Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2006-2007

François Vigneron

Espaces de Sobolev d'ordre variable : traces, éclatement, inégalité de Hardy

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° XVII, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A17_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Espaces de Sobolev d'ordre variable : traces, éclatement, inégalité de Hardy.

François Vigneron*

Résumé

Le but de cette note est de présenter le résultat [15] sur la régularité des traces pour les fonctions appartenant aux espaces de Sobolev sur le groupe de Heisenberg. Les surfaces de trace admissibles peuvent présenter des points caractéristiques isolés, de type générique. Cette hypothèse est suffisante pour mettre en oeuvre une technique d'éclatement et permet donc d'utiliser les autres résultats connus dans le cas non-caractéristique.

La preuve s'inscrit dans un contexte plus général d'espaces de Sobolev d'ordre variable et cette note contient quelques remarques en ce sens.

1 Introduction

Les conditions aux limites admissibles dans la théorie hilbertienne du problème de Dirichlet pour les ouverts réguliers $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s'obtiennent comme restrictions au bord des espaces $H^s(\Omega)$. Le cas modèle bien connu est celui du demi-plan $x_1 > 0$.

Théorème 1 *Soit $\mathbb{R}^{d-1} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^d$ l'inclusion $x' \mapsto (0, x')$. Pour tout $s > 1/2$, la restriction au bord $x_1 = 0$ (définie pour les fonctions continues) s'étend continument à $H^s(\mathbb{R}^d)$ qu'elle envoie surjectivement sur $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$. En abrégé :*

$$i^* \left(H^s(\mathbb{R}^d) \right) = H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}). \tag{1}$$

Le problème qu'on se propose d'étudier consiste à généraliser ce résultat à certain espaces de Sobolev d'ordre variable. La difficulté et l'intérêt de ce problème est qu'en certains points de l'hypersurface de trace, la régularité microlocale transverse peut chuter brusquement ; les traces présentent alors une singularité qu'on se propose (sous certaines hypothèses) de contrôler par une méthode d'éclatement.

Le principal outil qui assure le succès de la méthode d'éclatement est la description des espaces de Sobolev fractionnaires par une formule intégrale utilisant une distance adaptée au problème. Une inégalité de type Hardy est le deuxième ingrédient essentiel.

La principale classe d'espaces de Sobolev d'ordre variable à laquelle on s'intéresse est constituée d'espaces, construits de la façon suivante. Étant donnée une famille $\mathscr{X} = (X_j)_{1 \leq j \leq r}$ de champs de vecteurs et k un entier positif, on définit :

$$H^k(\mathscr{X}, \mathbb{R}^d) = \{u \in L^2 \,|\, \forall \ell \leq k,\ \ \mathcal{L}_{X_{i_1}} \dots \mathcal{L}_{X_{i_\ell}} u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}. \tag{2}$$

*Centre de Mathématique Laurent Schwartz, École polytechnique, UMR 7640 du CNRS.

On suppose que la famille des comutateurs itérés X_i, $[X_j, X_k]$, $[X_l, [X_m, X_n]], \ldots$ est de rang maximal, uniformément sur $\mathbb{R}^d$. Cette hypothèse assure que l'opérateur $-\Delta_{\mathscr{X}} = \sum X_i^* X_i$ est hypo-elliptique. Introduisons :

$$\mathscr{V}_1(x) = \mathrm{Vect}(\mathscr{X}(x)) \subset \mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \mathscr{V}_{n+1} = \mathscr{V}_n + \mathrm{Vect}([\mathscr{X}, \mathscr{V}_n])$$

puis $\mathscr{W}_{n+1}$ le supplémentaire orthogonal (pour le produit scalaire naturel de $\mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$) de $\mathscr{V}_n$ dans $\mathscr{V}_{n+1}$. Alors, [6] assure que pour $\xi \in \mathscr{W}_n(x)$ et $f \in H^1(\mathscr{X}; \mathbb{R}^d)$, on a $f \in H^{1/n}_{(x,\xi)}$ microlocalement en (x, ξ). En particulier :

$$\mathcal{L}_{[X_{j_1},[\ldots[X_{j_{n-1}},X_{j_n}]]]} f \in H^{-(1-\frac{1}{n})}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

Ces espaces décrivent donc bien une régularité microlocale d'ordre variable. Malheureusement, l'hypothèse de Hörmander sur la famille des commutateurs entraîne aussi que $H(\mathscr{X}, \mathbb{R}^d)$ n'est pas invariant par translations euclidiennes ce qui complique considérablement l'analyse de Fourier (voir [7]).

Cependant, pour le problème des traces, la non-invariance par translation est une difficulté essentiellement technique. On peut en effet accéder à une compréhension relativement précise du problème en considérant les espaces suivants :

$$H^s(M, \mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2 \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d} M(\xi)^{2s}\, |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty \right\} \tag{3}$$

où M est une fonction mesurable uniformément positive (*i.e.* $M \geq c > 0$). Dans la suite on considèrera surtout le poids $M(\xi) = 1 + \sum |\xi_i|^{1/\omega_i}$ qui décrit une micro-régularité d'ordre $1/\omega_i$ dans la direction ξ_i

Lorsque la famille $\mathscr{X}$ vérifie la condition de Hörmander d'ordre N (*i.e.* $\mathscr{V}_N = \mathrm{T}\,\mathbb{R}^d$), l'espace $H(M^s, \mathbb{R}^d)$ obtenu avec

$$\omega_i = k \quad \text{si} \quad \dim \mathscr{V}_{k-1} < i \leq \dim \mathscr{V}_k$$

est un "modèle simplifié" de $H^s(\mathscr{X}, \mathbb{R}^d)$ et il se trouve qu'à des détails techniques près, l'idée de la démonstration du théorème de trace peut être illustrée assez précisément sur ce modèle.

Le but de cette note est de présenter le résultat [15] pour les espaces de Sobolev invariants à gauche sur le groupe de Heisenberg et une hypersurface générique. La section 3 est consacrée à l'énoncé de ce résultat. La section 2 est consacrée au cas particulier plus accessible des espaces $H^s(M, \mathbb{R}^d)$ invariants par translation. Enfin, la section 4 contient quelques commentaires.

