Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2005-2006

Patrick Gérard

Sur le caractère bien posé des équations de Schrödinger non linéaires

Séminaire É. D. P. (2005-2006), Exposé n° XVI, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2005-2006____A16_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

SUR LE CARACTÈRE BIEN POSÉ DES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRES

par

P. Gérard

1. Introduction

Le but de cet exposé est de présenter un état de l'art sur la question suivante : quand peut-on dire qu'une équation de Schrödinger non linéaire est bien posée ? On s'inspirera pour cela de différents résultats sur le problème de Cauchy pour une telle équation, en particulier ceux qui concernent les milieux inhomogènes.

Précisons d'abord le cadre général dans lequel nous nous plaçons.

On désigne par M soit l'espace $\mathbb{R}^d$ (premier cas), soit une variété compacte sans bord (second cas) de dimension d. On munit M d'un opérateur différentiel P admettant la structure suivante :

– dans le premier cas,

$$Pu = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}(A\nabla u)$$

où $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à valeurs réelles positives, $A \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à valeurs dans les matrices symétriques réelles d'ordre d définies positives, avec les estimations

$$c \le \rho(x) \le C \ , \ cI \le A(x) \le CI \ , \ |\partial^\alpha \rho(x)| + |\partial^\alpha A(x)| \le C_\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{N}^d \ .$$

On introduit alors la densité $d\mu(x) = \rho(x)\,dx$.

– dans le second cas, P est un opérateur différentiel elliptique du second ordre, à coefficients réels, formellement autoadjoint positif relativement à une densité μ C^∞ partout strictement positive sur M, et vérifiant $P(1) = 0$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35Q55, 35BXX, 37K05, 37L50, 81Q20 .

Un exemple typique est bien sûr $P = -\Delta_g$, où g est une métrique riemannienne vérifiant en outre, dans le premier cas,

$$\gamma I \leq g(x) \leq \Gamma I \ , \ |\partial^\alpha g(x)| \leq \Gamma_\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{N}^d \ ,$$

$d\mu$ étant alors l'élément de volume riemannien.

Sous ces hypothèses générales, P est un opérateur autoadjoint positif sur $L^2(M, \mu)$, et, si $s \geq 0$, le domaine de $P^{s/2}$ n'est autre que l'espace de Sobolev $H^s(M)$.

L'équation de Schrödinger non linéaire prend alors la forme suivante :

$$i\frac{\partial u}{\partial t} - Pu = F(u) \ , \ u(0) = u_0 \ , \tag{1.1}$$

où l'inconnue $u = u(t, x)$ est une fonction sur $\mathbb{R} \times M$ à valeurs complexes, et où nous supposerons pour simplifier que $F \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et $F(0) = 0$.

Rappelons que, si F est de la forme

$$F(z) = \frac{\partial V}{\partial \overline{z}} \ , \ V : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \ , \tag{1.2}$$

alors l'équation (1.1) est hamiltonienne, associée à l'énergie

$$H(u) = \int_M (Pu\,\overline{u} + V(u))\, d\mu \ , \tag{1.3}$$

qui est donc formellement conservée au cours du temps. De plus, si l'on suppose l'invariance supplémentaire

$$V(\mathrm{e}^{i\theta} z) = V(z) \ , \ \theta \in \mathbb{R} \ , \tag{1.4}$$

alors la norme L^2 de u est également conservée au cours du temps.

Introduisons maintenant trois notions différentes de problème bien posé pour une telle équation, en commençant par la moins restrictive.

Définition 1.1. — *On dit que le problème (1.1) est bien posé sur $H^s(M)$ si, pour toute partie bornée B de $H^s(M)$, il existe $T > 0$ et un espace de Banach de fonctions X_T continûment inclus dans l'espace $C([-T, T], H^s(M))$ tels que l'on ait les trois propriétés suivantes :*

i) Pour toute donnée de Cauchy $u_0 \in B$, le problème (1.1) admet une unique solution $u \in X_T$.

ii) S'il existe $\sigma > s$ tel que $u_0 \in H^\sigma(M)$, alors $u \in C([-T, T], H^\sigma(M))$.

iii) L'application $u_0 \in B \mapsto u \in X_T$ est continue.

La définition ci-dessus englobe un grand nombre d'équations d'évolution considérées traditionnellement comme bien posées. On prendra garde néanmoins au fait qu'elle ne couvre pas certaines équations critiques, comme par exemple l'équation de Schrödinger cubique focalisante sur $M = \mathbb{R}^2$ euclidien,

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = -|u|^2 u \ , \ u(0) = u_0 \ , \tag{1.5}$$

D'après un résultat classique de Cazenave-Weissler [**14**], on sait que, pour toute donnée $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe $T > 0$ et une unique solution u dans l'espace $X_T = C([-T,T], L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^4([-T,T] \times \mathbb{R}^2)$, avec de plus la propriété de régularité ii). Par ailleurs, il est connu depuis Zakharov [**28**] que certaines de ces solutions explosent en temps fini, au sens où la borne supérieure T_{max} des temps d'existence T est finie. Si u est l'une de ces solutions, on constate que, pour tout $\lambda > 0$, la fonction u_λ définie par

$$u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

est encore solution, que sa donnée initiale $\lambda u_0(\lambda x)$ décrit un ensemble borné de L^2 lorsque λ varie, et que pourtant le temps maximum d'existence pour u_λ est

$$T_{max}(\lambda) = \lambda^{-2} T_{max}$$

qui tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Ce problème n'est donc pas bien posé au sens de la définition 1.1.

