)^2 a(Y)b(Z)|_{Y=Z=X} + R_3(a, b). \tag{3}$$

On a noté $\{a\,,\,b\}$ le crochet de Poisson. Nous renvoyons à [**Bo2**] pour l'expression intégrale de R_3 qui ne fait intervenir que les dérivées d'ordre 3 de a et b.

1.2. Métriques admissibles. — En chaque point Y, on peut choisir des coordonnées symplectiques (encore notées (x, ξ)) dans laquelle la forme quadratique g_Y se diagonalise :

$$g_Y(dx, d\xi) = \sum_1^n \frac{dx_j^2}{a_j^2} + \sum_1^n \frac{d\xi_j^2}{\alpha_j^2}. \tag{4}$$

Les a_j et α_j, dependent de Y et des coordonnées symplectiques choisies, mais l'ensemble des produits $a_j\alpha_j$ ne dépend que de Y.

Nous dirons que g est *admissible* si elle vérifie les cinq conditions suivantes.

A1. Hypothèse simplificatrice. — Les produits $a_j\alpha_j$ ci-dessus sont égaux ; leur valeur commune est notée $\lambda(Y)$. Il est équivalent de dire qu'il existe une transformation symplectique qui applique la boule unité $B_Y = \{X |\, g_Y(X-Y) \leq 1\}$ sur la boule euclidienne de rayon $\sqrt{\lambda(Y)}$. On a

$$|\sigma(S, T)| \leq \lambda(Y) g_Y(S)^{1/2} g_Y(T)^{1/2}.$$

A2. Hypothèse fondamentale. — $\forall Y, \quad \lambda(Y) \geq 1$.
Cela signifie qu'il est possible de localiser dans les boules unités de la métrique sans violer le *principe d'incertitude*.

A3. Lenteur. — Il existe $C > 0$ telle que

$$g_Y(Y-Z) \leq C^{-1} \Longrightarrow \big(g_Y(T)/g_Z(T)\big)^{\pm 1} \leq C$$

uniformément en Y, Z, T.

A4. Tempérance. — Il existe des constantes C et N telles que

$$\forall Y, \forall Z, \forall T, \quad \big(g_Y(T)/g_Z(T)\big)^{\pm 1} \leq C\big(1 + \lambda(Y)^2 g_Y(Y-Z)\big)^N.$$

A5. Tempérance géodésique. — La distance géodésique $D(Y,Z)$ *pour la métrique riemannienne* $\lambda(Y)^2 g_Y(dx, d\xi)$ est logarithmiquement équivalente à $\lambda(Y) g_Y(Y-Z)^{1/2}$: il existe C et N telles que

$$\forall Y, \forall Z, \;\; C^{-1}(1+D(Y,Z))^{1/N} \leq 1+\lambda(Y) g_Y(Y-Z)^{1/2} \leq C(1+D(Y,Z))^N.$$

Compte tenu de A4, cette propriété est équivalente à la suivante : il existe C et N telles que

$$\forall Y, \forall Z, \forall T, \quad \big(g_Y(T)/g_Z(T)\big)^{\pm 1} \leq C\big(1 + D(Y,Z)\big)^N.$$

Remarque. — L'hypothèse A1 n'est là que pour simplifier les notations. On pourrait la remplacer sans difficulté par la condition introduite dans [**Bo1**, def. 4.2] qui, jointe à A5, permet d'obtenir la caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels rappelée ci-dessous au n°1.4. En revanche, la tempérance symétrique A5 joue un rôle essentiel dans l'exposé : elle permet de donner une définition très simple des opérateurs intégraux de Fourier, qui, elle-même, réduit à quelques lignes la preuve du théorème 3.2.

On peut s'affranchir de A5 en définissant les opérateurs intégraux de Fourier en termes de commutateurs gauches localisés (sur le modèle de [**B-C**, th. 5.5]) mais les démonstrations se compliquent notablement. Rappelons que l'on ne connait aucun exemple de métrique tempérée ne vérifiant pas A5.

1.3. Poids et symboles. — On dit qu'une fonction M strictement positive définie sur $\mathcal{X}$ est un *g-poids* si elle vérifie les conditions suivantes de lenteur et de tempérance, pour des constantes C' et N' convenables :

$$g_Y(Y-Z) \le C'^{-1} \Longrightarrow \big(M(Y)/M(Z)\big)^{\pm 1} \le C'$$
$$\big(M(Y)/M(Z)\big)^{\pm 1} \le C'\big(1+\lambda(Y)^2 g_Y(Y-Z)\big)^{N'}.$$

Quitte à modifier les constantes, on peut remplacer $\big(1+\lambda(Y)^2 g_Y(Y-Z)\big)$ par $\big(1+D(Y,Z)\big)$ dans la majoration ci-dessus.