Notations La transformée de Fourier de $u(x)$ est $\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx$. Pour $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, la transformée partielle suivant les $d-1$ dernières variables est notée $\mathcal{F}_{\xi'} u(x_1)$. On note $i(x') = (0, x')$ l'inclusion de $\mathbb{R}^{d-1}$ dans $\mathbb{R}^d$ et i^* l'opérateur de resctriction correspondant. On pose $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$. La dérivée de Lie est notée $\mathcal{L}_X f(x) = df(x) \cdot X(x)$.

2 Espaces d'ordre variable, invariants par translation

Dans un premier temps, considérons les espaces invariants par translation définis par (3). On normalise le poids M en supposant que $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_d$ avec $\omega_1 = 1$. On définit la dimension homogène $Q = \sum \omega_i$ et les dilatations anisotropes correspondantes ($\lambda > 0$) :

$$H_\lambda(x) = (\lambda^{-\omega_i} x_i)_{1 \leq i \leq d}.$$

2.1 Représentation intégrale

La distance naturelle associée au poids M est définie par :

$$\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^{1/\omega_i} = \rho(x-y).$$

On a $M(\xi) = 1 + \rho(\xi)$ et le résultat suivant.

Théorème 2 *Pour $0 < s < 1$, il existe une constante $C_s \geq 1$ telle que :*

$$C_s^{-1} \|f\|^2_{H^s(M)} \leq \|f\|^2_{L^2} + \iint \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{2s}} \frac{dx\,dy}{\delta(x,y)^Q} \leq C_s \|f\|^2_{H^s(M)}. \tag{4}$$

Preuve L'invariance par translation puis la formule de Plancherel entraînent :

$$\iint \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{2s}} \frac{dx\,dy}{\delta(x,y)^Q} = \iint \rho(h)^{-Q-2s} |e^{-ih\cdot\xi} - 1|^2 \, |\hat{f}(\xi)|^2 dh d\xi.$$

L'intégrale en h converge si $0 < s < 1$ et définit alors une fonction H_λ-homogène de degré $2s$, régulière sur la sphère compacte $\rho(\xi) = 1$, donc uniformément équivalente à $\rho(\xi)^{2s}$. ∎

Pour $s \geq 1$, on peut procéder de même mais l'expression générale est complexe. Par exemple, pour $M_0 = 1 + |\xi_1| + |\xi_2|^{1/2}$ et $0 \leq \sigma < 1$, l'équivalence (uniforme en ξ) :

$$\left(1 + |\xi_1| + |\xi_2|^{1/2}\right)^{1+\sigma} \simeq \left(1 + |\xi_1| + |\xi_2|^{1/2}\right)^{\sigma} |\xi_1| + \langle \xi \rangle^{\frac{1+\sigma}{2}}$$

entraîne que $u \in H^{1+\sigma}(M_0, \mathbb{R}^2)$ si et seulement si $u \in H^{\frac{1+\sigma}{2}}(\mathbb{R}^2)$ et $\partial_1 u \in H^\sigma(M_0, \mathbb{R}^2)$. On peut alors appliquer le Théorème 2 à $\partial_1 u$.

La difficulté du cas $s \geq 1$ réside dans ce que les espaces d'ordre variable mais invariants pas translation ne sont pas définis par des champs de vecteurs. Comme on cherche surtout à illustrer la théorie des espaces $H^s(\mathscr{X})$, on se contentera donc d'étudier le cas $0 < s < 1$ dans la suite de cet exposé.

2.2 Premier théorème de traces

Le principal résultat est le théorème suivant, valable pour des poids uniformément positifs. Dans ce cas, il n'y a pas de normalisation naturelle et on peut se contenter d'étudier $H(\mu, \mathbb{R}^d) = H^1(\mu, \mathbb{R}^d)$ puisque pour $s > 0$, on a $H^s(\mu, \mathbb{R}^d) = H(\mu^s, \mathbb{R}^d)$.

Théorème 3 *Soient $\mu : \mathbb{R}^d \to [1;\infty)$ et $\nu : \mathbb{R}^{d-1} \to [1;\infty)$ tels que pour $C_1, C_2 > 0$:*

$$\frac{C_1}{\nu(\xi')^2} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\mu(\xi_1,\xi')^2} \leq \frac{C_2}{\nu(\xi')^2} \tag{5}$$

La restriction i^* à $x_1 = 0$ est un opérateur continu et surjectif de $H(\mu, \mathbb{R}^d)$ sur $H(\nu, \mathbb{R}^{d-1})$.

Ce résultat contient bien sûr le Théorème 1 puisque, pour $s > 1/2$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{(1 + |\xi_1| + |\xi'|)^{2s}} \simeq \frac{1}{(1 + |\xi'|)^{2s-1}}.$$

Preuve Grâce à la formule d'inversion de Fourier, la restriction s'écrit :

$$i^*f = f(0,\cdot) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\xi_1} f\, d\xi_1$$

donc, en appliquant Cauchy-Schwartz et l'hypothèse (5) :

$$|\widehat{i^*f}(\xi')| \leq (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi_1,\xi')|\, d\xi_1 \leq \frac{(2\pi)^{-1}C_2^{1/2}}{\nu(\xi')}\left(\int_{\mathbb{R}} \mu(\xi)^2\, |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi_1\right)^{1/2}$$

Ainsi $\|i^*f\|_{H^1(\nu,\mathbb{R}^{d-1})} \leq (2\pi)^{-1}C_2^{1/2}\, \|f\|_{H^1(\mu,\mathbb{R}^d)}$. Inversement, pour $g\in H^1(\nu,\mathbb{R}^{d-1})$, on pose :

$$\widehat{Jg}(\xi) = 2\pi\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\eta_1}{\mu(\eta_1,\xi')^2}\right)^{-1} \frac{\hat{g}(\xi')}{\mu(\xi_1,\xi')^2}.$$

Par construction, on a $i^*\circ J = \mathrm{Id}$ et $\|Jg\|_{H^1(\mu,\mathbb{R}^d)} \leq 2\pi C_1^{-1}C_2^{1/2}\, \|g\|_{H^1(\nu,\mathbb{R}^{d-1})}$. ■

Remarque L'opérateur de relèvement fourni par cette preuve est linéaire.

2.3 Exemple d'application : points non-caractéristiques

Considérons à nouveau le poids $M(\xi) = 1+\sum |\xi_i|^{1/\omega_i}$ avec la normalisation du début de la section 2. On pose $\mathcal{V}_1 = \mathrm{Vect}\{\partial_i\,;\,\omega_i = 1\}$. Le théorème précédent permet de décrire les traces au voisinages des points non-caractéristiques.