La seconde notion de problème bien posé ajoute à la précédente une exigence de stabilité à haute fréquence.

Définition 1.2. — *On dit que le problème (1.1) est uniformémement bien posé sur $H^s(M)$ s'il est bien posé sur $H^s(M)$ et si, avec les notations de la définition 1.1, l'application $u_0 \in B \mapsto u \in X_T$ est uniformément continue.*

Comme on le verra plus loin, cette notion est très naturelle pour beaucoup d'équations du type (1.1). En revanche, elle ne l'est pas pour les systèmes hyperboliques quasi-linéaires, comme le montre l'exemple élémentaire suivant : sur $M = \mathbb{S}^1$, on considère le système

$$\partial_t u + v\partial_x u = 0 \ , \ \partial_t v = 0 \ , \ (u,v)(0) = (u_0, v_0) \ ,$$

dont la solution est trivialement, si v_0 est une fonction constante,

$$u(t,x) = u_0(x - tv_0) \ , \ v(t,x) = v_0 \ .$$

Si $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ est une donnée du même type, la distance entre les deux solutions (u, v) et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ dans $H^s(M)$ est

$$\|u_0(x - t(v_0 - \tilde{v}_0)) - u_0(x)\|_{H^s} + O(\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s}) + |v_0 - \tilde{v}_0| \ .$$

Ainsi, pour $T > 0$ et $A > 0$ donnés, l'uniforme continuité de l'application

$$(u_0, v_0) \in B \times [-A, A] \mapsto (u, v) \in C([-T, T], H^s(M))$$

impose

$$\sup_{u_0 \in B} \|u_0(x + th) - u_0(x)\|_{H^s} \to 0$$

lorsque h tend vers 0, ce qui n'est vérifié que si B est relativement compact dans H^s. D'autres contre-exemples de ce type peuvent être trouvés dans [**26**].

Enfin, venons-en à la notion la plus restrictive de problème bien posé, dont on verra au paragraphe suivant qu'elle est très sensible au propriétés algébriques de la non-linéarité F.

Définition 1.3. — *On dit que le problème (1.1) est régulièrement bien posé sur $H^s(M)$ s'il est uniformément bien posé sur $H^s(M)$ et si, avec les notations de la définition 1.1, l'application $u_0 \in \mathring{B} \mapsto u \in X_T$ est C^∞.*

Pour terminer cette introduction, remarquons que les trois notions ci–dessus concernent une résolubilité *locale* en temps. En les combinant avec les lois de conservations déjà évoquées (pourvu que s soit assez petit), elles entraînent des propriétés globales en temps. Cette remarque constitue l'une des motivations de la recherche de la borne inférieure des s pour lesquels le problème est bien posé.

Le but de cet exposé est de discuter la pertinence de ces trois notions pour l'équation (1.1) en passant en revue les résultats connus et les problèmes ouverts.

2. Problèmes régulièrement bien posés

2.1. Généralités. — L'estimation bien connue

$$\|F(u)\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s} \ ,$$

lorsque u varie dans un borné de H^s, permet de montrer aisément le résultat suivant :

Proposition 2.1. — *Si $s > \frac{d}{2}$, le problème (1.1) est régulièrement bien posé sur $H^s(M)$.*

Voici une réciproque partielle de ce résultat.

Proposition 2.2. — *Si k est un entier ≥ 2, le problème (1.1) n'est pas régulièrement bien posé sur $H^s(M)$ si $s < \frac{d}{2} - \frac{2}{k-1}$.*

Esquisse de la démonstration : supposons que le problème (1.1) soit régulièrement bien posé sur $H^s(M)$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soit n un grand entier. On pose

$$u_0(x) = n^{d/2-s}\varphi(nx) \ .$$

Notons que u_0 a un sens même si M est une variété (en utilisant des coordonnées locales) et reste bornée dans H^s. On estime les différentielles successives au point 0 de l'application flot $\Phi_t : u(0) \mapsto u(t)$ associée à (1.1), dans la direction u_0 et pour un temps t tel que

$$|t| \leq \frac{1}{n^{2+\delta}},$$

où $\delta > 0$ est arbitraire. Par exemple, $v_1(t) = D\Phi_t(0).u_0$ est caractérisée par

$$i\frac{\partial v_1}{\partial t} - Pv_1 = DF(0).v_1 \ , \ v_1(0) = u_0 \ ,$$

ce qui, compte tenu de la taille de t, assure que

$$v_1(t) \simeq u_0$$

dans tous les $H^{s+\sigma}$, $\sigma \geq 0$. Plus généralement, en combinant la formule de Faá di Bruno et la formule de Duhamel, on montre aisément par récurrence que, pour tout $l \geq 2$, pour tout $\sigma \geq 0$, la fonction $v_l(t) = D^l\Phi_t(0)(u_0, \cdots, u_0)$ vérifie

$$\|v_l(t)\|_{H^{s+\sigma}} \leq C_\sigma \, |t| \, n^{\sigma+(\frac{d}{2}-s)(l-1)} \ .$$