Si g est admissible et si M est un g-poids, on définit les *classes de symboles* $S(M,g)$ comme l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathcal{X})$ vérifiant pour tout $k \ge 0$, en notant $\partial_T a = \langle T, da\rangle$ les dérivées directionnelles,

$$|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} a(X)| \le C_k M(X) \quad \text{pour } g_X(T_j) \le 1. \tag{5}$$

On note $\Psi(M,g)$ l'espace des opérateurs a^w pour $a \in S(M,g)$. Les propriétés suivantes sont classiques :

- $\Psi(M,g) \subset \mathcal{L}(\mathcal{S},\mathcal{S})$ et $\Psi(M,g) \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}',\mathcal{S}')$.
- $\Psi(1,g) \subset \mathcal{L}(L^2,L^2)$.
- Dans le développement (3), pour $a \in S(M_1,g)$ et $b \in S(M_2,g)$, on a

$$a\#b \text{ et } ab \in S(M_1M_2,g)$$
$$\{a\,,\,b\}\,,\ (a\#b - ab) \text{ et } (a\#b - b\#a) \in S(M_1M_2\lambda^{-1},g) \tag{6}$$
$$R_3(a,b) \in S(M_1M_2\lambda^{-3},g). \tag{7}$$

La proposition suivante résume quelques points démontrés dans [**Bo2**].

Proposition 1.1. — *On définit les classes de symboles* $\hat{S}\,(M,g)$ [resp. $\hat{\hat{S}}\,(M,g)$, $\hat{\hat{\hat{S}}}\,(M,g)$] *comme les espaces de fonctions vérifiant* (5) *pour* $k \ge 1$ [resp. $k \ge 2$, $k \ge 3$].

(a) *Il existe un poids M' dépendant de M tel que les éléments des classes ci-dessus appartiennent à $S(M',g)$.*

(b) *Les relations* (6) *restent valables pour $a \in \hat{S}\,(M_1,g)$ et $b \in \hat{S}\,(M_2,g)$.*

(c) *La relation* (7) *reste valable pour $a \in \hat{\hat{\hat{S}}}\,(M_1,g)$ et $b \in \hat{\hat{\hat{S}}}\,(M_2,g)$.*

Les espaces $S(M,g)$, $\hat{S}\,(M,g)$, …sont munis des semi-normes égales aux meilleures constantes C_k de (5). Les $S(M,g)$ sont des espaces de Fréchet, les $\hat{S}\,(M,g)$, …sont complets mais non séparés.

1.4. Caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels.

Theorème 1.2. — (a) *Pour $b \in \hat{S}\,(\lambda,g)$ et $A \in \Psi(M,g)$, on a*

$$\mathrm{ad}\, b^w \cdot A \overset{\text{def}}{=} b^w A - A\, b^w \in \Psi(M,g).$$

En particulier, cet opérateur est borné sur L^2 pour $M = 1$.

(b) *Réciproquement, soit A un operateur borné sur L^2 ainsi que ses commutateurs itérés*

$$\mathrm{ad}\, b_1^w \ldots \mathrm{ad}\, b_k^w \cdot A \quad \textit{pour } b_j \in \hat{S}\,(\lambda, g).$$

Alors $A \in \Psi(1, g)$.

La première partie est conséquence immédiate de la proposition 1.1 (b) ; pour la réciproque, où la tempérance géodésique joue un rôle crucial, nous renvoyons à [**Bo1**].

Espaces de Sobolev $H(M, g)$. — Il en existe plusieurs définitions équivalentes ; les propriétés suivantes, extraites de [**B-C**], nous suffiront.

• Pour tout g-poids M, il existe $A \in \Psi(M, g)$ et $B \in \Psi(M^{-1}, g)$ tels que $AB = BA = I$.

• Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On dit que u appartient à l'*espace de Sobolev* $H(M, g)$ (parfois noté $H(M)$) si, pour un opérateur inversible A comme ci-dessus, on a $Au \in L^2$.

• Si C appartient à $\Psi(M, g)$, il applique continûment $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$ pour tout g-poids M_1.