Définition Un point x d'une hypersurface $\Sigma\subset\mathbb{R}^d$ est caractéristique pour le poids M lorsque

$$\mathrm{T}_x\,\Sigma \supset \mathcal{V}_1. \tag{6}$$

Dans le cas contraire ($i.e.$ $\mathcal{V}_1\cap \mathrm{T}_x\,\Sigma \subsetneq \mathcal{V}_1$), il est dit non-caractéristique.

L'exemple le plus élémentaire est celui de $\mathbb{R}^2$ muni du poids

$$M_0(\xi) = 1+|\xi_1|+|\xi_2|^{1/2}.$$

Les points caractéristiques d'une courbe régulière de $\mathbb{R}^2$ sont ceux dont la tangente est horizontale ($i.e.$ selon ∂_{x_1}).

Proposition 4 *Soit $\Sigma\subset\mathbb{R}^2$ une courbe C^1 définie par $x_1 = \gamma(x_2)$ avec $\gamma'\in L^\infty(\mathbb{R})$. La restriction à Σ est un opérateur continu et surjectif de $H^s(M_0,\mathbb{R}^2)$ sur $H^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}(\Sigma)$ si $s>1/2$.*

Preuve D'après le Théorème 2, les difféomorphismes $x\mapsto (x_1\pm\gamma(x_2),x_2)$ laissent $H^s(M_0)$ invariant si $0<s<1$. En effet, pour $|x_2-x_2'|<1$:

$$\begin{aligned}\rho_0(x_1-x_1'\pm(\gamma(x_2)-\gamma(x_2')),x_2-x_2') &\leq |x_1-x_1'|+|\gamma(x_2)-\gamma(x_2')|+|x_2-x_2'|^{1/2}\\ &\leq (1+\|\gamma'\|_{L^\infty})\,\rho_0(x_1-x_1',x_2-x_2').\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier par un calcul élémentaire que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{M_0(\xi)^{2s}} \simeq \frac{C_s}{(1+|\xi_2|)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

■

2.4 Un modèle d'éclatement autour d'un point caractéristique

On considère maintenant le problème des traces pour le poids M_0 précédent au voisinage d'un point caractéristique (*i.e.* une courbe ayant une tangent horizontale).

On doit éliminer tout de suite le cas d'un sous-segment caractéristique : la notion de trace n'est pas clairement définie. En effet, pour $s \leq 1$, il existe une famille bornée dans $H^s(M_0)$ constituée de fonctions régulières f_n telles que $\sup_n \|f_n(\cdot, 0)\|_{L^\infty} = \infty$.

Au contraire, pour $s > 1$, on peut appliquer le Théorème 3 et l'espace des traces sur la droite $x_2 = 0$ est $H^{s-1}(\mathbb{R})$.

Le cas auquel on s'intéresse désormais est celui de la parabole :

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1^2 - x_2 = 0\}.$$

L'origine est son unique point caractéristique. Lorsque $1/2 < s \leq 1$, la restriction à Σ est bien défini comme opérateur de $H^s(M_0)$ dans $H_{\mathrm{loc}}^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}(\Sigma^*)$ où $\Sigma^* = \Sigma \backslash \{0\}$. Pourtant, les traces ne sont pas bornées dans $L^2(\Sigma)$. La question est donc de déterminer précisément l'image de cet opérateur.

Proposition 5 *Pour $1/2 < s < 1$, la restriction γ définie par*

$$\gamma(u) : t \mapsto u(t, t^2) \tag{7}$$

est un opérateur continu et surjectif de $H^s(M_0)$ sur l'espace des fonctions v vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|v(x)|^2}{|x|^{2\theta}}\, d\mu_x + \iint_{\Gamma} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{(\omega(x,y)\,|x-y|)^{1+\theta}}\, d\mu_x\, d\mu_y \leq C\,\|u\|_s^2 \tag{8}$$

avec $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \frac{1}{2}|x| < |y| < 2|x|\}$, $\omega(x,y) = |x| + |y|$, $\theta = s - \frac{1}{2}$ et $d\mu_x = |x|\, dx$.

Preuve D'après la Proposition 4, pour $1/2 < s < 1$:

$$\int_I |v(x)|^2 + \iint_{I\times I} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{s+\frac{1}{2}}} \lesssim \int_{I\times J} |u(x_1,x_2)|^2 + \iint_{(I\times J)^2} \frac{|u(x_1,x_2) - u(y_1,y_2)|^2}{\delta((x_1,x_2),(y_1,y_2))^{3+2s}}$$

avec $v(x) = u(x, x^2)$, $I = [\frac{1}{2}; 2]$ et $J = [\frac{1}{4}; 4]$.

On applique ce résultat à $u_\lambda(x_1, x_2) = u(\lambda^{-1}x_1, \lambda^{-2}x_2)$ et $v_\lambda(x) = v(\lambda^{-1}x)$:

$$\lambda \int_{I_\lambda} |v|^2 + \lambda^{\frac{3}{2}-s} \iint_{(I_\lambda)^2} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{s+\frac{1}{2}}} \lesssim \lambda^3 \int\limits_{I_\lambda \times J_\lambda} |u|^2 + \lambda^{3-2s} \iint\limits_{(I_\lambda\times J_\lambda)^2} \frac{|u(x_1,x_2)-u(y_1,y_2)|^2}{\delta((x_1,x_2),(y_1,y_2))^{3+2s}}$$

avec $I_\lambda = \lambda^{-1} I$ et $J_\lambda = \lambda^{-2} J$ et une constante uniforme. On en déduit :

$$\int \frac{|v(x)|^2}{|x|^{2(s-1)}}\, dx + \sum_{\lambda \in 2^{\mathbb{N}}} \lambda^{s-\frac{3}{2}} \iint_{(I_\lambda)^2} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{s+\frac{1}{2}}}\, dx\, dy \lesssim \|u\|_{H^s(M_0)}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)|^2}{\rho(x)^{2s}}\, dx.$$

Le premier membre est celui de (8). Le contrôle du dernier terme nécessite une inégalité de Hardy anisotrope :

$$\forall s < 3/2, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)|^2}{\rho(x)^{2s}}\, dx \leq C_s \|u\|_{H^s(M_0)}^2 . \tag{9}$$