Il en résulte que

$$v_k(t) \simeq tD^kF(0)(u_0, \cdots, u_0)$$

dans H^s, et l'estimation de continuité

$$\|v_k(t)\|_{H^s} \leq C\|u_0\|_{H^s}^k$$

impose finalement

$$(k-1)\left(\frac{d}{2} - s\right) \leq 2 + \delta \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. Par exemple, si M est une variété compacte, en translatant l'espace des phases par une constante arbitraire, on en déduit que

Corollaire 2.3. — *Si M est une variété compacte et si F n'est pas polynomiale, le problème (1.1) n'est pas régulièrement bien posé sur $H^s(M)$ si $s < \frac{d}{2}$.*

Dans le cas $s = d/2$, notons que (1.1) est régulièrement bien posé sur $H^s(M)$ lorsque F a toutes ses dérivées bornées, à cause de l'inégalité de Coifman

$$\|F(u)\|_{H^{d/2}} \leq C\|u\|_{H^{d/2}}$$

sur un borné de $H^{d/2}$.

En résumé, le caractère régulièrement bien posé est très restrictif dans le cas d'une fonction non-linéaire F qui n'est pas polynomiale. En revanche, si F est polynomiale et dérive d'un potentiel admettant l'invariance de jauge (1.4), il est intimement lié aux estimations de Strichartz multilinéaires, qui à l'heure actuelle fournissent l'approche optimale des équations du type (1.1) dans les milieux inhomogènes.

2.2. L'équation cubique et les estimations de Strichartz bilinéaires. — Avant d'expliciter ce lien, introduisons une définition commode : si N est un nombre entier dyadique, on conviendra de dire qu'une fonction f sur M est *P-localisée à la fréquence N* si

$$\mathbf{1}_{[N,2N]}(P)f = f \ .$$

Définition 2.4. — *On dit que le groupe unitaire $t \mapsto \mathrm{e}^{-itP}$ vérifie une* estimation de Strichartz bilinéaire d'ordre $s \geq 0$ *s'il existe $C > 0$ tel que, pour tous les entiers dyadiques N, L, pour toutes les fonctions u_0, v_0 sur M qui sont respectivement P-localisées aux fréquences N, L, les fonctions u, v définies sur $\mathbb{R} \times M$ par*

$$u(t) = \mathrm{e}^{-itP}u_0 \ , \ v(t) = \mathrm{e}^{-itP}v_0$$

satisfont à l'inégalité

$$\|uv\|_{L^2([0,1]\times M)} \leq C \min(N, L)^s \, \|u_0\|_{L^2(M)} \, \|v_0\|_{L^2(M)} \ .$$

Notons qu'une estimation de Strichartz bilinéaire d'ordre s entraîne en particulier l'estimation

$$\|u\|_{L^4([0,1]\times M)} \lesssim \|u_0\|_{H^{s/2}(M)}$$

mais que, en outre, elle permet de contrôler favorablement les interactions entre facteurs de haute et de basse fréquence, ce qui est précieux dans l'analyse des termes non linéaires.

Le lien entre les estimations de Strichartz bilinéaires et le caractère régulièrement bien posé pour l'équation de Schrödinger cubique est explicité par le théorème suivant :

***Théorème 1* (Burq-Gérard-Tzvetkov [9]).** — *On suppose que $F(z) = \pm|z|^2 z$. Soit $s \geq 0$.*

i) Si le problème (1.1) est régulièrement bien posé sur $H^s(M)$, alors le groupe unitaire $t \mapsto \mathrm{e}^{-itP}$ vérifie une estimation de Strichartz bilinéaire d'ordre s.

ii) Si le groupe unitaire $t \mapsto \mathrm{e}^{-itP}$ vérifie une estimation de Strichartz bilinéaire d'ordre s, alors le problème (1.1) est régulièrement bien posé sur $H^{s'}(M)$ pour tout $s' > s$.

Les démonstrations des parties i) et ii) sont de difficultés inégales. En supposant par exemple $N \leq L$, la première partie se démontre en remarquant d'une part que

$$\left|\langle D^3\Phi_1(0)(u_0, u_0, v_0)|\mathrm{e}^{-iP} v_0\rangle_{L^2(M)}\right| \geq c\|uv\|^2_{L^2([0,1]\times M)}$$

pour un certain $c > 0$, et en écrivant d'autre part la continuité de $D^3\Phi_1(0)$ sur H^s sous la forme

$$\left|\langle D^3\Phi_1(0)(u_0, u_0, v_0)|\mathrm{e}^{-iP} v_0\rangle_{L^2(M)}\right| \leq C\, \|u_0\|^2_{H^s}\, \|v_0\|_{H^s}\, \|v_0\|_{H^{-s}}\,.$$