• Si $C \in \Psi(M, g)$ est bijectif de $H(M_1)$ sur $H(M_1/M)$ pour un g-poids M_1, alors $C^{-1} \in \Psi(M^{-1}, g)$.

2. Opérateurs intégraux de Fourier

Nous résumons, dans cette section, les résultats de [**Bo3**], en nous limitant aux opérateurs intégraux de Fourier "d'ordre 0" (appliquant L^2 dans lui-même).

Un *triplet admissible* $(F, g, \widetilde{g})$ sera constitué d'un difféomorphisme F de $\mathcal{X}$ et de deux métriques riemanniennes sur $\mathcal{X}$ vérifiant les trois conditions suivantes.

B1. — F est une transformation canonique (ou symplectomorphisme), c'est-à-dire que $F_*\sigma = \sigma$. En chaque point, sa différentielle $F'(Y)$ appartient au groupe symplectique $\mathrm{Sp}(n)$.

B2. — $\widetilde{g}$ est l'image directe F_*g de g, c'est-à-dire la métrique riemannienne définie par

$$\widetilde{g}_{F(Y)}(T) = g_Y(F'(Y)^{-1} \cdot T).$$

B3. — g et $\widetilde{g}$ sont admissibles, c'est-à-dire vérifient les conditions A1. . .A5.

B4. — Les dérivées de la fonction F vérifient les estimations suivantes :

$$\widetilde{g}_{F(X)}\big(\partial_{T_1}\dots\partial_{T_k}F(X)\big)\le C_k \quad \text{pour } g_X(T_j)\le 1. \tag{8}$$

Remarque. — Il suffit bien sûr de se donner F et g pour déterminer un triplet admissible, mais, en supposant g admissible, il est difficile de donner des conditions garantissant que $\widetilde{g}$ l'est aussi. Les conditions A1 et A2 sont automatiquement vérifiées et on montre sans difficulté que la condition B4 (pour $k=2$) entraîne la lenteur A3 de $\widetilde{g}$. En revanche, la tempérance de $\widetilde{g}$ ne peut guère s'exprimer de manière non tautologique à partir de propriétés de F et g : elle utilise de manière cruciale le fait que $\mathcal{X}$ est un espace affine en comparant les valeurs des formes quadratiques $\widetilde{g}_Y$ et $\widetilde{g}_Z$, pour le *même vecteur* T, en deux points très éloignés et en faisant intervenir le vecteur $Z-Y$. Si F respecte les structures riemanniennes (c'est une isométrie par définition) et symplectique, il n'en va pas de même pour la structure affine.

On note λ et $\widetilde{\lambda}$ les fonctions définies au n°1.2 relatives à g et $\widetilde{g}$. On a $\widetilde{\lambda}(F(Y))=\lambda(Y)$, les formes quadratiques g_Y and $\widetilde{g}_{F(Y)}$ étant symplectiquement équivalentes.

La condition B4 est évidemment vérifiée pour $k=1$ (avec $C_1=1$) et il en est de même pour F^{-1}. On en déduit que le triplet $(F^{-1},\widetilde{g},g)$ est admissible. Les autres estimations B4 entraînent les propriétés suivantes (et leur sont en fait équivalentes).

Proposition 2.1. — *Si m est un g-poids, alors $\widetilde{m}=m\circ F^{-1}$ est un $\widetilde{g}$-poids et*

$$a\circ F^{-1}\in S(\widetilde{m},\widetilde{g}) \iff a\in S(m,g)$$
$$a\circ F^{-1}\in \hat{S}\,(\widetilde{m},\widetilde{g}) \iff a\in \hat{S}\,(m,g)$$

On se gardera de croire en un résultat analogue pour $a\in\hat{\hat{S}}\,(m,g)$: l'estimation des dérivées secondes de $a\circ F^{-1}$ exige un contrôle des dérivées premières de a.

Definition 2.2. — *On note $\mathrm{OIF}(F,g,\widetilde{g})$ l'espace des opérateurs P tels que*

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(b_1)\dots\widetilde{\mathrm{ad}}(b_k)\cdot P\in\mathcal{L}(L^2) \quad \textit{pour } b_j\in\hat{S}\,(\lambda,g), \tag{9}$$

où l'on a noté $\widetilde{\mathrm{ad}}(b)\cdot P$ le commutateur gauche

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(b)\cdot P=(b\circ F^{-1})^wP-Pb^w. \tag{10}$$

Cette définition, calquée sur la caractérisation du théorème 1.2, entraîne facilement les propriétés suivantes.