La preuve de cette inégalité fait l'objet du paragraphe 2.6. Inversement, les traces de $I \times J$ sur $\Sigma \cap (I \times J)$ sont surjectives sur $H^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}$. Etant donné une fonction v sur Σ vérifiant (8), on peut donc la relever, par partition de l'unité, en une fonction $u \in H^s(M_0)$. L'argument de scaling précédent assure même qu'on peut choisir un relèvement à support dans le voisinage de Σ défini par $|x_2 - x_1^2| \leq \varepsilon x_1^2$. ∎

2.5 Retour sur l'application du Théorème 3

Pour $1/2 < s < 1$, la Proposition 5 est en fait un corollaire du Théorème 3. En effet, pour $x_1, x_2 > 0$, l'application

$$U(x) = u(x_1 + \sqrt{x_2}, x_2)$$

est de classe $H^s(M_0)$. En effet, d'après le Théorème 2, il suffit de vérifier que, pour $\varepsilon = \pm 1$:

$$\frac{1}{2}\delta(x,y) \leq \delta((x_1 + \varepsilon\sqrt{x_2}, x_2), (y_1 + \varepsilon\sqrt{y_2}, y_2)) \leq 2\delta(x,y)$$

qui résulte de l'inégalité $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$ pour $a, b > 0$ (laquelle résulte de $\sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ après multiplication par le conjugué). D'autre part, la restriction de U à $x_1 = 0$ est une paramétrisation des traces de u sur l'arc droit de Σ :

$$U(0,t) = u(\sqrt{t}, t) = v(\sqrt{t}).$$

La droite $x_1 = 0$ étant non-caractéristique pour M_0, on peut appliquer le Théorème 3 (ou plus précisément, la Proposition 4) et affirmer que $U(0,\cdot) \in H^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})$. On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 6 *Pour $1/2 < s < 1$, la restriction $\tilde{\gamma}$ définie par*

$$\tilde{\gamma}(u) : t \mapsto u(\sqrt{t}, t) \tag{10}$$

est un opérateur continu et surjectif de $H^s(M_0)$ sur $H^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})$.

Comme $\gamma(u)(t) = \tilde{\gamma}(u)(t^2)$, on en déduit une nouvelle description de l'espace introduit dans la Proposition 5. Les traces $v = \gamma(u)$ sont caractérisées par :

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 d\mu_x + \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x^2 - y^2|^{s+\frac{1}{2}}} d\mu_x d\mu_y < \infty. \tag{11}$$

Cette autre approche entraîne, par comparaison avec (8), l'inclusion de l'espace (11) dans l'espace $L^2(|x|^{\frac{1}{2}-s} d\mu)$.

Malheureusement, le changement de variables $x \mapsto (x_1 \pm \sqrt{x_2}, x_2)$ ne laisse pas les espaces $H^s(M_0)$ invariants lorsque $s \geq 1$. Et le fait que Σ puisse être paramétrée par un supplémentaire de l'espace tangent est spécifique à la dimension 2. Dans le cas général, on mettra donc en œuvre une méthode d'éclatement analogue à la Proposition 5.

2.6 Preuves de l'inégalité de Hardy anisotrope

Pour être complet, il convient de démontrer l'inégalité de Hardy anisotrope (9). Dans $\mathbb{R}^d$, une preuve euclidienne "élémentaire" de l'inégalité classique est pour $s < d/2$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}} \leq \left\|u^2\right\|_{\dot{B}^{2s-d/2}_{2,1}} \left\|\rho^{-2s}\right\|_{\dot{B}^{d/2-2s}_{2,\infty}} \leq C \left\|u\right\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

La première inégalité est la dualité des espaces de Besov. La seconde exprime d'une part, le fait que $|x|^{-2s} \in \dot{B}^{d/2-2s}_{2,\infty}$ et d'autre part, que le produit de deux fonctions de H^s est une fonction de $\dot{B}^{2s-d/2}_{2,1}$ (voir, par exemple, [1]).

Dans le cas anisotrope, on définit les espaces de Besov en remplaçant les operateurs de localisation en fréquence par :

$$\tilde{\Delta}_q u = h_q * u$$

avec $h_q(x) = 2^{3q} h(2^q x_1, 2^{2q} x_2)$ et h une fonction régulière dont la transformée de Fourier est supportée dans une couronne de $\mathbb{R}^2$, égale à 1 sur la couronne $\{x\,;\, 1 < \rho(x) < 2\}$.

Dans le calcul ci-dessus, la seule adaptation consiste à remplacer la dimension d par la dimension homogène $Q = 3$. On vérifie ensuite sans difficultés que la transformée de Fourier de ρ^{-2s} est uniformément équivalente à $\rho(\xi)^{-Q+2s}$.

3 Espaces invariants à gauche sur $\mathbb{H}^d$

On identifie le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$ avec $x = (p, q, t) \in \mathbb{R}^{2d+1}$ muni de la loi de groupe non abélienne :

$$x \cdot x' = (p + p', q + q', t + t' + pq' - qp').$$

La mesure de Haar est $dx = dp\, dq\, dt$. Dans la suite, la structure de groupe ne sera qu'accessoire.

On munit $\mathbb{H}^d$ de la structure de contact $\kappa = dt + 2(pdq - qdp)$. On normalise la structure en considérant une base $\mathcal{Z}$ de $\ker \kappa$:

$$Z_i = \partial_{p_i} + 2q_i \partial_t \qquad \text{et} \qquad Z_{d+i} = \partial_{q_i} - 2p_i \partial_t.$$

Les champs Z_j sont dits *horizontaux*. En termes de géométrie de contact, ce choix revient à désigner ∂_t comme vecteur de Reeb. Les seuls commutateurs non triviaux sont

$$[Z_i, Z_{d+i}] = -4\partial_t.$$

L'algèbre de Lie de $\mathbb{H}^d$ est donc nilpotente d'ordre 2. La dimension homogène de $\mathbb{H}^d$ est notée $Q = 2d + 2$, les dilatations anisotropes naturelles étant $(p, q, t) \mapsto (\lambda p, \lambda q, \lambda^2 t)$.