La deuxième partie requiert plus de machinerie et est une adaptation de l'analyse introduite par Bourgain dans [**2**] pour le cas du tore. On considère l'échelle d'espaces

$$X^{\sigma,b}(P, \mathbb{R}\times M) = \{v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times M)\ :\ (1 + |i\partial_t - P|^2)^{b/2}\, (1+P)^{\sigma/2} v \in L^2(\mathbb{R}\times M)\}$$

pour $\sigma, b \in \mathbb{R}$, et on montre que l'estimation de Strichartz bilinéaire d'ordre s entraîne, pour tout $s' > s$, l'inégalité

$$\|v_1\overline{v}_2 v_3\|_{X^{s',-b'}(P)} \leq C\, \|v_1\|_{X^{s',b}(P)}\, \|v_2\|_{X^{s',b}(P)} \|v_3\|_{X^{s',b}(P)}$$

avec des nombres b, b' vérifiant $0 < b' < \frac{1}{2} < b\,,\ b + b' < 1$. Cette inégalité permet de résoudre l'équation de Duhamel

$$u(t) = \mathrm{e}^{-itP} u_0 - i\int_0^t \mathrm{e}^{-i(t-t')P} F(u(t'))\, dt'$$

par un argument de point fixe dans l'espace restriction

$$X^{s',b}(P, [-T,T]\times M) \subset C([-T,T], H^{s'}(M))\,,$$

pour $T > 0$ assez petit.

En vertu du théorème 1, le seuil s_c de régularité au-delà duquel le problème (1.1) est régulièrement bien posé coïncide avec la borne inférieure des ordres des inégalités de Strichartz bilinéaires. Comme on va le voir, ce seuil dépend de l'opérateur P. Bien entendu, on a toujours $s_c \leq d/2$ grâce à la proposition 2.1, ce que l'on peut aussi retrouver grâce au théorème ci-dessus en écrivant, si $N \leq L$,

$$\|uv\|_{L^2([0,1]\times M)} \lesssim \|u\|_{L^\infty([0,1]\times M)}\|v\|_{L^2([0,1]\times M)} \lesssim N^{d/2}\, \|u_0\|_{L^2(M)}\, \|v_0\|_{L^2(M)} \ ,$$

grâce à l'injection de Sobolev sur les fonctions spectralement localisées et à la conservation de la norme L^2. Néanmoins, cette estimation peut être améliorée en tenant compte des propriétés dispersives de P.

2.2.1. Le cas euclidien. — Commençons par rappeler ce qui concerne le laplacien euclidien sur $\mathbb{R}^d$. Si $d = 1$, l'inégalité de Strichartz généralisée (voir Ginibre-Velo [**19**])

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}_t, L^\infty(\mathbb{R}_x))} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

assure une inégalité de Strichartz bilinéaire avec $s = 0$, et même, grâce à un argument de Tsutsumi [**25**], que le problème (1.1) est régulièrement bien posé sur $L^2(\mathbb{R})$. Si $d = 2$, l'inégalité de Strichartz [**24**] s'écrit

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_x)} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ ,$$

de sorte que l'on dispose, grâce à l'inégalité de Hölder, d'une inégalité de Strichartz bilinéaire d'ordre 0. On peut même améliorer cette estimation lorsque $N << L$ par un facteur $\sqrt{NL^{-1}}$ (voir Bourgain [**6**]).

On obtient donc bien sûr que (1.1) est régulièrement bien posé sur H^s pour tout $s > 0$, mais, comme on l'a déjà vu dans l'introduction, ceci est faux pour le cas critique $s = 0$ si $F(z) = -|z|^2 z$. En conséquence, l'assertion ii) du théorème 1 ne peut pas être généralisée au cas $s' = s$. Le cas critique pour la non–linéarité défocalisante $F(z) = |z|^2 z$ est quant à lui un problème ouvert important.

En dimension $d \geq 3$, on obtient de la même manière une inégalité bilinéaire d'ordre $\frac{d-2}{2}$, et donc un problème régulièrement bien posé pour $s > \frac{d-2}{2}$. Le seuil $s_c = \frac{d-2}{2}$ est celui que fournit une analyse formelle par changement d'échelle, et les résultats de Christ-Colliander-Tao [**15**] montrent que (1.1) est effectivement mal posé sur H^s pour $s < s_c$ (voir aussi le paragraphe 4). En dimension $d = 4$, le cas critique $s = s_c = 1$ pour la non–linéarité défocalisante $F(z) = |z|^2 z$ été traité récemment par Ryckman et Visan [**23**].

2.2.2. Un résultat couvrant toutes les géométries. — Passons au cas général. L'inégalité de Strichartz bilinéaire dont on dispose actuellement (*cf.* [**7**]) est d'ordre $s = \frac{d-1}{2} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui représente une perte de $\frac{1}{2}$ par rapport au cas euclidien. La raison principale est de nature technique : il est très difficile d'avoir accès microlocalement à la solution $u(t) = \mathrm{e}^{-itP}u_0$, sauf pour des temps t ne dépassant pas la longueur d'onde de u_0, c'est–à–dire $1/N$. Pour de tels temps, la méthode BKW fournit une description très précise qui conduit aux mêmes inégalités de Strichartz que dans le cas euclidien, mais sur des intervalles de temps de taille $1/N$, c'est–à–dire, pour $d \geq 2$,

$$\|u\|_{L^2(I,L^\infty(M))} \lesssim N^{\frac{d-2}{2}+\varepsilon}\|u_0\|_{L^2(M)} \ , \ |I| \simeq \frac{1}{N} \ ,$$

le terme ε pouvant par ailleurs etre omis dès que $d \geq 3$. En sommant les contributions de N intervalles de cette taille recouvrant l'intervalle $[0,1]$, on obtient

$$\|u\|_{L^2([0,1],L^\infty(M))} \lesssim N^{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}\|u_0\|_{L^2(M)} \ ,$$

et finalement l'estimation bilinéaire annoncée se déduit de

$$\|uv\|_{L^2([0,1]\times M)} \lesssim \|u\|_{L^2([0,1],L^\infty(M))}\,\|v\|_{L^\infty([0,1],L^2(M))} \ .$$

Pour des géométries plus spécifiques, ces estimations peuvent encore être améliorées.