• $\mathrm{OIF}(I, g, g) = S(1, g)$

• Si P appartient à $\mathrm{OIF}(F, g, \widetilde{g})$, son adjoint appartient à $\mathrm{OIF}(F^{-1}, \widetilde{g}, g)$.

• Si $P \in \mathrm{OIF}(F, g, \widetilde{g})$ et $Q \in \mathrm{OIF}(G, \widetilde{g}, \overline{g})$, où $(F, g, \widetilde{g})$ et $(G, \widetilde{g}, \overline{g})$ sont des triplets admissibles, alors $QP \in \mathrm{OIF}(G \circ F, g, \overline{g})$.

2.1. Symbole principal des opérateur intégraux de Fourier. — Pour tout point $(Y, F(Y))$ du graphe Γ de F, on note χ_Y l'application affine tangente définie par $\chi_Y(X) = Y + F'(Y) \cdot (X - Y)$. On définit un fibré $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ dont la fibre au dessus du point $(Y, F(Y))$ est constituée des opérateurs métaplectiques V associés à χ_Y, c'est-à-dire tels que $a^w V = V (a \circ \chi_Y)^w$ pour tout symbole a. Cette fibre est un cercle, constitué des multiples ωV, $|\omega| = 1$, d'un même opérateur V.

Nous renvoyons à [**Bo3**] pour la définition de "section horizontale" $Y \mapsto V_Y$ de $\widetilde{\Gamma}$ ainsi que pour celle de "partition fine de l'unité" $Y \mapsto \psi_Y$. On a alors le résultat suivant [**Bo3**, th. 6.6] :

Theorème 2.3. — *Tout $P \in \mathrm{OIF}(F, g, \widetilde{g})$ peut s'écrire*

$$P = \int p(Y)\, V_Y \circ \psi_Y^w \tfrac{dY}{\pi^n} \; + \; R \tag{11}$$

où p appartient à $S(1, g)$ et où R est un opérateur intégral de Fourier régularisant :

$$\forall N, \quad (\widetilde{\lambda}^w)^N \circ R \circ (\lambda^w)^N \in \mathrm{OIF}(F, g, \widetilde{g}) \tag{12}$$

La section $(Y, F(Y)) \mapsto p(Y) V_Y \in \widetilde{\Gamma} \otimes \mathbb{C}$ est un symbole principal de P.

L'application qui à un élément de $\mathrm{OIF}(F, g, \widetilde{g})$ associe son symbole principal est surjective, ce qui garantit l'existence de "beaucoup" d'opérateurs intégraux de Fourier. Un symbole principal de l'adjoint P^* est $(F(Y), Y) \mapsto \overline{p(Y)} V_Y^*$. Pour $Q \in \mathrm{OIF}(G, \widetilde{g}, \overline{g})$, et avec des notations évidentes, un symbole principal de $Q \circ P$ est la section $(Y, G \circ F(Y)) \mapsto p(Y) q(F(Y))\, W_{F(Y)} \circ V_Y$.

3. Equations d'évolution

On se donne donc un symbole a réel et C^∞ appartenant à une classe qui sera fixée ci-dessous, une métrique admissible g_0 et $T > 0$. On fait les hypothèses suivantes.

C1. — Le flot F_t du hamiltonien de a est global : il est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\frac{d}{dt}F_t(X) = H_a(F_t(X))$; $F_0(X) = X$. On pose $g_t = F_{t*}g_0$.

C2. — Pour $t \in [-T, T]$, les métriques g_t vérifient les conditions A1,..., A5 avec des constantes uniformes.

C3. — Pour $t \in [-T, T]$, les triplets (F_t, g_0, g_t) vérifient les conditions B1,..., B4 avec des constantes uniformes.

Compte tenu de la loi de groupe $F_{t+s} = F_t \circ F_s$, on voit facilement que les triplets (F_t, g_s, g_{s+t}) sont encore admissibles tant que s et $s+t$ restent dans $[-T, T]$.

On note λ_t la fonction définie au n°1.2 relatives à g_t. On a $\lambda_t = \lambda_0 \circ F_t^{-1}$. Si μ_0 est un g_0-poids, on note μ_* la famille de g_t-poids $\mu_t = \mu_0 \circ F_t^{-1}$; $t \in [-T, T]$.

