Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2005-2006

Jean-Lin Journé et Jean-Marie Trépreau

Hypoellipticité sans sous-ellipticité : le cas des systèmes de n champs de vecteurs complexes en $(n+1)$ variables

Séminaire É. D. P. (2005-2006), Exposé n° XIV, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2005-2006____A14_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

HYPOELLIPTICITÉ SANS SOUS-ELLIPTICITÉ : LE CAS DES SYSTÈMES DE n CHAMPS DE VECTEURS COMPLEXES EN $(n+1)$ VARIABLES

par

Jean-Lin Journé et Jean-Marie Trépreau

1. Introduction et énoncés

1.1. Une classe de systèmes différentiels. — On s'intéresse à l'hypoellipticité C^∞ et dans l'échelle de Sobolev H^s d'une classe de systèmes modèles, de n équations en $(n+1)$ variables. On note les variables

$$(x,t)=(x,t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Soit V un voisinage ouvert de $0\in\mathbb{R}^n$ et $\phi\in C^\infty(V)$ une fonction réelle. On lui associe le système des n champs de vecteurs complexes

$$L_k=\frac{\partial}{\partial t_k}+i\frac{\partial\phi}{\partial t_k}(t)\,\frac{\partial}{\partial x},\qquad k=1,\dots,n.$$

La fonction à valeurs complexes $z(x,t)=x-i\phi(t)$ est une intégrale première du système : $L_1z=0,\dots,L_nz=0$ et dz ne s'annule pas. En fait, $L_1,\dots,L_n$ engendrent le C^∞-module des champs de vecteurs qui annulent $z(x,t)$.

On note $\nabla=(\partial/\partial t_1,\dots,\partial/\partial t_n)$ le gradient en t et on écrit le système d'équations $L_ku=f_k,\ k=1,\dots,n$, sous forme vectorielle, soit :

$$\mathbb{L}_\phi u=f,$$

avec

$$\mathbb{L}_\phi u=\nabla u+i\,\nabla\phi\,\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1}$$

Si $n=1$, le système $\mathbb{L}_\phi$ se réduit à un opérateur, un cas très particulier d'opérateur de type principal complexe en deux variables. Si l'on suppose en plus ϕ analytique, il est connu que cet opérateur est hypoelliptique si et seulement s'il est sous-elliptique.

L'objet de cet exposé est de montrer, par des exemples, que cette propriété n'est plus vérifiée si $n \geq 2$.

1.2. Hypoellipticité microlocale des systèmes $\mathbb{L}_\phi$. — La variété caractéristique du système $\mathbb{L}_\phi$ est donnée par

$$\Sigma_\phi = \{(x,t,\xi,0) \in \dot{\mathrm{T}}^*(\mathbb{R} \times V), \ \ \nabla\phi(t) = 0\}.$$

Si $t \in V$ n'est pas un point critique de ϕ, le système $\mathbb{L}_\phi$ est elliptique au-dessus de (x,t). Sinon, il admet au-dessus de (x,t) deux demi-droites caractéristiques, engendrées respectivement par $(x,t,1,0)$ et $(x,t,-1,0)$. Modulo un changement de variables, il suffit d'étudier le système au voisinage de

$$\theta_0^+ := (0,0,1,0) \in \dot{\mathrm{T}}_0^*\mathbb{R}^{n+1}. \tag{2}$$

On dit que le système $\mathbb{L}_\phi$ est hypoelliptique au voisinage de θ_0^+ s'il existe un voisinage Ω de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\mathbb{L}_\phi u \text{ de classe } C^\infty \text{ en } (x,t,1,0) \ \ \Rightarrow \ \ u \text{ de classe } C^\infty \text{ en } (x,t,1,0)$$

pour tout $(x,t) \in \Omega$ et tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$. On a d'abord :

Lemme 1.1. — *Soit ϕ une fonction de classe C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Si le système $\mathbb{L}_\phi$ est hypoelliptique au voisinage de θ_0^+, il existe un voisinage V de $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que ϕ n'a pas de maximum local dans V.*

Démonstration. — On suppose que ϕ a un maximum local en $t_0 \in \mathbb{R}^n$. Si V est un voisinage ouvert assez petit de t_0, $\phi(t) - \phi(t_0) \leq 0$ pour tout $t \in V$. Il en résulte que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$u_\epsilon(x,t) = \frac{1}{x - i(\phi(t) - \phi(t_0) - \epsilon)}$$

définit une fonction $\in C^\infty(\mathbb{R} \times V)$ avec $\mathbb{L}_\phi u_\epsilon = 0$. On vérifie que, quand $\epsilon \to 0^+$, u_ϵ converge au sens des distributions et que la limite $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times V)$ est solution de $L_\phi T = 0$ et n'est pas de classe C^∞ en $(0, t_0, 1, 0)$. $\square$

Si ϕ est analytique, la réciproque est vraie :

***Théorème 1.2* (Maire).** — *Si ϕ est analytique sans maximum local sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, le système $\mathbb{L}_\phi$ est hypoelliptique au voisinage de θ_0^+.*

Nous rappellerons dans le §2 la démonstration de Maire [**7**] et nous préciserons son résultat dans l'échelle de Sobolev H^s. L'hypothèse d'analyticité sert à contrôler la géométrie des ensembles de niveau de la fonction ϕ. Il serait intéressant de l'affaiblir. Quoi qu'il en soit, si $n \geq 2$, l'énoncé est faux en général si on suppose (seulement) ϕ de classe C^∞ au lieu d'analytique, voir [**7**].

1.3. Hypoellipticité précisée dans l'échelle H^s. — On emploiera la terminologie suivante :

Définition 1.3. — Le système $\mathbb{L}_\phi$ est régulier d'ordre $\rho \leq 1$ en θ_0^+ si

$$\mathbb{L}_\phi u \text{ de classe } H^s \text{ en } \theta_0^+ \quad \Rightarrow \quad u \text{ de classe } H^{s+\rho} \text{ en } \theta_0^+$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Suivant une terminologie plus courante, un système régulier d'ordre ρ est un *système hypoelliptique avec perte d'au plus* $(1-\rho)$*-dérivée(s).* Les systèmes réguliers d'ordre 1 sont les systèmes elliptiques.

Un système régulier d'ordre $\rho \in]0,1]$ est aussi appelé *sous-elliptique.*

Si $n = 1$, l'opérateur $\mathbb{L}_\phi$ est sous-elliptique en θ_0^+ si et seulement si, ou bien $\phi'(0) \neq 0$, ou bien $t = 0$ est un zéro d'ordre fini k de ϕ' et n'est pas un point de maximum local de ϕ. Dans ce cas, $\mathbb{L}_\phi$ est régulier d'ordre $1/(k+1)$ en θ_0^+.

C'est un cas particulier élémentaire du théorème d'Egorov sur la sous-ellipticité, voir Hörmander [**6**].