2.2.3. Quelques cas particuliers. — Nous nous restreindrons aux cas les plus étudiés, à savoir le laplacien sur les tores (*cf.* Bourgain [**2**], [**3**]) et sur les sphères (*cf.* Burq, Tzvetkov et l'auteur [**7**], [**9**], [**10**]).

Dans le cas du tore $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$, $d \geq 2$, un développement en série de Fourier, combiné à une estimation classique de théorie des nombres relatives au nombre de représentations d'un entier comme somme de carrés d'entiers, fournit encore une estimation bilinéaire d'ordre $s = \frac{d-2}{2} + \varepsilon$, c'est–à–dire que l'on retrouve le seuil euclidien. Le cas de tores admettant des périodes incommensurables est un problème difficile, et on ne dispose actuellement que de résultats partiels (*cf.* Bourgain [**5**]).

Dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^d$, $d \geq 2$, on procède là encore par décomposition en fonctions propres. Le caractère très particulier du spectre du laplacien permet, au moyen des mêmes résultats d'arithmétique, de se ramener sans perte de dérivée à des estimations bilinéaires sur les harmoniques sphériques. On obtient ainsi encore le seuil euclidien pour $d \geq 3$, mais, pour $d = 2$, on obtient $s_c = \frac{1}{4}$, cet exposant étant obtenu en testant l'estimée bilinéaire sur la suite d'harmoniques sphériques

$$H_n(x) = (x_1 + ix_2)^n \ , \tag{2.1}$$

où (x_1, x_2, x_3) désigne les coordonnées cartésiennes du point courant de la sphère plongée dans $\mathbb{R}^3$. Notons que H_n se concentre exponentiellement sur le grand cercle $x_3 = 0$.

Dans le cas critique sur $\mathbb{S}^d$ pour $d \geq 3$, on peut montrer (*cf.* [**7**]) que l'estimation bilinéaire d'ordre critique $s_c = \frac{d-2}{2}$ est fausse ; en particulier, si $d = 4$, l'équation cubique n'est pas régulièrement bien posée sur l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{S}^4)$, ce qui contraste avec le théorème de Ryckman et Visan cité plus haut (cas euclidien) ; à noter que, dans le cas défocalisant, il est pourtant possible de construire des solutions faibles au problème de Cauchy. Notre résultat montre donc qu'il est impossible de sélectionner de telles solutions pour construire un flot régulier dans la régularité critique H^1.

Enfin, signalons que, pour des variétés telles que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, on obtient par des méthodes analogues la majoration $s_c \leq \frac{3}{4}$ ([**10**]), mais on ignore si celle-ci est optimale.

Pour des non-linéarités polynomiales du type $F(z) = \pm |z|^{2(k-1)} z$, on peut développer de même un lien avec des estimations de Strichartz k-linéaires, *cf.* [**17**] pour un survol et [**10**], [**11**] pour le cas particulier $k = 3$.

3. Problèmes uniformément bien posés

Dans ce paragraphe, nous sélectionnons et comparons deux types de résultats sur le caractère uniformément bien posé de (1.1). L'un utilise les estimations de Strichartz généralisées sur l'espace euclidien ; l'autre a recours aux inégalités de Strichartz bilinéaires et est optimal sur les sphères. Pour fixer les idées, on se donne $\alpha > 0$ et on choisit comme non-linéarité

$$F_\alpha(z) = (1 + |z|^2)^{\alpha/2} z \ .$$

3.1. Le cas euclidien. — Les estimations de Strichartz généralisées, dues à Strichartz[**24**], Ginibre-Velo [**19**], Yajima [**27**] et pour les cas limites à Keel-Tao [**22**], prennent la forme suivante. Un couple (p, q) d'exposants dans $[1, \infty]$ est dit d-admissible si

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} \ , \ p \geq 2 \ , \ (p, q) \neq (2, \infty). \tag{3.1}$$

Dans la proposition qui suit, $\overline{p}$ désigne l'exposant conjugué de p.

Proposition 3.1 **([24], [19], [27], [22]).** — *Soient $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ des couples d-admissibles. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, pour tout $T > 0$ et $f \in L^{\overline{p}_1}([0, T], L^{\overline{q}_1}(\mathbb{R}^d))$, la solution u de*

$$i\partial_t u + \Delta u = f \ , \ u(0) = u_0 \ ,$$

vérifie $u \in L^{p_2}([0,T], L^{q_2}(\mathbb{R}^d))$ *et l'inégalité*

$$\|u\|_{L^{p_2}([0,T],L^{q_2}(\mathbb{R}^d))} \leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^{\overline{p}_1}([0,T],L^{\overline{q}_1}(\mathbb{R}^d))}\right) . \tag{3.2}$$

En utilisant ces estimations comme dans Kato [**21**], Cazenave-Weissler [**14**], Tsutsumi [**25**] et Yajima [**27**], on montre le résultat suivant.

Théorème 2. — *Si* $d \leq 6$, *le problème (1.1) avec* $F = F_\alpha$ *est uniformément bien posé sur* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *pour tout* s *vérifiant*

$$s \geq 0\ ,\ s > \frac{d}{2} - \frac{2}{\alpha}\ .$$

Notons que ce théorème est optimal en ce sens que, si $0 < s < \frac{d}{2} - \frac{2}{\alpha}$, alors (1.1) avec $F = F_\alpha$ est mal posé (voir Christ-Colliander-Tao [**15**], l'appendice de [**10**] et la section 4).

Notons aussi comme corollaire que, pour $\alpha > 0$ assez petit, on obtient un problème uniformément bien posé sur H^s pour tout $s \geq 0$. On verra plus loin qu'il n'en est rien sur les sphères.

3.2. Equations sous-cubiques et estimations de Strichartz bilinéaires. — En combinant les outils de la démonstration de la partie ii) du théorème 1 avec un peu de calcul paradifférentiel comme dans [**10**], on obtient le théorème suivant.

Théorème 3. — *On suppose que* $\alpha \leq 2$ *et que* $t \mapsto \mathrm{e}^{-itP}$ *vérifie une estimation de Strichartz bilinéaire d'ordre* s. *Alors le problème (1.1) avec* $F = F_\alpha$ *est uniformément bien posé sur* $H^{s'}(M)$ *pour tout* $s' > s$.

3.3. Le cas des sphères. — En combinant le théorème précédent avec les estimations bilinéaires sur les sphères citées dans la section 2, on en déduit par exemple que les équations de Schrödinger sous-cubiques sont uniformémement bien posées sur $H^s(\mathbb{S}^2)$ pour tout $s > 1/4$, et sur $H^s(\mathbb{S}^3)$ pour tout $s > 1/2$. En comparant avec le cas euclidien étudié plus haut, on pourrait soupçonner que, lorsque α devient petit, ces résultats sont loin d'être optimaux, puisqu'ils fournissent un seuil de régularité > 0 et indépendant de α. Il n'en est rien, comme le montre l'adaptation suivante des résultats de Burq, Tzvetkov et l'auteur [**8**] (voir aussi Banica [**1**], [**16**] et Burq-Zworski [**12**] dans le cas de l'oscillateur harmonique).

Théorème 4. — *Pour tout* $\alpha \in]0,2]$, *le problème (1.1) avec* $F = F_\alpha$ *n'est pas uniformément bien posé sur* $H^s(\mathbb{S}^2)$ *pour tout* $s \in [0,1/4[$, *et sur* $H^s(\mathbb{S}^3)$ *pour tout* $s \in [0,1/2[$.

Le principe de la démonstration du théorème 4 consiste à construire des solutions exactes de la forme

$$u_n(t,x) = \mathrm{e}^{-i\omega_n t}\psi_n(x)$$

où ψ_n est proche de

$$\kappa_n\, n^{\frac{d-1}{4}-s}\, H_n \ ,$$

et où H_n est l'harmonique sphérique définie par (2.1), κ_n est un paramètre proche de 1, la puissance de n étant ajustée pour normaliser ψ_n dans $H^s(\mathbb{S}^d)$. On montre alors que la valeur propre non linéaire ω_n est la somme de $n(n+d-1)$ et d'un terme équivalent à

$$\theta_n = \kappa_n^\alpha\, n^{\alpha(\frac{d-1}{4}-s)} \ .$$

C'est le déphasage θ_n qui produit l'instabilité, en choisissant une suite κ_n convergeant lentement vers 1. De plus, des inégalités de type Agmon permettent d'assurer que u_n est à décroissance exponentielle par rapport à n en-dehors du grand cercle sur lequel se concentre H_n. Comme l'ont remarqué Burq et Zworski dans [**12**], il en résulte que l'on peut aisément, sur $\mathbb{S}^3$, construire des suites de solutions de (1.1) qui sont équivalentes à la somme de deux telles solutions u_n, associées à des grands cercles disjoints. L'instabilité ainsi obtenue n'est plus seulement due à un grand déphasage, mais elle a lieu également dans l'espace projectif complexe de $H^s(\mathbb{S}^3)$.

Notons qu'une construction semblable en dimension 6 permet d'affirmer que, pour tout $\alpha \in]0,1]$, le problème (1.1) avec $F = F_\alpha$ n'est pas uniformément bien posé sur l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{S}^6)$. En d'autres termes, les solutions faibles que l'on peut aisément construire pour ce problème ne peuvent pas être sélectionnées de façon à former un flot uniformément continu sur les bornés de l'espace d'énergie.

Indiquons pour terminer un problème ouvert très naturel. Dans les conditions du théorème 4 ou de l'énoncé précédent sur $\mathbb{S}^6$, le problème (1.1) est-il ou non bien posé au sens de la définition 1.1 ? En d'autres termes, l'absence du caractère uniformḿement bien posé cache-t-elle une pathologie plus aiguë, ou n'est-elle que le reflet de ce que, sur la sphère et dans ces plages de régularité, les équations de Schrödinger non linéaires se comporteraient comme des systèmes quasilinéaires ?

4. Problèmes mal posés

Dans cette dernière section sont discutés brièvement quelques résultats établissant le caractère mal posé de certaines équations de Schrödinger non linéaires. Actuellement, de tels résultats concernent tous des régularités sous-critiques au sens des changements d'échelles (en tout cas pour des régularités positives). Pour fixer les idées, concentrons-nous sur le cas particulier suivant,

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = |u|^6 u \ , \ u(0,x) = u_0(x) \ , \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^3$. On notera que la régularité critique au sens des changements d'échelle est donnée par

$$\frac{d}{2} - \frac{2}{\alpha} = \frac{7}{6} \ ,$$

et en particulier que l'équation est surcritique dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$. Pour tous les $s \in]0, 7/6[$, Christ, Colliander et Tao ont montré dans [**15**] que le problème (4.1) est mal posé dans $H^s(\mathbb{R}^3)$, au sens où il existe une suite (u_n) de solutions régulières de (4.1), sur des intervalles de temps $[0, t_n]$ dépendant de n, et vérifiant

$$\|u_n(0)\|_{H^s} \to 0 \ , \ \|u_n(t_n)\|_{H^s} \to \infty$$

pour une suite (t_n) tendant vers 0. La propriété de continuité iii) de la définition 1.1 est donc mise en défaut.

Rappelons le principe de la démonstration. On utilise des données du type

$$u_n(0,x) = \delta_n \, n^{\frac{3}{2}-s} \, \varphi(nx) \ ,$$

où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et où δ_n est une suite à choisir tendant lentement vers 0. Lorsque t est suffisamment petit par rapport à n^{-2}, on s'attend, comme dans la preuve de la proposition 2.2, à ce que les effets du laplacien soient négligeables, et que u_n soit bien approchée par la solution v_n de l'équation différentielle

$$i\frac{\partial v_n}{\partial t} = |v_n|^6 v_n \ , \ v_n(0,x) = u_n(0,x) \ ,$$

c'est–à–dire

$$v_n(t,x) = \delta_n \, n^{\frac{3}{2}-s} \, \varphi(nx) \mathrm{e}^{-it\delta_n^6 \, n^{9-6s} \, |\varphi(nx)|^6} \ .$$

Or un calcul élémentaire établit que

$$\|v_n(t)\|_{H^s} \simeq \delta_n (tn^{9-6s})^s + O(1) \ ,$$

de sorte que le résultat est démontré si l'on trouve un temps t_n assez petit pour que $u_n(t_n)$ soit bien approchée dans H^s par $v_n(t_n)$, et assez grand pour que $t_n \, n^{9-6s}$

tende vers l'infini. Notons que la condition naturelle $t_n << n^{-2}$ impose $s < 7/6$ comme prévu. Le point délicat est bien sûr de contrôler $w_n(t) = u_n(t) - v_n(t)$ pour t pas trop petit. Pour cela, on suit plutôt l'appendice de [**10**]. Une norme commode pour les estimations est la norme semi-classique

$$N_s(w) = n^s \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + n^{s-2} \|\Delta w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

qui majore la norme $H^s(\mathbb{R}^3)$ par interpolation. Notons que, par les estimations de Gagliardo-Nirenberg,

$$\|w\|_{L^\infty} \lesssim \|w\|_{L^2}^{1/4} \|\Delta w\|_{L^2}^{3/4} \lesssim n^{3/2-s} N_s(w) \ ,$$

de sorte que l'on peut contrôler le principal facteur d'amplification apparaissant dans l'analyse non linéaire par

$$\|v_n(t)\|_{L^\infty}^6 + \|w_n(t)\|_{L^\infty}^6 \lesssim n^{9-6s}(1 + N_s(w_n(t))^6) \ .$$

En choisissant alors

$$t_n = \frac{(\log n)^\mu}{n^{9-6s}} \ , \ \delta_n = (\log n)^{-\nu}$$

pour $\mu > 0$, $\nu > 0$ assez petits, on obtient

$$N_s(w_n(t_n)) \lesssim n^{-\varepsilon}$$

pour un $\varepsilon > 0$, tandis que $\|v_n(t_n)\|_{H^s}$ diverge logarithmiquement, ce qu'il fallait démontrer.

Un des aspects bien connus de l'équation (4.1) est que, pour toute donnée dans l'espace d'énergie $H^1 \cap L^8$, il existe une solution faible d'énergie finie pour tout temps. Il est donc naturel de se demander si le phénomène décrit plus haut peut se produire avec des données d'énergie bornée. Calculons donc, pour $s \in]1, 7/6[$,

$$\|u_n(0)\|_{L^8} \simeq \delta_n \, n^{\frac{9}{8}-s} \ .$$

En conséquence, si $s \geq 9/8$, la construction ci–dessus se fait à énergie bornée (et même petite). Mais qu'en est-il pour $s < 9/8$? Le résultat suivant montre que le caractère mal posé subsiste dans ce cas.

Théorème 5 **(Burq-Gérard-Ibrahim)**. — *Pour tout $s \in]1, \frac{9}{8}[$, il existe une suite (u_n) de solutions régulières de (4.1), sur un intervalle de temps $[0, t_n]$, telle que*

$$\|u_n(0)\|_{H^s} + \|u_n(0)\|_{L^8} \to 0$$

et

$$\|u_n(t_n)\|_{H^s} \to \infty \ .$$

Le principe de la démonstration du théorème 5 est d'introduire une version à deux échelles des solutions de Christ-Colliander-Tao. En écrivant $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, on pose

$$u_n(0, x) = \delta_n \, n^{\alpha} \varphi(n x_1, n^{\beta} x') \ ,$$

les conditions de normalisation dans H^s et dans L^8 fixant alors

$$\alpha = \frac{s}{3} \ , \ \beta = \frac{4s}{3} - \frac{1}{2} < 1 \ .$$

La condition de divergence de la norme H^s de la solution de l'équation différentielle au temps t_n est alors

$$t_n \, n^{2s} \to \infty \ ,$$

et la norme à utiliser pour majorer l'erreur w_n devient

$$\tilde{N}_s(w) = n^s \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + n^{s-2} \|\partial_1^2 w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + n^{s-2\beta} \|\Delta' w\|_{L^2} \ .$$

Pour les estimations non linéaires, on doit alors remplacer l'estimation de Gagliardo-Nirenberg par la version suivante, qui prend en compte les poids différents des variables x_1 et x',

$$\|w\|_{L^\infty} \lesssim \|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \, \|\partial_1^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \, \|\Delta' w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \ .$$

Les détails apparaîtront dans un article en préparation.

Références

[1] Banica, V., On the nonlinear Schrödinger dynamics on S^2. *J. Math. Pures Appl.* , **83** (2004), 77–98.

[2] Bourgain, J., Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations I. Schrödinger equations. *Geom. and Funct. Anal.*, **3** (1993), 107–156.

[3] Bourgain, J., Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations. *Geom. and Funct. Anal.*, **3** (1993) 157–178.

[4] Bourgain, J., *Global Solutions of Nonlinear Schrödinger equations.* Colloq. Publications, American Math. Soc., 1999.

[5] Bourgain, J., Remarks on Strichartz' inequalities on irrational tori. Prépublication, 2004, à paraître dans *Mathematical Aspects of nonlinear PDE*, Annals Math. Studies, Princeton.

[6] Bourgain, J., Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity, *IMRN*, **5** (1998), 253-283.

[7] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N., Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, **126** (2004), 569–605.

[8] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N., An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d. *Math. Res. Lett.*, **9** (2002), 323–335.

[9] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N., Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces. *Invent. math.* **159** (2005), 187–223.

[10] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N., Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **38** (2005), 255–301.

[11] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N., Global solutions for the nonlinear Schrödinger equation on three-dimensional compact manifolds. To appear in *Mathematical Aspects of nonlinear PDE*, Annals Math. Studies, Princeton.

[12] Burq, N., Zworski, M., Instability for the semiclassical non-linear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.* **260** (2005), 45–58.

[13] Cazenave, T., *Semilinear Schrödinger equations.* Courant Lecture Notes in Mathematics, **10**. New York University, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[14] Cazenave, T., Weissler, F., The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **14** (1990), 807–836.

[15] Christ, M., Colliander, J., Tao, T., Ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations. Prépublication, math.AP/0311048, à paraître à *Ann. I. H. Poincaré-AN.*

[16] Gérard, P., Nonlinear Schrödinger equations on compact manifolds. In *European Congress of Mathematics, Stokholm, June 27-July 2, 2004* (ed. by Ari Laptev). European Mathematical Society, Zürich, 2005, 121–139.

[17] Gérard, P., Nonlinear Schrödinger Equations in Inhomogeneous Media : Wellposedness and Illposedness of the Cauchy Problem. In *Proceedings of the International Congress of Mathematics, Madrid, August 2006*, à paraître.

[18] Ginibre, J., Velo, G., On a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.*, **32** (1979) 1-71.

[19] Ginibre, J., Velo, G., The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation. *Ann. I. H. Poincaré-AN*, **2** (1985) 309-327.

[20] Ginibre, J., Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain). Séminaire Bourbaki, Exp. 796, *Astérisque* **237** (1996), 163–187.

[21] Kato, T., On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique* **46** (1987), 113–129.

[22] Keel, M., Tao, T., Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, **120** (1998), 955–980.

[23] Ryckman, E., Visan, M., Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrodinger equation in $\mathbb{R}^{1+4}$. Prépublication, math.AP/0501462, à paraître à *Amer. J. Math.*

[24] Strichartz, R., Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of soltions of wave equations. *Duke Math. J.* **44** (1977), 705-714.

[25] Tsutsumi, Y., L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups. *Funkcial. Ekvac.* **30** (1987), 115–125.

[26] Tzvetkov, N., Illposedness issues for nonlinear dispersive equations. Prépublication, September 2004.

[27] Yajima, K., Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 415-426.

[28] Zakharov, V.E., Collapse of Langmuir waves. *Sov. Phys. JETP* **35** (1972), 980-914.

P. Gérard, Université Paris–Sud, UMR 8628 du CNRS, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex • *E-mail :* `patrick.gerard@math.u-psud.fr`