Theorème 3.1. — *On suppose que a appartient à* $\hat{\hat{\hat{S}}}(\lambda_t^3, g_t)$ *uniformément (c'est-à-dire que les semi-normes de a dans ces espaces sont majorées par des constantes* C_k *indépendantes de t). Il en est ainsi en particulier si* $a \in \hat{S}(\lambda_0^3, g_0)$. *On a alors*
(a) L'opérateur a^w *défini sur* $\mathcal{S}$ *est essentiellement autoadjoint sur* L^2. *Le domaine de sa fermeture coïncide avec* $\{u \in L^2 |\, a^w u \in L^2\}$.
(b) Les opérateurs $P_t = e^{-ita^w}$ *forment un groupe fortement continu sur* L^2. *Pour* $|t| \le T$ *et pour tout* g_0*-poids* μ_0*, ils se prolongent en des opérateurs continus de* $H(\mu_0, g_0)$ *dans* $H(\mu_t, g_t)$.

Theorème 3.2. — *On suppose maintenant que a appartient à* $\hat{\hat{\hat{S}}}(\lambda_t^2, g_t)$ *uniformément ; il en est ainsi en particulier si* $a \in \hat{\hat{S}}(\lambda_0^2, g_0)$. *On a alors* $P_t \in \mathrm{OIF}(F, g_0, g_t)$ *pour* $|t| \le T$.

Remarque. — Le choix de la métrique initiale g_0 influe très substantiellement sur le contenu de l'hypothèse $a \in \hat{\hat{\hat{S}}}(\lambda_0^2, g_0)$. Ainsi, pour la métrique standard $dx^2 + \frac{d\xi^2}{1+|\xi|^2}$, le symbole a peut contenir des termes en $|\xi|^2 \log |\xi|$ ou en x^3. Si g_0 est la métrique euclidienne, tout polynôme de degré 3 en x et ξ appartient à $\hat{\hat{\hat{S}}}(1, g_0)$. Il est clair que cette hypothèse, à elle seule, ne peut impliquer ni le caractère global du flot, ni le fait que a^w soit essentiellement autoadjoint.

4. Démonstration du théorème 3.1

Les hypothèses dynamiques fournissent une solution approchée de "l'équation de Heisenberg" qui jouera un rôle important. On se donne un symbole b_0 et on pose $b_t = b_0 \circ F_t^{-1}$. On notera $A = a^w$ et $B_t = b_t^w$ les opérateurs correspondants. On a $\frac{\partial}{\partial t} b_t = \{b_t\,,\, a\}$ et, d'après (3)

$$\begin{aligned} b_t \# a &= a b_t + \tfrac{1}{2i}\{b_t\,,\, a\} + \text{terme d'ordre } 2 + R_3(b_t, a) \\ a \# b_t &= b_t a + \tfrac{1}{2i}\{a\,,\, b_t\} + \text{terme d'ordre } 2 + R_3(a, b_t) \end{aligned}$$

Les termes d'ordre 0 et 2 étant symétriques, on en déduit

$$\tfrac{d}{dt} B_t = i(B_t A - A B_t) + R_t \tag{13}$$

où le symbole de R_t appartient à la même classe que $R_3(a, b_t)$. En particulier, sous les hypothèses du théorème 3.1, et pour $b_0 \in S(\mu_0, g_0)$, on a $R_t \in S(\mu_t, g_t)$ d'après la proposition 1.1 (c).

Nous aurons besoin de définir les espaces $L^p([-T,T]; H(\mu_*))$ constitués des (classes) de fonctions mesurables $u : t \mapsto u_t$ (la mesurabilité faible à valeur dans $\mathcal{S}'$ suffit) telles que

$$\|u\|_{L^p(H(\mu_*))} = \left(\int_{-T}^{T} \|u_t\|_{H(\mu_t)}^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \tag{14}$$

l'expression étant convenablement modifiée pour $p = \infty$. Cette définition fait sens à condition de définir de manière cohérente les normes des espaces $H(\mu_t, g_t)$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.1. — *Soit $b_0 \in S(\mu_0, g_0)$ tel que b_0^w soit inversible. Alors il existe $\delta > 0$, ne dépendant de b_0 que par l'intermédiaire de ses semi-normes tel que, pour $|t| \le \delta$, l'opérateur b_t^w admette un inverse $(b_t^w)^{-1} \in S(\mu_t^{-1}, g_t)$.*