Définition Pour k entier, on définit l'espace de Sobolev :

$$H^k(\mathbb{H}^d) = \{f \in L^2\,;\, \forall \ell \leq k,\ \forall Z_i \in \mathcal{Z}, \quad \mathcal{L}_{Z_1} \ldots \mathcal{L}_{Z_\ell} f \in L^2\} \tag{12}$$

en notant $\mathcal{L}_Z$ la dérivée de Lie. Par analogie avec $\mathbb{R}^d$, on utilise la notation

$$\nabla^\alpha_{\mathbb{H}^d} = \mathcal{L}_{Z_{\alpha_1}} \circ \ldots \circ \mathcal{L}_{Z_{\alpha_N}}$$

pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{1, \dots, 2d\}^N$.
On vérifie que pour k entier et $0 < \sigma < 1$, une "bonne" définition des espaces fractionnaires d'ordre $s = k + \sigma$ est :

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{H}^d)} = \|f\|^2_{H^k(\mathbb{H}^d)} + \iint_\Gamma \frac{|\nabla^k_{\mathbb{H}^d} f(x) - \nabla^k_{\mathbb{H}^d} f(y)|^2}{\delta_{\mathbb{H}^d}(x,y)^{2\sigma}} \frac{dx\,dy}{\mathrm{Vol}(\mathcal{B}_{x,y})} \tag{13}$$

avec $\Gamma = \{(x,y)\,;\,\delta_{\mathbb{H}^d}(x,y) < c_0\}$ et la distance de Carnot :

$$\delta_{\mathbb{H}^d}(x,x') = \inf\left\{T > 0\,;\,\exists\gamma : x \overset{[0,T]}{\rightsquigarrow} x', \quad \kappa(\dot\gamma) = 0 \text{ et } |\dot\gamma(t)|_{\text{eucl}} \leq 1\right\}.$$

On montre en effet [12] que la famille $\{H^s(\mathbb{H}^d)\}_{s\geq 0}$ est stable par interpolation complexe. La distance $\delta_{\mathbb{H}^d}(x,x')$ est uniformément équivalente à $|p-p'| + |q-q'| + |t - t' + qp' - pq'|^{1/2}$.

Les points caractéristiques d'une hypersurface Σ sont ceux définis par $T_x\Sigma = \ker\kappa(x)$. On note Car_Σ l'ensemble des points caractéristiques et $\Sigma^* = \Sigma \setminus \mathrm{Car}_\Sigma$ le complémentaire qu'on munit de la mesure naturelle :

$$d\mu = \omega d\sigma \qquad \text{avec} \qquad \omega(x) = \min\{1; \delta_{\mathbb{H}^d}(x, \mathrm{Car}\,\Sigma)\} \tag{14}$$

Le long de Σ, le poids ω est localement équivalent à la distance euclidienne à Car_Σ car à translation près on a, au voisinage d'un point caractéristique : $\Sigma \subset \{|t|^2 < \varepsilon(|p| + |q|)\}$. Lorsque Σ est le bord d'un ouvert régulier, [9] démontre que l'ensemble caractéristique est non-vide mais de mesure nulle.

Pour définir des espaces de Sobolev sur Σ, on s'intéresse à la structure des champs de vecteurs horizontaux, tangents à Σ.

Définition Un champ de vecteur R sur Σ est dit *bi-horizontal* s'il est horizontal pour la restiction de κ à Σ et s'annule aux points caractéristiques.

La structure de Car_Σ influence celle des champs bi-horizontaux. Dans la suite, on a besoin de l'hypothèse générique suivante dite de non-dégénérescence [2], [10] de Car_Σ.

Définition Un point de $x_0 \in \mathrm{Car}_\Sigma$ est dit *non-dégénéré* si $x_0 \notin \partial\Sigma$ et si l'une des conditons équivalentes est vérifiée :
- L'application $x \mapsto (\ker\kappa_x, \mathrm{T}_x\,\Sigma)$ à valeurs dans les couples d'hyperlans est transverse à la diagonale, au voisinage de x_0.
- Au voisinage de x_0 si $\gamma(p,q,t) = 0$ est une équation de Σ (avec $dg(x_0) \neq 0$) :

$$C^{-1}\,\omega(x)^2 \leq \sum_{j=1}^{2d} |(\mathcal{L}_{Z_j}\gamma)(x)|^2 \leq C\,\omega(x)^2. \tag{15}$$

- La κ-hessienne (non-symétrique) est non-dégénérée :

$$\mathrm{rg}_\mathbb{R} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Z_1}\mathcal{L}_{Z_1}\,g(x_0) & \cdots & \mathcal{L}_{Z_{2d}}\mathcal{L}_{Z_1}\,g(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ Z_1 Z_{2d}\,g(x_0) & \cdots & Z_{2d}Z_{2d}\,g(x_0) \end{pmatrix} = 2d.$$

Les points non-dégénérés sont nécessairement isolés sur Σ. Par exemple, la surface $\{t=0\}$ est non-dégénérée à l'origine, de même que la boule de jauge d'équation $p^4+q^4+t^2=\rho^4$ en ses pôles $(0,0,\pm\rho^2)$. Par contre, la surface $\{t=\alpha p^2+2\gamma pq+\beta q^2\}\subset\mathbb{H}^3$ est dégénérée à l'origine lorsque $\gamma^2-\alpha\beta=1$.

L'hypothèse de non-dégénérescence garantit que la famille de champs bi-horizontaux ont une structure naturelle de module de type fini. et le choix de $\mathcal{Z}$ sur $\mathbb{H}^d$ induit un choix naturel d'une famille ∇_* de générateurs bi-horizontaux.

Proposition 7 ([2]) *Lorsque* Car_Σ *est non-dégénéré, l'ensemble des champs bi-horizontaux est un module de type fini sur l'anneau des fonctions :*

$$f\in C^\infty(\Sigma^*)\qquad et\qquad |\nabla_\Sigma^\alpha f|\leq C_\alpha\omega^{-\alpha}. \tag{16}$$

Dans cette formule, utilise la notation multi-indice et ∇_Σ *désigne une base locale des champs tangents à* Σ*. Si* $\gamma(x)=0$ *est (localement) une équation de* Σ *avec* $d\gamma\neq 0$*, la famille*

$$R_{i,j}=(\mathcal{L}_{Z_i}\gamma)Z_j-(\mathcal{L}_{Z_j}\gamma)Z_i$$

est génératrice.

Par exemple, les champs bi-horizontaux de $\{t=0\}=\mathbb{R}^4\subset\mathbb{H}^3$ sont engendrés par : $j=p_1\partial_{p_1}+q_1\partial_{q_1}+p_2\partial_{p_2}+q_2\partial_{q_2}$, $k=p_2\partial_{p_1}-q_2\partial_{q_1}-p_1\partial_{p_2}+q_1\partial_{q_2}$ et $l=q_2\partial_{p_1}+p_2\partial_{q_1}-q_1\partial_{p_2}-p_1\partial_{q_2}$. Ces champs ont la structure suivante : $[j,k]=[j,l]=[j,m]=0$ et $[k,l]=2m$, $[l,m]=2k$, $[m,k]=2l$, le champ "manquant" étant : $m=q_1\partial_{p_1}-p_1\partial_{q_1}+q_2\partial_{p_2}-p_2\partial_{q_2}$.

Lorsque Car_Σ est non-dégénéré, on note ∇_* une famille génératrice du module des champs bi-horizontaux. D'autre part, on munit Σ de la distance δ_Σ associée à ces générateurs. Pour $d\geq 2$, cette distance jouit des propriétés suivantes (voir [15]) : $\delta_{\mathbb{H}^d}(x,y)\leq\delta_\Sigma(x,y)<+\infty$ pour tout $x,y\in\Sigma^*$; au voisinage de $x_0\in\mathrm{Car}\,\Sigma$:

$$\delta_\Sigma(x,y)\geq\left|\log\frac{\omega(x)}{\omega(y)}\right|+\vartheta(x,y)$$

avec $\vartheta(x,y)=\left|\frac{x}{\omega(x)}-\frac{y}{\omega(y)}\right|$. En particulier, $\delta_\Sigma(x,x_0)=\infty$ pour $x\in\Sigma^*$ et $x_0\in\mathrm{Car}_\Sigma$, alors que $\delta_{\mathbb{H}^d}(x,x_0)\simeq|x-x_0|_{\mathbb{R}^{2d+1}}$. De plus, il existe une constante $c_1>0$ telle que :

$$\delta_\Sigma(x,y)<c_1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}\leq\frac{\omega(x)}{\omega(y)}\leq 2.$$

Définition Si Car_Σ est non-dégénéré, on définit pour k entier

$$\|f\|^2_{H^k(\Sigma,\kappa)}=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{\Sigma^*}\frac{|\nabla_*^\alpha f|^2}{\omega^{2k}}\,d\mu. \tag{17}$$

On pose $Q'=2d+1$. Pour $s=k+\sigma$ (avec k entier et $0<\sigma<1$) :

$$\|f\|^2_{H^s(\Sigma,\kappa)}=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{\Sigma^*}\frac{|\nabla_*^\alpha f|^2}{\omega^{2s}}\,d\mu+\iint_{\Gamma'}\frac{|\nabla_*^k f(x)-\nabla_*^k f(y)|^2}{\delta_\Sigma(x,y)^{2\sigma}}\frac{d\mu_x\,d\mu_y}{\omega^{Q'+2s}\,\delta_\Sigma(x,y)^{2d+1}} \tag{18}$$

avec $\Gamma'=\{(x,y)\in\Sigma^*\times\Sigma^*\,;\,\delta_\Sigma(x,y)<c_1\}$.

Pour $0 \leq s < Q'/2$, l'espace $H^s(\Sigma, \kappa)$ ainsi défini est un espace de Hilbert et on montre [15] que les dérivations bi-horizontales envoient continûment $H^s(\Sigma, \kappa)$ dans $H^{s-1}(\Sigma, \kappa)$.

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de [15] qui décrit les traces des espaces de Sobolev sur $\mathbb{H}^d$ dans le cas où l'inclusion dans les fonctions continues n'est pas vérifiée.

Théorème 8 *Soit $\Sigma \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{H}^d$ une hypersurface du groupe de Heisenberg, régulière, ayant des points caractéristiques non-dégénérés discrets. Pour $1/2 < s < Q/2$, l'application de restriction*

$$i^* : f \in C^\infty(\mathbb{H}^d) \mapsto f \circ i \in C^\infty(\Sigma)$$

s'étend en un morphisme continu et surjectif :

$$i^* : H^s(\mathbb{H}^d) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma, \kappa). \tag{19}$$

4 Remarques diverses

Cette dernière section, plus informelle, contient un certain nombre d'observations et de commentaires sur les difficultés des différentes extensions possibles de la méthode et des résultats précédents.

4.1 Comparaison avec d'autres résultats

La littérature mathématique consacrée aux espaces de Sobolev d'ordre variable est en expansion rapide. Il ne sera donc pas possible de faire honeur à toutes les contributions. Pour ce qui est des travaux visant à décrire les traces des espaces de Sobolev d'ordre variable, [15] semble semble être la premier à traiter simultanément le cas $s \neq 1$ et $\mathrm{Car}_\Sigma \neq \emptyset$.

Le cas particulier $s = 1$ a été étudié par plusieurs auteurs, éventuellement dans un contexte plus général que celui du groupe de Heisenberg. Pour le cas non-caractéristique, on peut citer les Théorèmes 1.1-1.2 de [5] ou le Corollaire 3.3 de [11]. Le Théorème 1.2 de [2] traite des points caractéristiques non dégénérés sur $\mathbb{H}^d$. Le cas des hypersurfaces homogènes ayant un point caractéristique dégénéré est traité dans [3]. Cependant, dans tous ces résultats, l'espace des traces est construit sur $L^2(\Sigma)$ ou $L^p(\Sigma)$. Or, le Théorème 8 montre que le cas $s = 1$ est en fait extrêmement particulier. Le “bon” espace de base pour décrire les traces est, en général, un espace présentant un poids au voisinage de Car_Σ, avec un poids qui s'exprime comme une fonction élevée à la puissance $s - 1$.

En l'absence de points caractéristiques, [2] donne une caractérisation de l'espace des traces, pour toute régularité $s > 1/2$. Ce résultat repose sur un théorème de traces abstrait en calcul de Weyl-Hörmander et s'étend en particulier à toute famille de champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander d'ordre 2.

L'espace de traces peut aussi être décrit de façon très différente. Par exemple, en l'absence de point caractéristique, S. Berhanu et I. Pesenson [5] décrivent les traces de $H^1(\mathbb{H}^d)$ par

$$\|v\|^2_{L^2(\Sigma)} + \sum_{R \in \hat{\mathfrak{X}}_*} \int_0^\delta \vartheta^{-2} \sup_{|\tau| \leq \vartheta} \left\| (e^{\tau R} - \mathrm{Id}) v \right\|^2_{L^2(\Sigma)} d\vartheta \tag{20}$$

et démontrent un théorème de relèvement. Ce résultat se généralise aux espaces de Sobolev calqués sur L^p avec une famille de champs vérifiant la condition de Hörmander d'ordre fini et une surface de trace non-caractéristique.

Toujours sous l'hypothèse $\mathrm{Car}_\Sigma = \emptyset$, R. Monti and D. Morbidelli [11] démontrent que les traces de $H^1(\mathbb{H}^d)$ vérifient :

$$\|v\|^2_{L^2(\Sigma)} + \iint_{\substack{\Sigma\times\Sigma \\ d(x,y)\leq\delta}} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{\mathscr{D}_{\mathbb{H}^d}(x,y)} \frac{dx\,dy}{\mathrm{Vol}(B_{x,y}\cap\Sigma)} < \infty \tag{21}$$

avec $B_{x,y} = \{z \in \mathbb{H}^d\,;\, d(x,z) \leq d(x,y)\}$ et en notant Vol la mesure de surface sur Σ. Leur conclusion reste valable sous des hypothèses extrêmement générales. Par contre, ils ne démontrent pas de théorème de relèvement.

Il est d'ailleurs assez facile de vérifier que (21) n'est pas, en général, associé à un théorème de relèvement. Le contre-exemple le plus simple est celui du plan de Grushin $\mathbb{R}^2$ avec les champs de vecteurs ∂_{x_1} et $x_1\partial_{x_2}$. La droite $\Sigma = \{(0,x_2)\,;\, x_2\in\mathbb{R}\}$ est non-caractéristique. Le long de Σ, la distance sous-riemannienne est équivalente à $\sqrt{|x_2-x_2'|}$. Ainsi, (21) entraîne :

$$C^{-1}\iint_{|x_2-x_2'|<1} \frac{|u(0,x_2)-u(0,x_2')|^2}{|x_2-x_2'|}\,dx_2\,dx_2' \leq \|\partial_{x_1}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|x_1\partial_{x_2}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.$$

Cependant, l'espace des traces (*i.e.* sur lequel l'opérateur est surjectif) est $H^{1/4}(\Sigma)$: une preuve particulièrement simple est donnée comme exemple d'application du Théorème 1.2 de [2] ; on peut aussi s'en convaincre en remarquant que la norme $\|u(0,\cdot)\|_{\dot{H}^{1/4}(\Sigma)}$ est homogène à

$$\|\partial_{x_1}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|x_1\partial_{x_2}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

pour la transformation d'échelle $u(x_1,x_2)\mapsto u(\lambda x_1,\lambda^2x_2)$. L'impossibilité d'avoir un théorème de relèvement indique que la régularité des traces sur Σ ne peut pas, en général, être décrite au moyen de la seule distance de Carnot ambiante et qu'il est nécessaire d'étudier plus en détail la géométrie du problème. D'où par exemple, notre hypothèse de non-dégénérescence.

4.2 Problèmes ouverts autour de l'inégalité de Hardy

L'inégalité de Hardy *i.e.* une inégalité qui contrôle la multiplication par des puissances fractionnaires négatives de la distance de Carnot dans les classes de Sobolev peut être obtenue avec plus ou moins de succès, dans des contextes plus généraux que celui du groupe de Heisenberg.

On peut par exemple envisager d'étudier l'inégalité de Hardy dans un contexte non hilbertien. Dans ce cas, il serait souhaitable de disposer d'une preuve indépendante du paraproduit et des techniques d'analyse de Fourier. Dans $\mathbb{R}$, on peut trouver [8] une jolie démonstration qui repose sur la représentation intégrale du Théorème 2. Cette preuve se généralise facilement aux espace isotropes $H^s(\mathbb{R}^n)$: l'idée est d'intégrer $|u(x)| \leq |u(x)-u(y)| + |u(y)|$ sur une variable auxiliaire y telle que $|x|\sim|x-y|$. Le domaine auxiliaire est ensuite judicieusement restreint pour que l'intégrale parasite en $|u(y)|$ soit contrôlée par le membre de gauche. L'extension au cas anisotrope et surtout, au cas d'une famille de champs de vecteurs ne semble malheureusement pas si évidente…

L'article [3] met en œuvre une méthode d'éclatement analogue à celle exposée ici, pour traiter le cas de certains points caractéristiques dégénérés. Les auteurs utilisent une inégalité de Hardy par rapport à Car_Σ qui n'est plus alors, un objet ponctuel mais est supposé être une surface régulière.

Dans sa thèse [14], l'auteur a obtenu une inégalité de Hardy pour toutes les familles de champs de vecteurs vérifiant (uniformément) la condition de Hörmander d'ordre 2 ou 3 ainsi que dans certains cas d'ordre supérieur. L'extension à des familles générales d'ordre supérieur à 4 est ouvert.

Le théorème de Rothschild-Stein fournit une machinerie pour relever l'étude des familles de champs (considérés comme opérateurs différentiels) vérifiant la condition de crochet au cas des groupes nilpotents.

Théorème 9 ([13]) *Soit M une variété de dimension d et $(Z_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille de champs de vecteurs sur M vérifiant la condition de Hörmander d'ordre r. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U dans M, un ouvert $U' \subset \mathbb{R}^{\dim(G_{n,r})-d}$ et des champs $\tilde{Z}_j$ sur $\tilde{U} = U \times U'$ qui vérifient la condition de crochet d'ordre k et les propriétés suivantes :*

- *si $\pi : \tilde{U} \to U$ désigne la projection canonique, on a $\pi_*(\tilde{Z}_j) = Z_j$,*
- *$\forall \xi \in \tilde{U}, \quad \exists \vartheta_\xi : \tilde{U} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Vois}_{\mathrm{Id}}(N_{n,r})$ tel que $\vartheta_\xi(\eta)\cdot\vartheta_\eta(\xi) = \mathrm{Id}_{N_{n,r}}$ et les $(\vartheta_\xi)_* Z_j$ sont, à un opérateur régularisant près, des générateurs de $\mathfrak{n}_{n,r}$.*

Même si le cas nilpotent est un peu plus facile, l'utilisation effective de ce résultat dans la démonstration d'inégalités de Hardy est aussi un problème ouvert.

4.3 Sur l'usage de l'inégalité de Hardy

Une dernière remarque s'impose. En effet, le cas particulier traité dans la Section 2 pourrait laisser croire que l'inégalité de Hardy est essentiellement suffisante à la mise en oeuvre de la méthode d'éclatement. En fait, on a besoin d'un peu plus. Le résultat suivant s'obtient dans les mêmes lignes que celles de la section §2.6, avec la généralisation de la théorie de Littlewood-Paley construite par H. Bahouri, P. Gérard et C.J. Xu [4].

Théorème 10 *Pour tout couple $(\varsigma, \sigma) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $\sigma + \varsigma < Q/2$, il existe une constante $C_{\sigma,\varsigma} > 0$ telle que*

$$\left\| \frac{v}{\|x\|_g^\varsigma} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)} \leq C_{\sigma,\varsigma} \|v\|_{H^{\sigma+\varsigma}(\mathbb{H}^d)} \tag{22}$$

pour toute fonction v dans $H^{\sigma+\varsigma}(\mathbb{H}^d)$.

On utilise effectivement cette inégalité plus forte pour montrer que pour toute fonction radiale régulière φ supportée dans une couronne et $s < Q/2$:

$$\sum_{m\geq 0} \|\varphi_m u\|^2_{H^s(\mathbb{H}^d)} \lesssim \|u\|^2_{H^s(\mathbb{H}^d)} \tag{23}$$

avec $\varphi_m(p,q;t) = \varphi(2^m p, 2^m q; 2^{2m} t)$. Le cas où s est entier est facile (c'est essentiellement l'identité de de Leibnitz et une intégration par parties). Entre les entiers, on procède par interpolation complexe. Cependant, dans le cas extrème $s = k + \sigma$ avec $(k, \sigma) \in \mathbb{N}\times]0,1[$ et par exemple, $s > \frac{Q}{2} - 1$, on ne peut plus procéder par interpolation (le cas limite est faux). On utilise alors plutot l'inégalité translatée (22). La formule de Leibnitz donne :

$$\sum_{m\geq 0} \|\varphi_m u\|^2_{H^s(\mathbb{H}^d)} \leq \sum_{m\geq 0} \|\varphi_m u\|^2_{H^k(\mathbb{H}^d)} + \sum_{\substack{m\geq 0 \\ |\alpha|+|\beta|=k}} \left\| \varphi_{m,\alpha} \cdot \frac{\hat{\mathfrak{X}}^\beta u}{\|x\|_g^{|\alpha|}} \right\|^2_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)}.$$

La première somme est bornée par $\|u\|^2_{H^k(\mathbb{H}^d)}$ d'après le cas d'indice entier k. Pour la seconde somme, on applique l'inégalité (23) pour $s = \sigma \in [0,1]$ en remplaçant φ_m par $\varphi_{m,\alpha}$ (cette fois, l'interpolation est valide). Ainsi :

$$\sum_{m\geq 0} \left\| \varphi_{m,\alpha} \cdot \frac{\hat{\mathfrak{X}}^\beta u}{\|x\|_g^{|\alpha|}} \right\|^2_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)} \leq C \left\| \frac{\hat{\mathfrak{X}}^\beta u}{\|x\|_g^{|\alpha|}} \right\|^2_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)}.$$

On conclut alors avec (22). Les détails sont contenus dans [14].

Références

[1] **H. Bahouri**, **J.-Y. Chemin**, **I. Gallagher**, *Inégalités de Hardy précisées*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris *341* (2005), N.2, 89–92.

[2] **H. Bahouri**, **J.-Y. Chemin**, **C.-J. Xu**, *Trace and trace lifting theorems in weighted Sobolev spaces*, J. Inst. Math. Jussieu *4* (2005), N.4, 509–552.

[3] **H. Bahouri**, **J.-Y. Chemin**, **C.-J. Xu**, *Trace theorem on the Heisenberg group*, Proceedings of the Conference on Phase Space Analysis of PDE, Pienza *2005* (à paraître).

[4] **H. Bahouri**, **P. Gérard**, **C.-J. Xu**, *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg*, J. Anal. Math. *82* (2000), 93–118.

[5] **S. Berhanu**, **I. Pesenson**, *The trace problem for vector fields satisfying Hörmander's condition*, Math. Z. *231* (1999), N.1, 103–122.

[6] **P. Bolley**, **J. Camus**, **J. Nourrigat**, *La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels*, Comm. Partial Differential Equations *7, no. 2* (1982), 197–221.

[7] **J.-M. Bony**, **J.-Y. Chemin**, *Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander*, Bull. Soc. math. France *122* (1994), 77–118.

[8] **H. Brezis**, **P. Mironescu**, **A. Ponce**, *Complements to the paper $W^{1,1}$-maps with values into $\mathbb{S}^1$*. in A.M.S., Contemp. Math. *368* (2005).

[9] **M. Derridj**, *Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques*, Ann. Inst. Fourier *21* (1971), N.4, 99–148.

[10] **D.S. Jerison**, *The Dirichlet problem for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group, I - II*, J. Funct. Anal. *43* (1981), N.1, 97–142 & N.2, 224–257.

[11] **R. Monti**, **D. Morbidelli**, *Trace theorems for vector fields*, Math. Z. *239* (2002), N.4, 747–776.

[12] **S. Mustapha**, **F. Vigneron**, *Construction of Sobolev spaces of fractional order with sub-riemannian vector fields*, Annales de l'Institut Fourier *57* (2007).

[13] **L.P. Rothschild**, **E.M. Stein**, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. *137, no. 3-4* (1976), 247–320.

[14] **F. Vigneron**, *Localisation et décroissance des champs de la mécanique des fluides et des plasmas. Espaces fonctionnels associés à une famille de champs de vecteurs.* Thèse de doctorat de l'École polytechnique (2006).

[15] **F. Vigneron**, *The trace problem for weighted Sobolev spaces over the Heisenberg group*, Journal d'Analyse Mathématique (à paraître).