Il ne paraît pas raisonnable d'espérer obtenir un résultat aussi définitif dans le cas des systèmes. Nous donnerons seulement deux résultats modestes. Le premier, qui est peut-être une surprise, est le suivant :

Théorème 1.4. — *Pour tout $n \geq 2$ et tout $\rho > -(n-1)/4$, il existe une fonction analytique ϕ, sans maximum local sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, telle que le système L_ϕ n'est pas régulier d'ordre ρ en θ_0^+.*

En particulier et contrairement à ce qui se passe si $n = 1$, *il existe, pour tout $n \geq 2$, des systèmes analytiques $\mathbb{L}_\phi$ qui sont hypoelliptiques sans être sous-elliptiques.* Dans l'autre direction, nous préciserons le théorème de Maire :

Théorème 1.5. — *Si ϕ est une fonction analytique sans maximum local sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, le système L_ϕ est régulier d'ordre $-n/2$ en θ_0^+.*

L'un au moins des deux énoncés n'est pas optimal ! Soit ρ_n la borne supérieure des nombres $\rho \in \mathbb{R}$ tels que tout système $\mathbb{L}_\phi$, associé à une fonction analytique sans maximum local au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, est régulier d'ordre ρ en θ_0^+. On a $\rho_1 = 0$. Si $n \geq 2$, la détermination de ρ_n est un problème ouvert qui nous paraît intéressant. Les énoncés précédents donnent l'encadrement :

$$-\frac{n}{2} \leq \rho_n \leq -\frac{n-1}{4}.$$

1.4. Inégalités de Poincaré avec poids. — Si $u \in C^0(V, \mathcal{E}'(\mathbb{R}))$, on note

$$\widetilde{u}(\xi, t) := \int \mathrm{e}^{-ix\xi} u(x,t)\, dx \tag{3}$$

sa transformée de Fourier en x. Si $u \in C^1(V, \mathcal{E}'(\mathbb{R}))$, on a :

$$\widetilde{\mathbb{L}_\phi u}(\xi, t) = \nabla \widetilde{u}(\xi, t) - \xi(\nabla\phi(t))\widetilde{u}(\xi, t) = \mathrm{e}^{\xi\phi(t)}\nabla\left(\mathrm{e}^{-\xi\phi(t)}\widetilde{u}(\xi, t)\right).$$

Cette formule permet d'établir un lien entre la régularité d'ordre ρ d'un système $\mathbb{L}_\phi$ et l'existence d'une « inégalité de Poincaré » avec poids $\mathrm{e}^{\lambda\phi}$, uniforme en $\lambda \geq 1$.

Ce lien est parfait si et seulement si $\rho > 0$. Comme on sait, la sous-ellipticité locale d'ordre $\rho > 0$ d'un système $\mathbb{L}$ (du premier ordre) équivaut à l'existence d'une « estimation sous-elliptique » de la forme :

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega), \qquad ||u||_\rho \leq C\left(||\mathbb{L}u||_0 + ||u||_0\right).$$

Dans le cas particulier qu'on considère, l'invariance par translation en x permet d'éliminer cette variable. On montre ainsi facilement la propriété suivante, qu'on n'utilisera pas[(1)] :

Lemme 1.6. — *On suppose $0 < \rho \leq 1$. Si ϕ est une fonction de classe C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, le système $\mathbb{L}_\phi$ est régulier d'ordre ρ en θ_0^+ si et seulement s'il existe un voisinage V de $0 \in \mathbb{R}^n$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall\lambda \geq 1,\ \ \forall v \in C_0^\infty(V),\ \ \int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|v(t)|^2\, dt \leq C\lambda^{-2\rho}\int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|\nabla v(t)|^2\, dt. \tag{4}$$

Cette équivalence n'est plus vraie si $\rho \leq 0$.

Étant donné une fonction ϕ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, l'existence d'une inégalité de la forme (4) est un problème intéressant en lui-même. Il est facile de voir qu'il est nécessaire que ϕ n'ait pas de maximum local *strict*. Si ϕ est analytique, la réciproque est vraie : la méthode du §2 permet de montrer que (4) est vérifié avec $\rho = -n/2$ (même un peu mieux) si ϕ est analytique sans maximum local strict au voisinage de 0. On verra d'ailleurs dans le §4 qu'on ne peut pas prendre $\rho > -(n-1)/4$ en général.

On obtiendra dans le §3 une condition nécessaire de régularité de la forme (4), pour ρ quelconque, mais avec le poids $\mathrm{e}^{\lambda(\phi+\phi^2)}$ au lieu de $\mathrm{e}^{\lambda\phi}$.

(1) Voir aussi Derridj [**4**], qui étudie plus spécialement le cas des fonctions ϕ polyhomogènes et les relations entre la sous-ellipticité et l'hypoellipticité maximale. D'autre part, l'existence d'une inégalité de la forme (4) peut être interprétée comme une minoration de la plus petite valeur propre du Laplacien de Witten associé, voir Helffer et Nier [**5**].

Dans l'autre sens, le problème est plus délicat. Comme on a dit, une inégalité de la forme (4) ne suffit pas à assurer la régularité à l'ordre ρ si $\rho \leq 0$. On peut penser à démontrer des inégalités un peu plus fortes, de la forme

$$\int_{V'} \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|v(t)|^2\,dt \leq C\lambda^{-2\rho}\int_V \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|\nabla v(t)|^2\,dt + C\mathrm{e}^{-\epsilon\lambda}\sup_{t\in V}\mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|v(t)|^2$$

où $V' \subset\subset V$, pour tout $v \in C^\infty(V)$ et $\lambda \geq 1$. On évite ainsi les troncatures en t, mais la troncature en x pose encore problème et empêche d'en déduire un résultat de régularité en toute généralité.

1.5. Systèmes sous-holonômes de type principal. — On trouvera sans doute la classe des systèmes qu'on a considérés exagérément restrictive. L'invariance par translation en x est en particulier bien artificielle. Aussi, pour conclure cette introduction, nous voulons situer brièvement les questions qu'on vient d'aborder dans un cadre plus général et plus naturel. Nous indiquerons quelques conjectures « raisonnables », dont l'énoncé au moins est simple.

Les systèmes qu'on a considérés sont des cas particuliers de systèmes *intégrables* de n champs de vecteurs complexes en $(n+1)$ variables, de rang n en 0. Ceux-ci peuvent être définis à partir d'une intégrale première, *i.e.* d'une fonction $z(x,t)$ qui les annule et vérifie $dz(0) \neq 0$. Concrètement, si par exemple $\partial z/\partial x \neq 0$, le système est engendré par les champs

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t_k} - \frac{\partial z}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

On obtient ainsi une classe intéressante de systèmes différentiels, dont l'étude doit beaucoup à F. Treves, depuis son article [**12**]. On dispose maintenant d'une bonne théorie de la résolubilité locale du complexe différentiel associé à un système de ce type. Les conjectures de Treves (1983), qui relient la résolubilité locale du complexe à la topologie des ensembles de niveau de l'intégrale $z(x,t)$, ont été démontrées par Chanillo et Treves [**2**] dans le cas analytique, puis par Cordaro et Hounie [**3**] dans le cas général. À notre connaissance, la question de l'hypoellipticité de ces systèmes n'a pas encore reçu de réponse aussi satisfaisante.

Pour simplifier, nous supposons désormais que la fonction $z(x,t)$ est analytique. On peut toujours se ramener au cas

$$z(x,t) = x - i\phi(x,t),$$

où ϕ est réelle et analytique au voisinage de 0. Baouendi et Treves [**1**] ont montré que le système associé $\mathbb{L}_\phi$ est hypoelliptique analytique sur un voisinage ouvert assez petit Ω de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si $z : \Omega \to \mathbb{C}$ est une application ouverte. L'analogue microlocal de cet énoncé est le suivant. Le système $\mathbb{L}_\phi$ est hypoelliptique analytique au voisinage de $\theta_0^+ = (0,0,1,0)$ si et seulement si $\phi(x,t)$ vérifie :

Il existe un voisinage $I \times V$ de $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que, quel que soit $x \in I$, la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ n'admet pas de maximum local dans V.

Il est tentant de penser que cette condition est aussi suffisante pour l'hypoellipticité C^∞ du système $\mathbb{L}_\phi$, voire pour sa régularité à un ordre ne dépendant que de la dimension $(n+1)$. Ces problèmes sont ouverts.

En fait, l'énoncé précédent sur l'hypoellipticité analytique peut être étendu à une classe de systèmes définie microlocalement et qui est la généralisation naturelle de la classe des OPD de type principal complexe *en deux variables.* (Le théorème d'Egorov sur la sous-ellipticité est beaucoup plus facile en deux variables qu'en trois variables ou plus.) Nous renvoyons à Trépreau [**11**] pour la définition d'un système sous-holonôme de type principal complexe. Contentons nous d'écrire la condition d'hypoellipticité analytique microlocale au voisinage de $\theta_0^+ \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^{n+1}$, pour un système de ce type. On note Λ la variété caractéristique complexe du système. C'est une sous-variété involutive homogène de codimension n de $\mathrm{T}^*\mathbb{C}^{n+1}$. Comme telle, elle est feuilletée en variétés lagrangiennes complexes. La condition est alors la suivante :

Pour tout $\theta \in \Lambda \cap \mathrm{T}^*\mathbb{R}^{n+1}$ voisin de θ_0^+, la variété lagrangienne complexe du système qui passe par θ n'est pas positive par rapport à $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^{n+1}$.

La notion de variété lagrangienne positive est due à Melin et Sjöstrand [**8**], voir aussi Sjöstrand [**10**], Schapira [**9**].

Le problème plus général, de savoir si la condition précédente est une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité C^∞, pour un système sous-holonôme de type principal complexe, est aussi ouvert.

2. Démonstration du Théorème 1.5

2.1. Introduction. — On se donne une fonction ϕ, analytique sans maximum local au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit de montrer que le système $\mathbb{L}_\phi$ est régulier d'ordre $-n/2$ en θ_0^+.

Nous suivons de près la démonstration de Maire [**7**]. Elle repose sur l'obtention d'inégalités sous-elliptiques, mais pour une échelle de semi-normes hybrides L^2–L^∞ :

$$(5) \qquad s \in \mathbb{R},\ \ K \subset\subset \mathbb{R}^n, \qquad |||u|||_{s,K}^2 := \sup_{t\in K} \int_1^{+\infty} \xi^{2s}\, |\widetilde{u}(\xi,t)|^2\, d\xi.$$

2.2. L'inégalité de Lojasiewicz et contrôles. — On suppose provisoirement :

$$\phi(0) = 0, \qquad d\phi(0) = 0.$$

Soit $V \subset\subset \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de 0, assez petit. On peut supposer que ϕ est analytique au voisinage de $\overline{V}$, sans maximum local sur V, et qu'on a, pour un $\rho \in]0, 1[$ convenable, l'inégalité de Lojasiewicz :

$$\forall t \in V, \qquad |\nabla \phi(t)| \geq |\phi(t)|^{1-\rho}. \tag{6}$$

Cette inégalité a en particulier permis à Lojasiewicz de montrer que la longueur des courbes intégrales de $\nabla\phi$ dans V est uniformément bornée.

Soit $\Sigma \subset \overline{V}$ l'ensemble des points critiques de ϕ. Considérons le champ de vecteurs

$$t \in \overline{V} \backslash \Sigma, \qquad X(t) = \frac{\nabla \phi(t)}{|\nabla \phi(t)|}.$$

Si $c : [0, \sigma[\to \overline{V}$ est une courbe intégrale de X d'origine $c(0) \in V \backslash \Sigma$, l'inégalité (6) donne un contrôle de la croissance de ϕ le long de c. En effet :

$$(\phi \circ c)'(s) = \langle \nabla \phi(c(s)), c'(s) \rangle = |\nabla \phi(c(s))| \geq |(\phi \circ c)(s)|^{1-\rho}.$$

En intégrant, on obtient :

$$|\ |\phi(c(s))|^{\rho} - |\phi(c(0))|^{\rho}\ | \geq \rho s.$$

On en déduit l'existence de $\kappa > 0$, indépendant de la courbe c, tel que :

$$\phi(c(s)) - \phi(c(0)) \geq \kappa s^{1/\rho}. \tag{7}$$

En particulier, la longueur σ de la courbe est uniformément bornée.

On en déduit aussi les propriétés suivantes :

– Si $\phi(t) > 0$, ou si $\phi(t) = 0$ mais que t n'est pas un point critique, la courbe intégrale du champ X issue de t atteint ∂V.

– Si $t \in V$ est un point critique, $\phi(t) = 0$. Comme t n'est pas un point de maximum local, ϕ prend des valeurs > 0 en des points t' arbitrairement voisins de t. La courbe intégrale de X issue de t' atteint ∂V et sa longueur est uniformément majorée. En passant à la limite, on obtient une courbe rectifiable de t à un point de ∂V, le long de laquelle (7) est vérifié.

– Si $\phi(t) < 0$, la courbe intégrale du champ X issue de t atteint ∂V ou tend vers un point critique $t' \in V$ et ce qu'on vient de dire s'applique.

On obtient ainsi le lemme suivant. (Le cas où $\nabla\phi(0) \neq 0$ est immédiat.)

Lemme 2.1. — *Soit ϕ une fonction analytique sans maximum local au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe $\rho \in]0, 1]$ et $\kappa > 0$ tels que, pour tout voisinage V assez petit de 0 et tout $t \in V$, il existe une courbe rectifiable $c : [0, \sigma] \to \overline{V}$,* *paramétrée par la longueur d'arc, de $t = c(0)$ à un point $c(\sigma) \in \partial V$, le long de laquelle :*

$$0 \leq s \leq \sigma, \qquad \phi(c(s)) - \phi(t) \geq \kappa s^{1/\rho}. \tag{8}$$

2.3. Inégalités de Poincaré « sous-elliptiques ».— On continue avec les notations du Lemme 2.1. Soit $t^* = c(\sigma) \in \partial V$ l'extrémité de l'arc c. Si $v \in C^1(\overline{V})$, on écrit

$$v(t) = v(t^*) - \int_c dv.$$

On a donc, pour tout $\lambda \geq 1$,

$$|(\mathrm{e}^{\lambda\phi} v)(t)| \leq \mathrm{e}^{\lambda(\phi(t)-\phi(t^*))} |(\mathrm{e}^{\lambda\phi} v)(t^*)| + \int_0^\sigma \mathrm{e}^{\lambda(\phi(t)-\phi(c(s))} \left|(\mathrm{e}^{\lambda\phi} \nabla v)(c(s)\right| \, ds,$$

et compte tenu de (8)

$$|(\mathrm{e}^{\lambda\phi} v)(t)| \leq \mathrm{e}^{-\lambda\kappa\sigma^{1/\rho}} |(\mathrm{e}^{\lambda\phi} v)(t^*)| + \int_0^\sigma \mathrm{e}^{-\lambda\kappa s^{1/\rho}} \left|(\mathrm{e}^{\lambda\phi} \nabla v)(c(s))\right| \, ds.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\kappa s^{1/\rho}} \, ds = O(\lambda^{-\rho}), \tag{9}$$

on a en particulier :

Lemme 2.2. — *Soit ϕ une fonction analytique sans maximum local au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe un voisinage V de 0, $\rho > 0$ et $C > 0$, tels que :*

$$\forall v \in C_0^1(V), \;\; \forall \lambda \geq 1, \qquad \sup_{t \in V} \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)} |v(t)| \leq C\lambda^{-\rho} \sup_{t \in V} \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)} |\nabla v(t)|$$

Ce résultat, qu'on n'utilisera pas, vaut la peine d'être noté. C'est, si l'on veut, une inégalité de Poincaré sous-elliptique pour la norme du sup, dans un cas où, comme on verra dans le §4, l'inégalité analogue pour la norme L^2 n'est pas toujours vraie.

Soit $K \subset V$ un compact. La longueur σ de $t \in K$ à $t^* \in \partial V$ est minorée par une constante > 0. On obtient, avec $\epsilon > 0$,

$$|(\mathrm{e}^{\lambda\phi}) v(t)| \leq \mathrm{e}^{-\epsilon\lambda/2} |(\mathrm{e}^{\lambda\phi} v)(t^*)| + \int_0^\sigma \mathrm{e}^{-\lambda\kappa s^{1/\rho}} \left|(\mathrm{e}^{\lambda\phi} \nabla v)(c(s))\right| \, ds.$$

Par Cauchy-Schwarz et compte tenu de (9) :

$$\forall \lambda \geq 1, \qquad |(\mathrm{e}^{\lambda\phi} v)(t)|^2 \leq C\mathrm{e}^{-\epsilon\lambda} |(\mathrm{e}^{\lambda\phi} v)(t^*)|^2 + C\lambda^{-\rho} \int_0^\sigma \left|(\mathrm{e}^{\lambda\phi} \nabla v)(c(s))\right|^2 \, ds.$$

On revient au système L_ϕ. Soit $u \in C^1(\overline{V}, \mathcal{E}'(\mathbb{R}))$. Rappelons la formule :

$$\widetilde{\mathbb{L}_\phi u}(\xi, t) = \left(\mathrm{e}^{\xi\phi} \nabla(\mathrm{e}^{-\xi\phi} \widetilde{u})\right)(\xi, t).$$

On applique l'inégalité précédente à $v = \mathrm{e}^{-\lambda\phi}\widetilde{u}(\xi,\cdot)$ et avec $\lambda = \xi$:

$$\forall \xi \geq 1, \qquad |\widetilde{u}(\xi,t)|^2 \leq C\mathrm{e}^{-\epsilon\xi}|\widetilde{u}(\xi,t^*)|^2 + C\xi^{-\rho}\int_0^\sigma |\widetilde{\mathbb{L}_\phi u}(\xi,c(s))|^2\,ds.$$

On multiplie les deux membres par $\xi^{2s+\rho}$, on intègre sur $[1,+\infty[$ par rapport à ξ et on passe aux sup par rapport à $t \in K$. Compte tenu du fait que σ est uniformément majoré, on obtient l'inégalité suivante (Maire [**7**]), en termes des semi-normes définies par (5) :

Lemme 2.3. — *Soit ϕ une fonction analytique sans maximum local au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe $\rho \in]0,1]$ et, pour tout voisinage ouvert assez petit V de 0, tout compact $K \subset V$ et tout s_0, $s \in \mathbb{R}$, il existe $C > 0$ tel que :*

$$(10) \qquad \forall u \in C^1(\overline{V},\mathcal{E}'(\mathbb{R})), \qquad |||u|||^2_{s+\rho/2,K} \leq C\left(|||u|||^2_{s_0,\overline{V}} + |||\mathbb{L}_\phi u|||^2_{s,\overline{V}}\right).$$

2.4. Fin de la démonstration.— Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$. On suppose

$$\mathbb{L}_\phi u \in H^{s+n/2} \text{ en } \theta_0^+ = (0,0,1,0).$$

Il s'agit de montrer que $u \in H^s$ en θ_0^+. On commence par quelques réductions.

On peut supposer u à support compact, petit. Soit $\epsilon > 0$ et

$$\mathcal{W}_\epsilon = \{(x,t,\xi,\tau),\ \ |x| < \epsilon,\ |t| < \epsilon,\ \xi > |\tau|/\epsilon\}.$$

Si ϵ est assez petit, $\mathbb{L}_\phi u \in H^{s+n/2}$ en tout point de $\mathcal{W}_\epsilon$. Par régularité elliptique, $u \in H^{s+1+n/2}$ en $(x,t,\xi,\tau) \in \mathcal{W}_\epsilon$ si $\tau \neq 0$. Soit Ψ un OPD d'ordre 0, régularisant en dehors de $\mathcal{W}_{\epsilon/2}$, avec $\Psi - \mathrm{Id}$ régularisant au voisinage conique de θ_0^+. On a $\mathbb{L}_\phi \Psi u = \Psi \mathbb{L}_\phi u + [\mathbb{L}_\phi, \Psi]u$. Le second membre est de classe $H^{s+n/2}$ au voisinage de 0. Comme Ψ est elliptique en θ_0^+, il suffit de montrer que $\Psi u \in H^s$ en θ_0^+.

On s'est donc ramené à démontrer que $u \in H^s$ en θ_0^+, sous l'hypothèse :

$$\mathbb{L}_\phi u \in H^{s+n/2} \text{ au voisinage de } 0 \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Suivant Baouendi et Treves [**1**], on introduit l'opérateur

$$\Delta_\phi = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t_k} + i\frac{\partial\phi}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + A\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Il commute avec le système $\mathbb{L}_\phi$ et est elliptique, donc localement résoluble, au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, si $A > 0$ est assez grand.

On écrit $u = \Delta_\phi^k v$ près de 0, en choisissant $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour que v soit de classe C^1 près de 0. Si $\mathbb{L}_\phi u = \Delta_\phi^k \mathbb{L}_\phi v \in H^{s+n/2}$ près de 0, $\mathbb{L}_\phi v \in H^{s+2k+n/2}$ près de 0. Si l'on sait en déduire que $v \in H^{s+2k}$ en θ_0^+, il vient $u \in H^s$ en θ_0^+.

On s'est donc ramené à démontrer que $u \in H^s$ en θ_0^+, sous l'hypothèse :

$$u \in C^1(I \times V), \qquad f := \mathbb{L}_\phi u \in H^{s+n/2}(I \times V),$$

où $I \times V$ est un voisinage de $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On peut supposer $s \geq 0$.

Soit $K \subset V$ un voisinage compact de $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\zeta \in C_0^\infty(V)$, $\zeta \equiv 1$ sur K. Pour tout $\chi \in C_0^\infty(I)$ on a l'inégalité de Sobolev

$$|\widetilde{\chi f}(\xi, t)|^2 \leq C \int (1 + |\tau|^2)^{n/2+\rho/4} |\widehat{\chi\zeta f}(\xi, \tau)|^2 \, d\tau$$

si $t \in K$. On en déduit que

$$|||\chi f|||^2_{s-\rho/4,K} \leq C \iint (1 + \xi^2 + |\tau|^2)^{s+n/2} |\widehat{\chi\zeta f}(\xi, \tau)|^2 \, d\xi d\tau$$

est fini. En résumé :

$$\forall \chi \in C_0^\infty(I), \qquad |||\chi f|||_{s-\rho/4,K} < +\infty.$$

Soit maintenant $\sigma \in [0, s]$. On suppose qu'il existe un voisinage compact $K' \subset K$ de 0 tel que

$$\forall \chi \in C_0^\infty(I), \qquad |||\chi u|||_{\sigma,K'} < +\infty. \tag{11}$$

Cette hypothèse est vérifiée si $\sigma = 0$ et il reste à montrer qu'elle est vérifiée si $\sigma = s$. On écrit :

$$|||\mathbb{L}_\phi \chi u|||_{\sigma-\rho/4,K} \leq ||\chi f|||_{\sigma-\rho/4,K} + |||[\mathbb{L}_\phi, \chi]u|||_{\sigma-\rho/4,K}.$$

Le second membre est fini car $\sigma \leq s$ et $[\mathbb{L}_\phi, \chi] \in C_0^\infty(I)$.

Si K'' est un voisinage compact de $0 \in \mathbb{R}^n$ contenu dans l'intérieur de K', le Lemme 2.3 donne

$$|||\chi u|||_{\sigma+\rho/4,K''} < +\infty.$$

En itérant, on obtient (11) avec $\sigma = s$ et même un peu mieux.

3. Une condition nécessaire de régularité

3.1. Énoncé de la condition. — On va démontrer le résultat suivant, qu'on appliquera dans le §4.

Théorème 3.1. — *Si ϕ est de classe C^∞ près de $0 \in \mathbb{R}^n$ et si le système $\mathbb{L}_\phi$ est régulier d'ordre $\rho \leq 1$ au voisinage de θ_0^+, il existe $C > 0$ et un voisinage V de 0 tels que, pour tout $v \in C_0^\infty(V)$ et tout $\lambda \geq 1$:*

$$\int \mathrm{e}^{\lambda(\phi(t)+\phi(t)^2)} |v(t)|^2 \, dt \leq C\lambda^{-2\rho} \int \mathrm{e}^{\lambda(\phi(t)+\phi(t)^2)} |\nabla v(t)|^2 \, dt. \tag{12}$$

3.2. Inégalité *a priori*. — Rappelons la notation $\widetilde{u}(\xi,t)$ pour la transformée de Fourier de $u(x,t)$ en x. On note $\hat{u}(\xi,\tau)$ sa transformée de Fourier totale.

Sous l'hypothèse de l'énoncé, on démontre d'abord une inégalité *a priori*, suivant un argument bien classique. Soit U un voisinage borné de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, tel que $\mathbb{L}_\phi$ est défini au voisinage de $\overline{U}$ et régulier d'ordre ρ en $(x,t,1,0)$ si $(x,t) \in \overline{U}$. Comme de plus $\mathbb{L}_\phi$ est elliptique en (x,t,ξ,τ) si $\tau \neq 0$, on a

$$\iint_{\xi \geq 0} (1+\xi^2)^\rho \, |\hat{u}(\xi,\tau)|^2 \, d\xi \, d\tau < +\infty, \tag{13}$$

si $u \in \mathcal{E}'_{\overline{U}}(\mathbb{R}^{n+1})$ et $\mathbb{L}_\phi u \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$. On applique le théorème de Banach-Steinhaus à la famille d'opérateurs bornés

$$T_m : \ \{u \in H^{\rho-1}_{\overline{U}}(\mathbb{R}^{n+1}), \ \ \mathbb{L}_\phi u \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})\} \ \longrightarrow \ L^2(\mathbb{R}^{n+1}),$$

$$(T_m u)(\xi,\tau) = 1_{\mathbb{R}^+}(\xi)\, \chi_m(\xi,\tau)\, (1+\xi^2)^{\rho/2}\, \hat{u}(\xi,\tau),$$

où $\chi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et $0 \leq \chi_m \uparrow 1_{\mathbb{R}^{n+1}}$ quand m tend vers l'infini. On obtient l'existence de $C > 0$ tel que le premier membre de (13) est majoré par

$$C \iint |\mathbb{L}_\phi u(x,t)|^2 \, dx \, dt + C \iint (1+\xi^2+|\tau|^2)^{\rho-1} |\hat{u}(\xi,\tau)|^2 \, d\xi \, d\tau,$$

pour tout $u \in C_0^\infty(U)$. Comme $\rho \leq 1$ et compte tenu de l'identité de Parseval en t et τ, on a montré :

Lemme 3.2. — *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $C > 0$ tels que, pour tout $u \in C_0^\infty(U)$:*

$$\iint_{\xi \geq 0} (1+\xi^2)^\rho \, |\tilde{u}(\xi,t)|^2 \, d\xi \, dt \leq C \iint |\mathbb{L}_\phi u(x,t)|^2 \, dx \, dt + C \iint (1+\xi^2)^{\rho-1} \, |\tilde{u}(\xi,t)|^2 \, d\xi \, dt. \tag{14}$$

3.3. Suite de la démonstration.— L'idée, pour démontrer l'inégalité (12), est d'appliquer (14) à la famille de fonctions

$$u_\lambda(x,t) = \mathrm{e}^{i\lambda z(x,t)/2} w(x) v(t), \tag{15}$$

où $z(x,t)$ est une intégrale première du système $\mathbb{L}_\phi$, $w \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est fixé avec $w \equiv 1$ près de $0 \in \mathbb{R}$, et $v \in C_0^\infty(V)$ est arbitraire.

Si l'on choisit l'intégrale première la plus simple

$$z(x,t) = x - i\phi(t),$$

un calcul, plus facile que celui qu'on va faire, montre que (14) implique une inégalité de la forme

$$\int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|v(t)|^2\,dt \le C\lambda^{-2\rho}\left(\int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|\nabla v(t)|^2\,dt + \int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}|\nabla\phi(t)|^2|v(t)|^2\,dt\right).$$

En fait, sans hypothèse sur ϕ, l'inégalité de Poincaré usuelle

$$\int |v(t)|^2\,dt \le C\int |\nabla v(t)|^2\,dt,$$

appliquée à $\mathrm{e}^{\lambda\phi/2}v$, implique l'inégalité précédente avec $\rho = -1$ et donc pour tout $\rho \le -1$. Il en résulte qu'une inégalité de la forme précédente est inutile, pour ce qu'on veut faire, voir §4, si $\rho \le -1$[(2)].

On choisit à la place l'intégrale première suivante :

$$z = (x - i\phi(t)) + i(x - i\phi(t))^2. \tag{16}$$

Posons :

$$\psi(t) = \phi(t) + \phi(t)^2, \qquad \theta(t) = (1 + 2\phi(t))/2.$$

Avec ces notations, on a

$$\mathrm{e}^{i\lambda z(x,t)/2} = \mathrm{e}^{i\lambda\theta(t)x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2/2}\mathrm{e}^{\lambda\psi(t)/2}. \tag{17}$$

Le facteur $\mathrm{e}^{-\lambda x^2/2}$ serait absent si l'on choisissait $z(x,t) = x - i\phi(t)$.

3.4. Un calcul auxiliaire.

— On utilisera les inégalités suivantes :

Lemme 3.3. — *Soit $w \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $w(0) \neq 0$, et posons $w_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x^2/2}w(x)$. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $\kappa \in]0,1[$. Il existe $C > 0$ tel que*

$$\begin{aligned}\int_{\xi\ge 0}(1+\xi^2)^s\,|\widehat{w}_\lambda(\xi-\theta\lambda)|^2\,d\xi &\ \ge\ \lambda^{2s-1/2}/C,\\ \int(1+\xi^2)^s\,|\widehat{w}_\lambda(\xi-\theta\lambda)|^2\,d\xi &\ \le\ C\lambda^{2s-1/2},\end{aligned}$$

pour tout $\lambda \ge 1$ et tout $\theta \in [\kappa, 1/\kappa]$.

Démonstration. — Pour tout $\lambda > 0$, la fonction $\rho_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x^2/2}$ a pour transformée de Fourier $\widehat{\rho}_\lambda(\xi) = (2\pi)^{1/2}\lambda^{-1/2}\mathrm{e}^{-\xi^2/2\lambda}$. On a donc

$$\widehat{w}_\lambda(\xi) = (2\pi)^{-1}(\widehat{\rho}_\lambda \star \widehat{w})(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\lambda^{-1/2}\int \mathrm{e}^{-(\xi-\eta)^2/2\lambda}\,\widehat{w}(\eta)\,d\eta.$$

On remarque que

$$\lambda^{1/2}\widehat{w}_\lambda(\lambda^{1/2}\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int \mathrm{e}^{-(\xi-\eta\lambda^{-1/2})^2/2}\widehat{w}(\eta)\,d\eta$$

(2) C'est une remarque de H.-M. Maire sur une version antérieure de ce travail qui nous a fait comprendre ce point.

est uniformément borné et tend vers $(2\pi)^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\,w(0)\neq 0$ quand λ tend vers $+\infty$. Pour démontrer la première inégalité de l'énoncé, on écrit,

$$\begin{aligned}\int_{\xi\geq 0}(1+\xi^2)^s\,|\widehat{w}_\lambda(\xi-\theta\lambda)|^2\,d\xi &\geq \int_{|\xi-\theta\lambda|\leq\theta\lambda^{1/2}}(1+\xi^2)^s\,|\widehat{w}_\lambda(\xi-\theta\lambda)|^2\,d\xi\\ &\geq \text{cste}\;\lambda^{2s-1/2}\int_{\xi\leq\kappa}|\lambda^{1/2}\widehat{w}_\lambda(\lambda^{1/2}\xi)|^2\,d\xi\end{aligned}$$

si $\lambda\geq 1$ et $\theta\geq\kappa>0$. Dans le membre de droite, le coefficient de $\lambda^{2s-1/2}$ a une limite >0 quand λ tend vers $+\infty$. D'où la première inégalité.

Par Cauchy-Schwarz :

$$|\widehat{w}_\lambda(\xi)|^2\leq \text{cste}\;\lambda^{-1}\int \mathrm{e}^{-(\xi-\eta)^2/\lambda}|\widehat{w}(\eta)|\,d\eta.$$

On majore successivement $I=\int(1+\xi^2)^s\,|\widehat{w}_\lambda(\xi-\theta\lambda)|^2\,d\xi$:

$$\begin{aligned}I &\leq C_1\lambda^{-1}\iint(1+\xi^2)^s\,\mathrm{e}^{-(\xi-\eta-\theta\lambda)^2/\lambda}\,|\widehat{w}(\eta)|\,d\eta\,d\xi\\ &\leq C_1\lambda^{-1}\iint 2(1+(\xi-\eta)^2)^s(1+\eta^2)^{|s|}\,\mathrm{e}^{-(\xi-\eta-\theta\lambda)^2/\lambda}\,|\widehat{w}(\eta)|\,d\eta d\xi\\ &\leq C_2\lambda^{-1}\int(1+\xi^2)^s\mathrm{e}^{-(\xi-\theta\lambda)^2/\lambda}\,d\xi\\ &\leq C_3\int(1+\theta^2\lambda^2\xi^2)^s\,\mathrm{e}^{-\lambda\theta^2(\xi-1)^2}\,d\xi.\end{aligned}$$

La contribution de $\{|\xi-1|\geq 1/2\}$ à la dernière intégrale est un $O(\mathrm{e}^{-\epsilon\lambda})$ uniformément en $\theta\in[\kappa,1/\kappa]$, avec $\epsilon>0$, et

$$\int_{|\xi-1|\leq 1/2}(1+\theta^2\lambda^2\xi^2)^s\,\mathrm{e}^{-\lambda\theta^2(\xi-1)^2}\,d\xi\leq C_4\lambda^{2s}\int\mathrm{e}^{-\lambda\kappa^2\xi^2}\,d\xi\leq C_5\lambda^{2s-1/2}.$$

D'où le deuxième inégalité du lemme. □

3.5. Fin de la démonstration. — On se place sous les hypothèses du Lemme 3.2 et on se donne un voisinage $U=I\times V\subset\mathbb{R}^{n+1}$ de 0, comme dans sa conclusion. On peut supposer $|\phi|\leq 1$ et $|\nabla\phi|\leq 1$ sur V.

On considère la famille de fonctions (15), où $z(x,t)$ est définie par (16) et $w\in C_0^\infty(I)$ est fixé avec $w\equiv 1$ près de 0. La fonction $v\in C_0^\infty(V)$ et $\lambda\geq 1$ sont arbitraires.

Comme $\mathbb{L}_\phi z=0$, on a

$$\mathbb{L}_\phi u_\lambda(x,t)=\mathrm{e}^{i\lambda z(x,t)/2}\left(w(x)\nabla v(t)+iv(t)w'(x)\nabla\phi(t)\right)$$

et donc :

$$|\mathbb{L}_\phi u_\lambda(x,t)|^2\leq 2\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{e}^{\lambda\psi(t)}\left(|w(x)|^2|\nabla v(t)|^2+|w'(x)|^2|v(t)|^2\right).$$

On a
$$\int \mathrm{e}^{-\lambda x^2}|w(x)|^2\,dx = O(\lambda^{-1/2}),$$
et comme $w(x)\equiv 1$ au voisinage de 0 :
$$\int \mathrm{e}^{-\lambda x^2}|w'(x)|^2\,dx = O(\mathrm{e}^{-\epsilon\lambda})$$
avec $\epsilon > 0$. On obtient l'existence de $A > 0$ tel que
$$\int |\mathbb{L}_\phi u_\lambda(x,t)|^2\,dx\,dt \le A\lambda^{-1/2}\int \mathrm{e}^{\lambda\psi(t)}|\nabla v(t)|^2\,dt + A\mathrm{e}^{-\epsilon\lambda}\int \mathrm{e}^{\lambda\psi(t)}|v(t)|^2\,dt.$$
pour tout $\lambda \ge 1$ et pour tout $v \in C_0^\infty(V)$.

D'autre part, avec la notation du lemme précédent, voir aussi (17), on peut écrire
$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= \mathrm{e}^{i\lambda\theta(t)x}\,w_\lambda(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\psi(t)/2}v(t),\\ \widetilde{u}_\lambda(\xi,t) &= \widetilde{w}_\lambda(\xi-\theta(t)\lambda)\,\mathrm{e}^{\lambda\psi(t)/2}v(t). \end{aligned}$$
Si $s\in\mathbb{R}$ et $\Gamma\in\{\mathbb{R},\mathbb{R}^+\}$,
$$\int_{\xi\in\Gamma}(1+\xi^2)^s\,|\widetilde{u}_\lambda(\xi,t)|^2\,d\xi dt = \int_{\xi\in\Gamma}(1+\xi^2)^s\,|\widetilde{w}_\lambda(\xi-\theta(t)\lambda)|^2\,\mathrm{e}^{\lambda\psi(t)}|v(t)|^2\,d\xi dt$$
peut-être estimé grâce au Lemme 3.3. On obtient l'existence de $A > 0$ tel que :
$$\begin{aligned} \iint (1+\xi^2)^{\rho-1}\,|\widetilde{u}_\lambda(\xi,t)|^2\,d\xi\,dt &\le A\lambda^{2(\rho-1)-1/2}\int \mathrm{e}^{\lambda\psi(t)}|v(t)|^2\,dt,\\ \iint_{\xi\ge 0}(1+\xi^2)^{\rho}\,|\widetilde{u}_\lambda(\xi,t)|^2\,d\xi\,dt &\ge A^{-1}\lambda^{2\rho-1/2}\int \mathrm{e}^{\lambda\psi(t)}|v(t)|^2\,dt. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'inégalité (12) du Théorème 3.1 en appliquant (14) aux fonctions $u_\lambda(x,t)$, compte tenu des estimations précédentes.

4. Démonstration du Théorème 1.4

4.1. Une famille d'exemples. — On suppose $n \ge 2$ et on note
$$t=(t',t_n),\qquad t'=(t_1,\ldots,t_{n-1}),\qquad |t'| = (\sum_{k=1}^{n-1} t_k^2)^{1/2}.$$
Soit $m\ge 1,\ p\ge 0$ et $q\ge 2$ des entiers. On considère la fonction
$$t\in\mathbb{R}^n,\qquad \phi(t) = -|t'|^{2m} - |t'|^2 t_n^{2p} + t_n^q, \tag{18}$$
et le système $\mathbb{L}_\phi$ associé.

La fonction ϕ admet $0\in\mathbb{R}^n$ pour seul point critique et prend des valeurs > 0 et des valeurs < 0 dans tout voisinage de ce point. Elle n'a donc pas de maximum local sur $\mathbb{R}^n$. On va montrer :

Proposition 4.1. — *Soit ϕ la fonction définie par (18), avec des entiers*

$$m \geq 2, \qquad p \geq 2, \qquad q \geq 2mp/(m-1).$$

Soit V un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\rho \leq 1$. S'il existe $C > 0$ tel que :

$$\int \mathrm{e}^{\lambda(\phi(t)+\phi(t)^2)}|v(t)|^2\, dt \leq C\lambda^{-2\rho} \int \mathrm{e}^{\lambda(\phi(t)+\phi(t)^2)}|\nabla v(t)|^2\, dt, \tag{19}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(V)$ et tout $\lambda \geq 1$, alors ρ vérifie :

$$\rho \leq -\left(1 - \frac{2p}{q} - \frac{1}{m}\right)\frac{n-1}{4} + \frac{1}{2q} + \frac{m-1}{4mp}. \tag{20}$$

Compte tenu de la conditon nécessaire de régularité du Théorème 3.1, on en déduit que, si le système $\mathbb{L}_\phi$ associé est régulier d'ordre ρ en θ_0^+, alors ρ vérifie (20). Quand m, p et q tendent vers l'infini, avec par exemple $q = 2mp$, le second membre de (20) tend vers $-(n-1)/4$. Ceci démontre le Théorème 1.4.

4.2. Remarques sur un exemple. — Même si l'on montrait que, dans la Proposition 4.1, la borne (20) est optimale, on ne pourrait rien en déduire quant à l'ordre exact de régularité du système $\mathbb{L}_\phi$ quand $\rho \leq 0$ puisque (19) n'est pas une condition suffisante de régularité à l'ordre ρ dans ce cas.

Il y un cas que nous savons traiter plus complètement. Comme la démonstration est longue et le cas trop particulier, nous nous contenterons d'énoncer le résultat.

On suppose $n = 2$ et

$$\phi(t_1, t_2) = -t_1^4 - t_1^2 t_2^4 + t_2^q,$$

avec $q \geq 8$. Notons :

$$\rho_q = \frac{3}{2q} - \frac{1}{16}.$$

Pour cet exemple, nous savons démontrer des inégalités de la forme :

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}\, |v(t)|^2\, dt &\leq C\lambda^{-2\rho_q} \int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}\, |\nabla v(t)|^2\, dt, \\ \int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}\, |\nabla\phi(t)|^2 |v(t)|^2\, dt &\leq C\lambda^{-2\epsilon_q} \int \mathrm{e}^{\lambda\phi(t)}\, |\nabla v(t)|^2\, dt, \end{aligned}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(V)$ et tout $\lambda \geq 1$, avec $\epsilon_q > 0$. Il apparaît que ces inégalités sont suffisantes pour montrer que le système $\mathbb{L}_\phi$ est régulier d'ordre ρ_q.

Dans ce cas précis, on obtient donc que $\mathbb{L}_\phi$ est régulier en θ_0^+, d'ordre ρ_q exactement, si $q \geq 8$.

4.3. Démonstration de la Proposition 4.1.— On suppose que l'inégalité (19) est vérifiée pour tout $v \in C_0^\infty(V)$ et tout $\lambda \geq 1$, et V assez petit pour que

$$\forall t \in V, \qquad |t'|^{2m} + |t'|^2 t_n^{2p} \leq 1/2.$$

On choisit un élément de $C_0^\infty(V)$, de la forme $u(t')v(t_n)$, avec $u(t')v(t_n) \equiv 1$ au voisinage de 0. On considère la famille de fonctions

$$\lambda \geq 1, \qquad v_\lambda(t) = u(t')\, v(\lambda^{1/q} t_n),$$

à laquelle on applique l'inégalité (19).

On en déduit d'abord une inégalité un peu plus simple. Sur le support de v_λ, $\lambda t_n^q = O(1)$, donc

$$\lambda\phi(t) = \lambda\phi_0(t) + O(1),$$

uniformément en t et en λ, avec :

$$\phi_0(t) = -|t'|^{2m} - |t'|^2 t_n^{2p}.$$

(Notons que ϕ_0 a un maximum (non strict) en $(0, t_n)$, pour tout t_n.)

Quitte à changer de constante $C > 0$, on peut alors remplacer le poids $\exp(\lambda(\phi + \phi^2))$ par le poids $\exp(\lambda(\phi_0 + \phi_0^2))$ dans l'inégalité (19). D'autre part, par hypothèse sur V,

$$\phi_0 \leq \phi_0 + \phi_0^2 \leq \phi_0/2$$

sur le support de v_λ, $\lambda \geq 1$. On déduit ainsi de (19) une inégalité de la forme :

$$\lambda^{2\rho} \iint \mathrm{e}^{\lambda\phi_0(t)} |v_\lambda(t)|^2 \, dt' dt_n \leq C \iint \mathrm{e}^{\lambda\phi_0(t)/2} |\nabla v_\lambda(t)|^2 \, dt' dt_n. \tag{21}$$

On minore d'abord le premier membre. Comme $q \geq 2mp/(m-1)$, $v_\lambda \equiv 1$ sur

$$K_\lambda := \{t = (t', t_n), \;\; |t'| \leq \lambda^{-1/2m}, \;\; |t_n| \leq a\lambda^{-(m-1)/2mp}\},$$

si $a > 0$ est choisi assez petit, pour tout λ assez grand. Comme par ailleurs $\lambda\phi_0(t) = O(1)$ uniformément en $\lambda \geq 1$ et en $t \in K_\lambda$, on obtient la minoration suivante du premier membre de (21) :

$$\lambda^{2\rho} \int \mathrm{e}^{\lambda\phi_0(t)} |v_\lambda(t)|^2 \, dt \geq \text{cste } \lambda^{2\rho - (n-1)/2m - (m-1)/2mp}.$$

Pour majorer le second membre de (21), on écrit

$$\nabla v_\lambda(t) = v(\lambda^{1/q} t_n)\, \nabla u(t') + \lambda^{1/q}\, u(t')\, v'(\lambda^{1/q} t_n).$$

Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\phi_0 \leq -\epsilon$ sur le support de ∇u, donc

$$\int \mathrm{e}^{\lambda\phi_0(t)/2} |\nabla_{t'} v_\lambda(t)|^2 \, dt = O(\mathrm{e}^{-\epsilon\lambda}).$$

Sur le support de $\partial_{t_n} v_\lambda$, dont la longueur est un $O(\lambda^{-1/q})$,

$$\lambda\phi_0(t) \leq -\lambda |t'|^2 t_n^{2p} \leq -c\lambda^{1-2p/q} |t'|^2$$

avec $c > 0$. On a donc :

$$\int \mathrm{e}^{\lambda\phi_0(t)/2} |\partial_{t_n} v_\lambda(t)|^2 \, dt \leq \mathrm{cste}\lambda^{1/q} \int \mathrm{e}^{-c\lambda^{1-2p/q}|t'|^2/2} \, dt',$$

soit un $O(\lambda^{1/q-(n-1)(1-2p/q)/2})$. On obtient donc une majoration du second membre de (21) de la forme :

$$\int \mathrm{e}^{-\lambda\phi_0(t)/2} |\nabla v_\lambda(t)|^2 \, dt' dt_n \leq \mathrm{cste}\ \lambda^{1/q-(n-1)(1-2p/q)/2}.$$

La comparaison avec la minoration du premier membre de (21) déjà obtenue donne l'inégalité (20) et termine la démonstration de la proposition.

Références

[1] M. S. Baouendi & F. Treves, A property of the functions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields, *Ann. Math.*, **113** (1981), 387–421.

[2] S. Chanillo & F. Treves, Local exactness in a class of differential complexes, *Amer. J. Math.*, **121** (1997), 393–426.

[3] P. D. Cordaro & J. G. Hounie, Local solvability for a class of differential complexes, *Acta Math.*, **187** (2001), 191–212.

[4] M. Derridj, Subelliptic estimates for some systems of complex vector fields, *in* Hyperbolic problems and related questions, Birkhauser, à paraître (2006).

[5] B. Helffer & F. Nier, *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Lecture Notes in Maths, **1862**, Springer-Verlag 2005.

[6] L. Hörmander, Subelliptic operators, *in* Seminar on singularities of solutions of differential equations, Princeton University Press, Princeton, 127–208 (1979).

[7] H.-M. Maire, Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations, *Comm. in P.D.E.*, **5** (1980), 331–380.

[8] A. Melin & J. Sjöstrand, Fourier integral operators with complex valued phase functions, *Lect. Notes in Math.*, Springer, **459** (1975), 120–223.

[9] P. Schapira, Condition de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **14** (1981), 121–139.

[10] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, *Astérisque* **95**, Paris 1982.

[11] J.-M. Trépreau, Systèmes différentiels à caractéristiques simples et structures réelles-complexes, *in* séminaire Bourbaki 1981/82, *Astérisque*, **92–93** (1982), 347–364.

[12] F. Treves, On the local solvability and the local integrability of systems of vector fields, *Acta Mathematica*, **151** (1983), 1–48.

Jean-Lin Journé et Jean-Marie Trépreau, Université Paris 6 et UMR 7586, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris ; journe@ccr.jussieu.fr, trepreau@math.jussieu.fr