Pour en déduire la définition de $L^p(H(\mu_*))$, il faut utiliser le fait qu'il existe des opérateurs inversibles de tout poids et, en reprenant la preuve de [**B-C**, th. 6.4], vérifier que pour tout $\theta \in [-T, T]$, on peut trouver $b_\theta \in S(\mu_\theta, g_\theta)$, dont les semi-normes sont bornées indépendamment de θ, tel que b_θ^w soit inversible. La proposition ci-dessus permet alors de définir de façon cohérente des $b_t \in S(\mu_t, g_t)$ inversibles pour $t \in [\theta - \delta, \theta + \delta]$. Il suffit de recouvrir l'intervalle $[-T, T]$ par un nombre fini de ces intervalles et la norme figurant dans (14) est bien définie à équivalence près.

Pour prouver la proposition, on introduit $c_0 \in S(\mu_0^{-1}, g_0)$ tel que $b_0 \# c_0 = 1$. Avec les notations ci-dessus pour c_t et C_t, on obtient

$$\tfrac{d}{dt} B_t C_t = i(B_t C_t A - A B_t C_t) + R_t$$

où R_t appartient à $\Psi(1, g_t)$ (avec des semi-normes contrôlées). Si on pose maintenant $e_t = (b_t \# c_t) \circ F_t$, on obtient une équation $\frac{d}{dt} e_t = s_t$ où les s_t sont bornés dans $S(1, g_0)$. Il en résulte que, pour t assez petit, les semi-normes de $(1 - e_t)$ dans $S(1, g_0)$ et donc celles de $(1 - b_t \# c_t)$ dans $S(1, g_t)$ sont aussi petites qu'on le veut. En particulier, $B_t C_t$ est inversible en tant qu'opérateur sur L^2 et son inverse appartient à $\Psi(1, g_t)$ (c'est la propriété rappelée au n°1.4), ce qui montre que B_t lui-même est inversible.

L'espace $C(H(\mu_*))$ des "fonctions continues à valeurs dans les $H(\mu_t)$" est défini comme l'adhérence, dans $L^\infty(H(\mu_*))$, des fonctions continues à valeurs dans $\mathcal{S}$. On vérifie sans difficulté la densité des fonctions C^∞ dans $L^1(H(\mu_*))$ et le fait que le dual de cet espace est $L^\infty(H(\mu_*^{-1}))$.

Proposition 4.2. — *Soit μ_0 un g_0-poids.*
(a) *Soit $u \in C^1([-T, T], \mathcal{S})$ vérifiant $\frac{d}{dt} u_t + iAu_t = f_t$. On a alors*

$$\|u\|_{L^\infty(H(\mu_*))} \leq C \left(\|u_0\|_{H(\mu_0)} + \|f\|_{L^1(H(\mu_*))} \right). \tag{15}$$

(b) *Il existe $\overline{\mu}_0 > \mu_0$ tel que, pour $u \in L^\infty(H(\overline{\mu}_*))$ solution de la même équation, on ait $u \in C(H(\mu_*))$ et l'estimation* (15).

Il suffit de démontrer le résultat sur un intervalle de longueur 2δ, que l'on supposera centré en 0. Avec les notations ci-dessus, on a alors

$$\tfrac{d}{dt}(B_t u_t) = iB_t A u_t - iAB_t u_t + R_t u_t - iB_t A u_t + B_t f_t = -iA(B_t u_t) + R_t u_t + B_t f_t$$

et donc

$$\tfrac{d}{dt} \|u_t\|^2_{H(\mu_t)} = \tfrac{d}{dt} \|B_t u_t\|^2_{L^2} \leq C \left(\|u_t\|^2_{H(\mu_t)} + \|u_t\|_{H(\mu_t)} \|f_t\|_{H(\mu_t)} \right)$$

d'où l'on déduit facilement la partie (a) pour δ assez petit.

Pour démontrer la partie (b), on utilise le lemme suivant, en posant $\mathcal{H}^N = \left\{ u \,\middle|\, x^\alpha D^\beta u \in L^2 \,;\, |\alpha + \beta| \leq N \right\}$.

Lemme 4.3. — *En notant μ_0 et $\overline{\mu}_0$ des g_0-poids, on a les estimations suivantes, uniformes pour $t \in [-T, T]$.*

$$\forall \mu_0,\ \exists N,\ \exists C, \qquad \|u\|_{H(\mu_t)} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^N}.$$
$$\forall N,\ \exists \overline{\mu}_0,\ \exists C, \qquad \|u\|_{\mathcal{H}^N} \leq C \|u\|_{H(\overline{\mu}_t)}.$$

On sait qu'il existe un poids m_0 tel que $a \in S(m_0, g_0)$. On a donc aussi $a \in S(m_t, g_t)$ car $a \circ F_t^{-1} = a$. On choisira $\overline{\mu}_0$ de telle sorte que $H(m_t \mu_t) \supset \mathcal{H}^N \supset H(\overline{\mu}_t/m_t)$. On a alors $du/dt \in L^\infty(\mathcal{H}^N)$ et u est donc continue à valeurs dans $\mathcal{H}^N$. On peut l'approcher dans le même espace par des fonctions u^ν de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{S}$. On a alors $u^\nu(0) \mapsto u(0)$ dans $H(\mu_0)$ tandis que $u^\nu \mapsto u$ et $Au^\nu \mapsto Au$ dans $L^\infty(H(\mu_*))$, ce qui entraîne le résultat de la proposition 4.2.

Pour une valeur de t fixée, le lemme résulte d'arguments classiques. L'existence d'un $\mathcal{H}^N \subset H(\mu_t, g_t)$ est implicite dans toute démonstration du fait que les opérateurs pseudo-différentiels sont continus sur $\mathcal{S}$ (voir [**B-L**, th. 4.2.2]). Quant à l'existence d'un $\overline{\mu}$ tel que $H(\overline{\mu}_t, g_t) \subset \mathcal{H}^N$, elle résulte du fait que toute forme linéaire sur $\mathcal{X}$ appartient à une classe de symboles pour un poids convenable (voir [**B-L**, ex. 4.1.2]). Il reste à vérifier dans les démonstrations que ces choix peuvent être faits uniformément pour $t \in [-T, T]$.

Theorème 4.4. — *Soient μ_0 un g_0-poids, $u_0 \in H(\mu_0, g_0)$ et $f \in L^1([0,T]; H(\mu_*))$. Il existe alors une unique solution $u \in C([0,T]; H(\mu_*))$ du problème de Cauchy*

$$\frac{du(t)}{dt} + iAu(t) = f(t); \qquad u(0) = u_0. \tag{16}$$

Il s'agit d'un argument de dualité classique. Soit $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ s'annulant ptès de $t = T$. On pose $g = \frac{\partial v}{\partial t} + iAv$. D'après (15) utilisé en retournant le sens du temps, g détermine v et on a $\|v\|_{L^\infty(H(\mu_*^{-1}))} \leq C\,\|g\|_{L^1(H(\mu_*^{-1}))}$. La forme linéaire $g \mapsto (u_0 \,|\, v(0)) + \int_0^T (f(t) \,|\, v(t))\,dt$ est continue sur le sous-espace de $L^1(H(\mu_*^{-1}))$ formé par l'ensemble des g. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe donc $u \in L^\infty(H(\mu_*))$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{S},\ (u_0 \,|\, v(0)) + \int_0^T (f(t) \,|\, v(t))\,dt = -\int_0^T \big(u(t) \,\big|\, \tfrac{\partial v}{\partial t} + iAv\big)\,dt \tag{17}$$

On en déduit que u est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} + iAu = f$ au sens des distributions dans $]0,T[\times\mathbb{R}^n$. On introduit ensuite un poids $\underline{\mu}_0 \ll \mu_0$ de telle sorte que l'on puisse appliquer la partie (b) de la proposition 4.2. On a $u \in C(H(\underline{\mu}_*)))$, ce qui donne un sens à $u(0)$, et l'intégration par parties dans (17) montre que $u(0) = u_0$. L'inégalité (15), en remplaçant μ par $\underline{\mu}$, prouve l'unicité de u.

Pour montrer que u appartient à $C([0,T]; H(\mu_*))$, on introduit un poids $\overline{\mu}_0 \gg \mu_0$ de manière à pouvoir appliquer encore la partie (b) de la proposition 4.2, et on approche u_0 et f dans leurs espaces respectifs par des fonctions régulières u_0^ν et f^ν. D'après ce qui précède, il leur correspond des solutions u^ν appartenant à $L^\infty(H(\overline{\mu}_*))$ et donc à $C([0,T]; H(\mu_*))$. D'après (15), les u^ν forment une suite de Cauchy dans ce dernier espace, d'où le résultat.

Fin de la démonstration du théorème 3.1. — Le théorème précédent, pour $\mu_0 = 1$, montre l'existence et l'unicité, pour tout $u_0 \in L^2$, d'une solution $u : t \mapsto u_t = P_t u_0$, continue à valeurs dans L^2, de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + i a^w u = 0$. Elle n'est définie a priori que dans $[-T, T]$, mais elle y vérifie la restriction de la loi de groupe, et la relation $P_t^* = P_t^{-1}$, en raison de l'unicité. On peut donc prolonger la famille des P_t en un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires sur L^2, dont on notera $-i\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal et $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ le domaine de l'opérateur autoadjoint $\mathcal{A}$. Les opérateurs P_t sont d'autre part continus de $H(\mu_0)$ dans $H(\mu_t)$ pour $|t| \leq T$.

Il est clair que $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \{u_0 \in L^2 |\, a^w u_0 \in L^2\}$: la quantité $\frac{1}{t}(u_0 - P_t u_0)$ converge toujours au sens des distributions vers $-i a^w u$, qui appartient donc à L^2 si u_0 est dans le domaine. Réciproquement, si u_0 et $a^w u_0$ appartiennent à L^2, on a au sens des distributions et pour $|t| \leq T$

$$\tfrac{d}{dt} P_t u_0 = -i a^w P_t u_0 = -i P_t (a^w u_0).$$

Le membre de droite est continu à valeurs dans L^2, d'où l'identité de $\mathcal{A}$ avec l'opérateur a^w ayant comme domaine $\{u_0 \in L^2 |\, a^w u_0 \in L^2\}$. On sait que ce dernier opérateur est l'adjoint de la fermeture de a^w défini sur $\mathcal{S}$. Le caractère autoadjoint de $\mathcal{A}$ entraîne donc l'identité des prolongements fort et faible de a^w.

5. Démonstration du théorème 3.2

On suppose maintenant $a \in \hat{\hat{\hat{S}}}(\lambda_t^2, g_t)$ et il faut démontrer que les commutateurs gauches itérés des P_t sont bornés sur L^2. Soit donc $b_0 \in \hat{S}(\lambda_0, g_0)$, $b_t = b_0 \circ F_t^{-1}$ et posons, avec les notations habituelles,

$$K_t = P_{-t}\, \widetilde{\mathrm{ad}}(b) \cdot P_t = P_{-t} B_t P_t - B_0.$$

On a

$$\frac{d}{dt} K_t = P_{-t} \left\{ i A B_t - i B_t A + \{b_t\,,\, a\}^w \right\} P_t = P_{-t} R_t P_t$$

En utilisant à nouveau la proposition 1.1 (c), on voit que l'opérateur R_t appartient à $\Psi(1, g_t)$ (avec des semi-normes contrôlées) et est donc borné sur L^2 uniformément en t. On a ainsi

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(b) \cdot P_t = \int_0^t P_{t-s} R_s P_s \, ds \in \mathcal{L}(L^2).$$

On poursuit par récurrence en obtenant, pour les commutateurs gauches itérés, des expressions du type

$$\int \cdots \int_{0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_N} P_{t-s_N} R_{s_N} \ldots P_{s_2 - s_1} R_{s_1} P_{s_1} \, ds_1 \ldots ds_N \in \mathcal{L}(L^2),$$

ce qui achève la démonstration.

Références

[Bo1] Bony, Jean-Michel. Caractérisations des opérateurs pseudo-différentiels. Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, 1996–1997, Exp. No. XXIII, 17 pp., École Polytech.

[Bo2] Bony, Jean-Michel. Sur l'inégalité de Fefferman-Phong. Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, 1998–1999, Exp. No. III, 14 pp., École Polytech.

[Bo3] Bony, Jean-Michel. Evolution equations and microlocal analysis. Hyperbolic problems and related topics, 17–40, Grad. Ser. Anal., Int. Press, Somerville, MA, 2003.

[B-C] Bony, Jean-Michel; Chemin, Jean-Yves. Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander. Bull. Soc. Math. France 122 (1994), no. 1, 77–118.

[B-L] Bony, Jean-Michel; Lerner, Nicolas. Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22 (1989), no. 3, 377–433.

[Hö] Hörmander, Lars. The analysis of linear partial differential operators. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

Jean-Michel Bony, C.M.L.S., École Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex.