Søren Fournais

Sur le Laplacien magnétique avec condition de Neumann.

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n° IX, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A9_0>

SUR LE LAPLACIEN MAGNÉTIQUE AVEC CONDITION DE NEUMANN.

S. FOURNAIS

D'APRÈS FOURNAIS-HELFFER

RÉSUMÉ. L'objectif de cet exposé est de décrire de nouveaux résultats (obtenus avec B. Helffer dans [FoHe]) sur l'asymptotique semiclassique des valeurs propres du Laplacien magnétique sur un domaine dans $\mathbb{R}^2$ avec condition de Neumann sur le bord. On discutera aussi l'application de ces résultats à la théorie de Ginzburg-Landau en supraconductivité.

TABLE DES MATIÈRES

1. LE LIEN AVEC LA SUPRACONDUCTIVITÉ

D'abord on va fixer les notations et décrire les idées physiques derrière les problèmes mathématiques considérés. On va se permettre un langage physique avec des notions assez intuitives pour décrire ce contexte. Le problème mathématique spécifique étudié dans le reste du texte sera introduit et défini rigoureusement après. Pour une introduction au sujet de la supraconductivité d'un point de vue physique le lecteur pourra consulter des ouvrages de base, par exemple Saint-James, Sarma, Thomas [S-JSaTh], Tinkham [Ti], Tilley et Tilley [TiTi]. Pour l'approche mathématique on peut, par exemple, commencer par l'exposé de Helffer [Hel1] et consulter ses références. Comme notre sujet a été très bien introduit dans son texte nous allons ici être assez brefs.

Un modèle généralement accepté pour la description des supraconducteurs est donné mathématiquement par la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Avec un certain choix de paramètres et unités cette fonctionnelle s'écrit comme

$$\mathcal{E}[\psi,\vec{A}] = \mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi,\vec{A}] = \int_\Omega \Big\{ |p_{\kappa H\vec{A}}\psi|^2 + \kappa^2 H^2 |\operatorname{curl}\vec{A} - 1|^2 \\ - \kappa^2|\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}|\psi|^4 \Big\}\, dx, \quad (1.1)$$

(les $W^{j,k}$ désignant les espaces de Sobolev habituels) et $p_{\vec{A}} = (-i\nabla - \vec{A})$.

Dans la définition de $\mathcal{E}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est la section horizontale d'un échantillon cylindrique (infini) de supraconducteur. On considère le matériau soumis à un champ magnétique constant (en espace) parallèle à l'axe du cylindre et de norme H. Le paramètre κ dépend du matériau de l'échantillon et est caractéristique de ses propriétés physiques. On distingue les cas des supraconducteurs du Type I ($\kappa \ll 1$) et Type II ($\kappa \gg 1$). Ici nous allons considérer le cas $\kappa \gg 1$.

Les états d'équilibre de l'échantillon sont décrits par les minimiseurs $(\psi,\vec{A})$ de $\mathcal{E}$. La fonction d'onde ψ (appelé paramètre d'ordre dans ce contexte) décrit les propriétés supraconductrices du matériau (soumis au champ extérieur). Si pour un point $x \in \Omega$, $|\psi(x)| \approx 1$ le matériau est supraconducteur près du point x en question. Si par contre $|\psi(x)| \approx 0$, le matériau n'est pas dans son état supraconducteur près de ce point. Le potentiel magnétique $\vec{A}$ mesure le champ magnétique local ($= \operatorname{curl}\vec{A}$) présent dans l'intérieur de l'échantillon.

Nous allons fixer le choix de jauge pour le potentiel magnétique en imposant les conditions

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad\qquad \vec{A}\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \quad (1.2)$$

Pour le potentiel magnétique engendrant le champ magnétique (constant) extérieur on fixe la notation $\vec{F}$. Explicitement,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F} &= 0 \\ \operatorname{curl}\vec{F} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } \Omega, \qquad\qquad \vec{F}\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \quad (1.3)$$

Physiquement on observe le scénario suivant. Pour un échantillon donné (donc pour κ fixé) et pour un champ magnétique extérieur assez fort (H assez grand), le champ magnétique extérieur envahit complètement le matériau et détruit la supraconductivité. Dans cette situation le minimiseur de la fonctionnelle est de la forme $(0,\vec{F})$. Quand H décroît on arrive à un champ critique H_{C_3} au-dessous duquel l'échantillon commence à porter de la supraconductivité. D'abord la supraconductivité est localisé dans une zone près d'une partie du bord (autour des points de courbure maximale). Quand H atteint un deuxième champ critique H_{C_2} le bord tout entier devient supraconducteur et la supraconductivité commence à pénétrer à l'intérieur de Ω. Finalement on arrive à un troisième champ critique H_{C_1} au-dessous duquel tout minimiseur $(\psi,\vec{A})$ satisfait $|\psi| \approx 1$ partout dans Ω, c'est-à-dire que Ω tout entier est devenu supraconducteur.

Ici nous allons nous concentrer sur la région où H est légèrement au-dessous de H_{C_3}. Pour ce qui concerne la zone près de H_{C_2} on peut voir les travaux par Pan [Pan] et Sandier-Serfaty [SaSe] (et références qu'ils indiquent).

Le problème mathématique qui a motivé notre travail [FoHe] est l'étude de H_{C_3} comme fonction de κ (pour κ grand). Pour cela il faut d'abord définir ce champ critique. Nous allons donner une définition en (1.4).

Il est assez standard de montrer que pour κ, H donnés, la fonctionnelle $\mathcal{E}$ admet un minimiseur qui n'est pas forcément unique. On peut aussi montrer (voir Giorgi-Phillips [GiPh] que pour $\kappa > 0$ il existe $H(\kappa)$ tel que si $H > H(\kappa)$ alors $(0, \vec{F})$ est l'unique minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ (sous la condition de jauge (1.2)).

Une définition précise[1] du champ critique H_{C_3} est la suivante

$$H_{C_3}(\kappa) := \inf\{H > 0 \ : \ (0, \vec{F}) \text{ est l'unique minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H}\}. \tag{1.4}$$

Beaucoup de travaux ont été consacrés à l'étude de l'asymptotique de $H_{C_3}(\kappa)$ dans la limite $\kappa \to +\infty$. Baumann-Phillips-Tang [BaPhTa], Lu-Pan [LuPa1, LuPa2, LuPa3], del Pino-Felmer-Sternberg [PiFeSt], Helffer-Pan [HePa], Bernoff-Sternberg [BeSt]. Le meilleur résultat jusqu'au présent étant l'asymptotique à deux termes de [HePa] :

Théorème 1.1. *Il existe deux constantes universelles Θ_0 et C_1 telles que, pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à bord C^∞, on ait (pour κ grand)*

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{C_1}{\Theta_0^{3/2}} k_{\max} + \mathcal{O}(\kappa^{-1/3}) \,, \tag{1.5}$$

où $k_{\max}$ est la courbure maximale du bord $\partial\Omega$.

Remarque 1.2. *Les constantes Θ_0 et C_1 seront définies dans* (4.5) *et* (4.6).

Remarque 1.3. *Notre résultat principal, Théorème 3.1, entraînera une asymptotique plus précise que* (1.5) *(sous les hypothèses géométriques sur Ω du Théorème 3.1, bien sûr). C'est un travail en cours.*

2. Stabilité locale de la solution normale

Le champ critique défini en (1.4) concerne des propriétés globales de la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$. On peut aussi poser la question de savoir pour quelles valeurs de H la solution normale, $(0, \vec{F})$ est un minimiseur local de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$. Ceci nous conduit à définir les champs critiques suivants :

$$\begin{aligned} \overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} &= \inf\{H > 0 \ : \ \ \text{pour tout } H' > H, \operatorname{Hess} \mathcal{E}_{\kappa,H'}\big|_{(0,\vec{F})} \geq 0\} \\ \underline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} &= \inf\{H > 0 \ : \ \operatorname{Hess} \mathcal{E}_{\kappa,H}\big|_{(0,\vec{F})} \geq 0\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Le Hessian, $\operatorname{Hess} \mathcal{E}_{\kappa,H}$, à $(0, \vec{F})$ est donné par

$$\operatorname{Hess} \mathcal{E}_{\kappa,H}\big|_{(0,\vec{F})}[\phi, \vec{a}] = \int_\Omega |(-i\nabla - \kappa H \vec{F})\phi|^2 - \kappa^2 |\phi|^2 + (\kappa H)^2 |\operatorname{curl} \vec{a}|^2 \, dx \,. \tag{2.2}$$

Soit $\lambda_1(B)$ le premier valeur propre de l'opérateur autoadjoint associé à la forme quadratique

$$W^{1,2}(\Omega) \ni u \mapsto \int_\Omega |(-i\nabla - B\vec{F})u(x)|^2 \, dx \,.$$

[1] Il y a plusieurs définitions "raisonnables" possibles de H_{C_3}. Dans la section 2 on en discutera une autre. On s'attend à ce que ces définitions coïncident pour κ, H assez grands. Mais cela n'a pas encore été démontré.

On obtient donc, que

$$\overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} = \inf\{H > 0 \ : \quad \text{pour tout } H' > H, \lambda_1(\kappa H') \geq \kappa^2\}$$
$$\underline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} = \inf\{H > 0 \ : \ \lambda_1(\kappa H) \geq \kappa^2\}. \tag{2.3}$$

Notre résultat principal sur l'asymptotique semiclassique de la première valeur propre, qui sera donné au Théorème 3.1, va entraîner une asymptotique complète des champs critiques locaux.

Théorème 2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné à bord C^∞. On suppose que la courbure $\partial\Omega \ni s \mapsto \kappa(s)$ du bord admet un unique maximum,*

$$\kappa(s) < \kappa(s_0) =: k_{\max}\ , \ \textit{pour tout } s \neq s_0\ ,$$

et que ce maximum est non-dégénéré, c'est à dire

$$k_2 := -\kappa''(s_0) \neq 0\ .$$

Alors il existe $\kappa_0 > 0$, tel que pour tout $\kappa > \kappa_0$, on a $\underline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} = \overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)}$. En plus $\overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)}$ admet une asymptotique complète en puissances de $\kappa^{1/4}$ (pour $\kappa \to +\infty$).

Démonstration. L'asymptotique du Théorème 3.1 et un argument standard qu'on ne va pas donner ici, entraîne que l'application $B \mapsto \lambda_1(B)$ est strictement croissante pour B assez grand. Donc, pour κ assez grand, l'équation

$$\lambda_1(\kappa H) = \kappa^2\ , \tag{2.4}$$

admet une unique solution. D'après (2.3) ceci entraîne que, pour κ grand, on a

$$\underline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} = \overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)}\ .$$

D'après les définitions de λ_1 et $\mu^{(1)}$ (voir la section 3 pour la définition de $\mu^{(1)}(h)$) $\lambda_1(B) = B^{-2}\mu^{(1)}(1/B)$. L'équation (2.4) s'écrit par conséquence,

$$\mu^{(1)}(\frac{1}{\kappa H}) = H^{-2}\ . \tag{2.5}$$

En utilisant la structure de l'asymptotique de $\mu^{(1)}(h)$ (voir (3.3)) et la croissance stricte de $B \mapsto \lambda_1(B)$ pour B grand, on trouve par récurrence une asymptotique de la solution $H = H(\kappa)$ de (2.5) en puissances de $\kappa^{1/4}$ (les premiers termes étant bien sûr donnés par (1.5)). $\square$

3. Résultat principal

Soit Ω un domaine borné à bord régulier dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{F}$ le potentiel vecteur défini dans (1.3). Pour $h \in \mathbb{R}_+$ on définit la forme quadratique

$$q[u] = q_{h,\Omega}[u] = \int_\Omega |(-ih\nabla - \vec{F})u(x)|^2\, dx\ ,$$

sur $W^{1,2}(\Omega)$. Cette forme quadratique étant fermée elle définit un unique opérateur auto-adjoint que nous allons noter par $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{h,\Omega}$. L'opérateur $\mathcal{H}$ est le Laplacien magnétique avec condition de Neumann au bord, c'est à dire que le domaine de l'opérateur $\mathcal{H}$ est l'espace

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \{u \in W^{2,2}(\Omega)\,\big|\, \nu\cdot(-ih\nabla - \vec{F})u(x)|_{\partial\Omega} = 0\}$$

où ν est le vecteur normal (intérieur) au bord $\partial\Omega$.

Notre résultat principal concerne l'asymptotique des premières valeurs propres de $\mathcal{H}$.

Théorème 3.1.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné à bord régulier (C^∞). On suppose que la courbure $\partial\Omega \ni s \mapsto \kappa(s)$ du bord admet un unique maximum,

$$\kappa(s) < \kappa(s_0) =: k_{\max}\ ,\ \textit{pour tout } s \neq s_0\ , \tag{3.1}$$

et que ce maximum est non-dégénéré, c'est à dire

$$k_2 := -\kappa''(s_0) \neq 0\ . \tag{3.2}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe une suite $\{\zeta_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ telle que $\mu^{(n)}(h)$ admet l'asymptotique suivante (pour $h \searrow 0$) :

$$\begin{aligned}\mu^{(n)}(h) \sim \Theta_0 h - k_{\max} C_1 h^{3/2} &+ C_1 \Theta_0^{1/4} \sqrt{\tfrac{3k_2}{2}}(2n-1)h^{7/4} \\ &+ h^{15/8} \sum_{j=0}^{\infty} h^{j/8} \zeta_j^{(n)}\ .\end{aligned} \tag{3.3}$$

Remarque 3.2. *Les constantes Θ_0 et C_1 sont celles de* (4.5) *et* (4.6).

4. Réduction au bord (Quasimodes)

4.1. **Le modèle du demi plan.**

Le cas où $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est très important pour l'analyse mathématique du problème. Nous allons prendre des coordonnées $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et écrire l'opérateur $\mathcal{H}$ comme,

$$\mathcal{H} = (-ih\partial_s + t)^2 - h^2 \partial_t^2\ , \tag{4.1}$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Pour déterminer $\inf \operatorname{Spec} \mathcal{H}$ on peut faire une transformation de Fourier partielle en s et trouver la famille d'opérateurs

$$\overline{\mathfrak{h}}_\xi = (h\xi + t)^2 - h^2 \partial_t^2\ , \tag{4.2}$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ avec conditions de Neumann sur le bord. Le changement de variables $\tau = h^{-1/2} t$, implique une équivalence unitaire entre $\overline{\mathfrak{h}}_\xi$ et $h\mathfrak{h}_\xi$, avec

$$\mathfrak{h}_\xi := -\partial_\tau^2 + (\tau + h^{1/2}\xi)^2\ , \tag{4.3}$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ avec conditions de Neumann en 0. Nous allons redéfinir ξ et tomber sur la famille d'opérateurs (avec condition de Neumann)

$$H^{N,\xi} := -\partial_\tau^2 + (\tau + \xi)^2\ , \tag{4.4}$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+)$, qui a été étudié par Dauge-Helffer [DaHe]. Ils ont trouvé les résultats suivants

- La fonction $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \inf \operatorname{Spec} H^{N,\xi}$ admets un unique minimum non-dégénéré. Ceci permet de définir Θ_0 et ξ_0 par

$$\Theta_0 = \inf_\xi \inf \operatorname{Spec} H^{N,\xi} = \inf \operatorname{Spec} H^{N,\xi_0}\ . \tag{4.5}$$

- On peut montrer mathématiquement que $\Theta_0 < 1$ et trouver numériquement que $\Theta_0 \approx 0.59010$ [S-JdG].
- Il existe une unique fonction propre, normalisée et positive, u_0 de H^{N,ξ_0} avec valeur propre Θ_0.

A partir de u_0 on peut définir la constante C_1 (qui apparaît dans les formules asymptotiques (1.5) et (3.3)) par

$$C_1 := \frac{u_0(0)^2}{3} \,. \tag{4.6}$$

4.2. **Coordonnées près du bord.**
Il est utile de faire un changement de coordonnées près du bord $\partial\Omega$. Soient $t(x) := \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, $\mathbb{S}^1_{|\partial\Omega|/2\pi} \ni s \mapsto \gamma(s)$ une paramétrisation du bord avec $|\gamma'(s)| = 1$ et $\nu(s)$ le vecteur normal intérieur de $\partial\Omega$ au point $\gamma(s)$. Alors il existe $t_0 > 0$ (assez petit) tel que

$$\mathbb{S}^1_{|\partial\Omega|/2\pi} \times (0, t_0) \ni (s,t) \mapsto \Psi(s,t) = \gamma(s) + t\nu(s) \in \Omega \,, \tag{4.7}$$

définit un difféomorphisme sur son image (qui est $\{x \in \Omega \,|\, t(x) < t_0\}$). Nous allons écrire $\kappa(s)$ pour la courbure de $\partial\Omega$ au point $\gamma(s)$:

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\nu(s) \,.$$

Nous allons toujours supposer que $\kappa(0) = k_{\max}$.

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\mathrm{supp}(u) \subset \{x \in \Omega \,|\, t(x) < t_0\}$. Alors (avec $w = (s,t)$)

$$\begin{aligned} &\int_{\{t(x)<t_0\}} |(-ih\nabla_x - \vec{F}(x))u(x)|^2 \, dx = \\ &\qquad \int_K \big[|(hD_t - \widetilde{A}_2)v|^2 + (1 - t\kappa(s))^{-2}|(hD_s - \widetilde{A}_1)v|^2\big](1 - t\kappa(s)) \, dw \end{aligned} \tag{4.8}$$

et

$$\int_{\{t(x)<t_0\}} |u(x)|^2 \, dx = \int_K |v|^2 (1 - t\kappa(s)) \, dw \,, \tag{4.9}$$

avec $v(w) = u(\Psi(w))$, $K = \mathbb{S}^1_{|\partial\Omega|/2\pi} \times (0, t_0)$, $w = (s,t)$ et $dw = ds\, dt$.
Le potentiel magnétique $\widetilde{A}$ (dans (4.8)) satisfait

$$\frac{\partial \widetilde{A}_2}{\partial s}(w) - \frac{\partial \widetilde{A}_1}{\partial t}(w) = 1 - t\kappa(s) \,. \tag{4.10}$$

L'identité (4.8) entre formes quadratiques entraîne l'identité suivante entre opérateurs différentiels

$$(-ih\nabla_x - \vec{F}(x))^2 = a^{-1}[(hD_s - \widetilde{A}_1)a^{-1}(hD_s - \widetilde{A}_1) + (hD_t - \widetilde{A}_2)a(hD_t - \widetilde{A}_2)] \,, \tag{4.11}$$

avec $a(w) = 1 - t\kappa(s)$.
L'espace de Hilbert usuel $L^2(\{x \in \Omega \,|\, t(x) < t_0\})$ devient $L^2(K; a\, dw)$.
Dans les coordonnées (s,t) on peut toujours (après un changement de jauge) s'arranger pour ne pas avoir de composante normale du potentiel vecteur $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}_2 = 0 \,. \tag{4.12}$$

Dans ce cas on trouve :

$$\partial_t \widetilde{A}_1 = -(1 - t\kappa(s)) \,. \tag{4.13}$$

Nous allons toujours travailler dans le choix de jauge donné par (4.12) et (4.13).

4.3. **Les quasimodes.**
Dans cette partie nous allons appliquer la méthode systématique de réduction de Grushin[2] (voir Grushin [Gru] et Sjöstrand [Sj]) pour construire des fonctions $\phi_M^{(n)}$ telles que $\|\phi_M^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} \approx 1$ et

$$\mathcal{H}\phi_M^{(n)} = \mu_M^{(n)}(h)\phi_M^{(n)} + \mathcal{O}(h^{2+M/8}) \ , \tag{4.14}$$

où $\mu_M^{(n)}(h)$ est la série formelle pour $\mu^{(n)}(h)$, donnée en (3.3), tronquée à l'ordre $h^{2+M/8}$. L'équation (4.14) implique qu'il existe des points dans le spectre de $\mathcal{H}(h)$ ayant l'asymptotique donné par $\mu^{(n)}(h)$. Pour établir le Théorème 3.1 il restera à montrer que $\operatorname{Spec}\mathcal{H}(h)$ ne contient rien d'autre (près de $\inf \operatorname{Spec}\mathcal{H}(h)$). Cette partie complémentaire de la démonstration sera décrite dans la section 6. Les fonctions $\phi_M^{(n)}$ seront localisées près du point du bord à courbure maximale, et nous allons donc passer aux coordonnées (s,t) de la sous-section 4.2.

Dans les coordonnées (s,t), l'opérateur $\mathcal{H}$ s'écrit comme en (4.11) avec le choix de jauge donné par (4.12) et (4.13). Nous faisons le changement d'échelle $\tau = h^{-1/2}t$, $\sigma = h^{-1/8}s$. Alors $\mathcal{H}$ devient

$$\tilde{P} = \tilde{a}^{-1}(h^{7/8}D_\sigma + h^{1/2}\tau\tilde{a}_2)\tilde{a}^{-1}(h^{7/8}D_\sigma + h^{1/2}\tau\tilde{a}_2) + h\tilde{a}^{-1}D_\tau\tilde{a}D_\tau \ , \tag{4.15}$$

avec

$$\tilde{a}(\sigma,\tau) = 1 - h^{1/2}\tau\kappa(h^{1/8}\sigma) \ , \qquad \tilde{a}_2(\sigma,\tau) = 1 - h^{1/2}\tau\frac{\kappa(h^{1/8}\sigma)}{2} \ . \tag{4.16}$$

Soit (avec Θ_0 et ξ_0 de (4.5)),

$$P = e^{-i\sigma\xi_0/h^{3/8}}h^{-1}\tilde{P}e^{i\sigma\xi_0/h^{3/8}} - \Theta_0 \ .$$

Nous n'allons plus mettre les $\sim$ sur les a's, donc P s'écrit

$$\begin{aligned} P = {} & a^{-1}\big\{(\tau+\xi_0) + h^{3/8}D_\sigma - \tau(1-a_2)\big\}a^{-1}\big\{(\tau+\xi_0) + h^{3/8}D_\sigma - \tau(1-a_2)\big\} \\ & + a^{-1}D_\tau a D_\tau - \Theta_0 \ . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Comme κ est C^∞ et admet un maximum non-dégénéré en $s=0$, nous pouvons écrire (au sens des séries formelles)

$$a(\sigma,\tau) = 1 - h^{1/2}\tau\kappa(h^{1/8}\sigma) = 1 - h^{1/2}\tau\kappa(0) - \tau\sum_{j=2}^{\infty} h^{1/2+j/8}\frac{\sigma^j\kappa^{(j)}(0)}{j!} \ , \tag{4.18}$$

et

$$a_2(\sigma,\tau) = 1 - h^{1/2}\tau\frac{\kappa(h^{1/8}\sigma)}{2} = 1 - h^{1/2}\tau\frac{\kappa(0)}{2} - \tau\sum_{j=2}^{\infty} h^{1/2+j/8}\sigma^j\frac{\kappa^{(j)}(0)}{2(j!)} \ . \tag{4.19}$$

Avec ces formules nous trouvons la série formelle suivante pour P

$$P = P_0 + h^{3/8}P_1 + h^{1/2}P_2 + h^{3/4}P_3 + h^{7/8}Q(h) \ , \tag{4.20}$$

[2]La méthode de Grushin est très voisine de la méthode de Feschbach qui est aussi souvent utilisée dans la littérature en physique mathématique.

avec

$$P_0 = D_\tau^2 + (\tau+\xi_0)^2 - \Theta_0 \ , \tag{4.21}$$
$$P_1 = 2D_\sigma(\tau+\xi_0) \ , \tag{4.22}$$
$$P_2 = \kappa(0)\big\{2\tau(\tau+\xi_0)^2 - \tau^2(\tau+\xi_0)\big\} + i\kappa(0)D_\tau \ , \tag{4.23}$$
$$P_3 = D_\sigma^2 - \big(2\tau(\tau+\xi_0)^2 - \tau^2(\tau+\xi_0)\big)\frac{k_2\sigma^2}{2} - \frac{k_2\sigma^2}{2}iD_\tau \ , \tag{4.24}$$

avec $Q(h)$ de la forme :

$$Q(h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{j/8} Q_j \ .$$

Soit

$$\delta P = P - P_0 \ . \tag{4.25}$$

Nous cherchons des fonctions $\phi^{(n)}(h)$ telles que

$$(P - \frac{z^{(n)}(h)+\Theta_0 h}{h})\phi^{(n)}(h) \sim 0 \ , \qquad D_\tau \phi^{(n)}(h;\sigma,0) = 0 \ . \tag{4.26}$$

Les fonctions que nous allons construire, $\phi^{(n)}(h)$, seront des séries formelles en $h^{1/8}$ à coefficients dans les fonctions de Schwartz. Cela implique que nous pourrons les multiplier par des fonctions de localisation (sur une échelle d'ordre 1 en (s,t), c'est à dire d'ordre $(h^{-1/8}, h^{-1/2})$ en (σ,τ)), ce qui introduira des erreurs exponentiellement petites dans (4.14).

Nous introduisons les opérateurs R_0^+, R_0^- et E_0 définis par :

$$\begin{aligned} R_0^+ : \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma \times (\overline{\mathbb{R}_+})_\tau) \\ \phi(\sigma) &\mapsto \phi(\sigma)u_0(\tau) = \phi\otimes u_0 \ , \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} R_0^- : \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma \times (\overline{\mathbb{R}_+})_\tau) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma) \\ f &\mapsto \int_0^\infty f(\sigma,\tau)u_0(\tau)\,d\tau \ , \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} E_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma \times (\overline{\mathbb{R}_+})_\tau) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma \times (\overline{\mathbb{R}_+})_\tau) \\ f\otimes\phi &\mapsto \begin{cases} f\otimes(P_0^{-1}\phi) \ , & \text{if } \phi \perp u_0 \ , \\ 0 \ , & \text{if } \phi \parallel u_0 \ . \end{cases} \end{aligned} \tag{4.29}$$

(dans la définition de E_0, P_0 est considéré comme un opérateur sur $L^2((\mathbb{R}_+)_\tau)$) .

Nous allons travailler avec les matrices d'opérateurs,

$$\mathcal{P}(z) = \begin{pmatrix} P-z & R_0^+ \\ R_0^- & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathcal{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 & R_0^+ \\ R_0^- & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{4.30}$$

La matrice $\mathcal{E}_0$ est un inverse approché de $\mathcal{P}(z)$:

$$\mathcal{P}(z)\mathcal{E}_0 = I + \mathcal{K} \ ,$$

avec

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} (\delta P - z)E_0 & (\delta P - z)R_0^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Nous posons $z = z(h)$ comme une série formelle

$$z(h) \sim \sum_{\ell \geq 3} \hat{z}_\ell h^{\frac{\ell}{8}} \ , \tag{4.31}$$

et observons que (formellement) $(\delta P - z) = \mathcal{O}(h^{3/8})$. Formellement nous pouvons donc introduire

$$\mathcal{Q}_\infty \sim \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \mathcal{K}^j \ , \qquad \mathcal{E}(z) := \mathcal{E}_0 \mathcal{Q}_\infty = \begin{pmatrix} E_\infty(z) & E_\infty^+(z) \\ E_\infty^-(z) & E_\infty^\pm(z) \end{pmatrix} \ ,$$

et obtenir

$$\mathcal{P}(z) \mathcal{E}_0 \mathcal{Q}_\infty \sim I \ . \tag{4.32}$$

C'est à dire (au sens des séries formelles en $h^{\frac{1}{8}}$),

$$(P - z) E_\infty(z) + R_0^+ E_\infty^-(z) \sim 1 \ , \tag{4.33a}$$
$$(P - z) E_\infty^+(z) + R_0^+ E_\infty^\pm(z) \sim 0 \ , \tag{4.33b}$$
$$R_0^- E_\infty(z) \sim 0 \ , \tag{4.33c}$$
$$R_0^- E_\infty^+(z) \sim 1 \ . \tag{4.33d}$$

En particulier, si $\phi_\infty(\sigma) = \sum h^{j/8} \phi_j(\sigma)$, avec $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, est une série formelle de fonctions, solution de

$$E_\infty^\pm(z) \phi_\infty \sim 0 \ , \tag{4.34}$$

alors

$$(P - z) E_\infty^+(z) \phi_\infty \sim 0 \ , \tag{4.35}$$

(modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$), et on peut tronquer les séries formelles pour obtenir des fonctions (séries finies en $h^{1/8}$) solutions de (4.35) avec un reste arbitrairement petit (dépendant de l'ordre de la troncature de la série formelle).

Pour résumer, si $E_\infty^\pm(z)$ est la série formelle suivante

$$E_\infty^\pm(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j R_0^- [(\delta P - z) E_0]^{j-1} (\delta P - z) R_0^+ \ , \tag{4.36}$$

nous cherchons

$$\phi_\infty(\sigma; h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\sigma) h^{j/8} \ ,$$
$$z_\infty(h) \sim h^{3/8} z_1 + h^{1/2} z_2 + h^{3/4} z_3 + h^{7/8} \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j h^{j/8} \ , \tag{4.37}$$

avec $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\sigma)$, tels que

$$E_\infty^\pm(z_\infty(h)) \phi_\infty(\sigma; h) \sim 0 \ , \tag{4.38}$$

Dans le reste de cette section nous allons décrire les solutions de (4.38).

Un peu de calcul[3] donne

$$E_\infty^\pm(z_\infty(h)) \sim h^{3/8}E_1 + h^{1/2}E_2 + h^{3/4}E_3 + h^{7/8}\sum_{j=0}^{\infty} h^{j/8}F_j\ . \tag{4.39}$$

avec

$$E_1 = -R_0^-(P_1 - z_1)R_0^+ = z_1\ , \tag{4.40}$$
$$E_2 = z_2 + \kappa(0)C_1 \tag{4.41}$$
$$E_3 = z_3 - 3C_1\sqrt{\Theta_0}D_\sigma^2 - C_1\frac{k_2\sigma^2}{2}\ . \tag{4.42}$$

L'équation (4.38) implique donc

$$z_1 = 0\ , \qquad\qquad z_2 = -\kappa(0)C_1\ , \tag{4.43}$$

et

$$E_3\phi_0 = 0\ . \tag{4.44}$$

L'opérateur E_3 étant un oscillateur harmonique nous trouvons facilement les valeurs propres possibles

$$z_3^{(n)} = C_1\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{\Theta_0}k_2}\ (2n-1)\ ,\ \text{ where } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ . \tag{4.45}$$

La fonction ϕ_0 est déterminée par le choix de $z_3^{(n)}$ et l'équation (4.44).

A partir d'ici les fonctions ϕ_j et les coefficients z_j (de (4.37)) sont déterminées par récurrence. Nous omettons les détails (voir [FoHe]).

5. Estimations de localisation

5.1. **Localisation près du bord.**

Pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on trouve

$$\int_\Omega |(-ih\nabla - A)u|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} |(-ih\nabla - A)u|^2\,dx \geq 1\cdot h\|u\|_{L^2}^2\,. \tag{5.1}$$

Comme $\Theta_0 < 1$ on peut voir que l'effet du bord est de faire descendre l'énergie. Il faut donc que les fonctions propres associées à des basses valeurs propres soient localisées près du bord pour pouvoir profiter de cet effet du bord. Une manière très efficace de quantifier ce phénomène est donnée par les estimations du type Agmon (voir Agmon [Ag], Helffer [Hel2]).

Théorème 5.1. (Estimation d'Agmon par rapport à t)
Soit $\Theta' \in (\Theta_0, 1)$. Il existe $C, \alpha > 0$, tels que si u_h est une fonction propre de $\mathcal{H}$ avec valeur propre $\mu(h)$ tel que

$$\mu(h) \leq \Theta_0' h\ , \tag{5.2}$$

alors nous avons l'estimation

$$\int_\Omega e^{2\alpha \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)/h^{1/2}}\big\{|u_h(x)|^2 + h^{-1}|(-ih\nabla - A)u_h(x)|^2\big\}\,dx \leq C\ . \tag{5.3}$$

Remarque 5.2. *Théorème 5.1 est essentiellement démontré dans* [HeMo2].

[3]Utilisant, en particulier, l'analyse spectrale de l'opérateur $H^{N,\xi_0} = P_0 + \Theta_0$ introduit en (4.4). La plupart de cette analyse à été faite dans [DaHe, HeMo2].

Esquisse de la démonstration.
Soit $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature :

$$\chi_2(t) = 1 \quad \text{pour } |t| \geq 2, \qquad\qquad \chi_2(t) = 0 \quad \text{pour } |t| \leq 1. \tag{5.4}$$

Soit, pour $T > 0$, $\chi(x) := \chi_2(\frac{t(x)}{Th^{1/2}})$. En appliquant (5.1) et après quelques commutations élémentaires on obtient

$$\begin{aligned}
\mu(h)\|\chi e^{\alpha t(x)/h^{1/2}} u_h\|^2 &= \Re\langle \chi^2 e^{2\alpha t(x)/h^{1/2}} u_h, \mathcal{H} u_h\rangle \\
&= \langle \chi(x) e^{\alpha t(x)/h^{1/2}} u_h, \mathcal{H}(\chi(x) e^{\alpha t(x)/h^{1/2}} u_h)\rangle \\
&\qquad - \frac{1}{2} h^2 \int_\Omega |\nabla(\chi(x) e^{\alpha t(x)/h^{1/2}})|^2 \, |u_h(x)|^2 \, dx \\
&\geq h\|\chi e^{\alpha t(x)/h^{1/2}} u_h\|^2 - \frac{1}{2} h^2 \int_\Omega |\nabla(\chi(x) e^{\alpha t(x)/h^{1/2}})|^2 \, |u_h(x)|^2 \, dx \,.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Maintenant on peut facilement utiliser (5.2) et voir que, pour T assez grand et α assez petit,

$$\|\chi e^{\alpha t(x)/h^{1/2}} u_h\|^2 \leq C \,,$$

ce qui entraîne facilement l'estimation L^2 dans (5.3),

$$\|e^{\alpha t(x)/h^{1/2}} u_h\|^2 \leq C' \,. \tag{5.6}$$

L'estimation d'énergie de (5.3) suit en utilisant (5.6) dans (5.5). □

5.2. **Localisation près du point de courbure maximale.**
La localisation en variable tangentielle s près du point de courbure maximale suit du même principe que la localisation en t. D'abord nous démontrons que les fonctions localisées loin du point (du bord) de courbure maximale ont une énergie "trop grande". C'est la Proposition 5.3 ci-dessous (à comparer avec l'estimation (5.1)). Une fois cette estimation d'énergie obtenue, l'estimation de localisation (estimation d'Agmon) en découle comme dans la preuve du Théorème 5.1.

Proposition 5.3.
Il existe $\epsilon_0, C_0 > 0$ tels que si $\tilde{\kappa}(s) := \kappa(s) - \epsilon_0 s^2$ et

$$U_h(x) = \begin{cases} h, & \textit{pour } t(x) > 2h^{1/8}, \\ \Theta_0 h - C_1 \tilde{\kappa}(s) h^{3/2} - C_0 h^{7/4}, & \textit{pour } t(x) \leq 2h^{1/8} \,. \end{cases}$$

alors

$$\langle u, \mathcal{H} u\rangle \geq \int_\Omega U_h(x) |u(x)|^2 \, dx,$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ et $h \in (0,1]$.

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce résultat. Il résulte d'une analyse détaillée de l'opérateur $\mathcal{H}$. Seule une région près du bord de Ω est importante. On fait une partition de l'unité en boîtes de taille $h^{1/8}$. Sur chaque boîte on peut comparer avec le problème correspondant à courbure constante — c'est a dire le cas ou Ω est un cercle. Pour ce problème modèle une asymptotique assez précise était démontré dans [BaPhTa]. La Proposition 5.3 suit.

Comme pour la variable t, l'estimation d'énergie de Proposition 5.3 entraîne une localisation près des points de courbure maximale.

Théorème 5.4.
Soient $M > 0$ et $\chi_1 \in C_0^\infty$, $\chi_1 \equiv 1$ sur un voisinage de 0. Alors, il existe $C, \alpha > 0$, tels que si u_h est une fonction propre de $\mathcal{H}$ avec valeur propre $\mu(h)$ telle que

$$\mu(h) \leq \Theta_0 h - C_1 k_{\max} h^{3/2} + M h^{7/4} ,$$

alors nous avons l'estimation suivante

$$\int_\Omega e^{2\alpha|s|^2/h^{1/4}} \chi_1^2(t/h^{1/8}) \Big\{ |u_h(x)|^2 + h^{-1} \big|(-ih\nabla - A(x)) u_h(x)\big|^2 \Big\} \, dx \\ \leq C .$$

La démonstration du Théorème 5.4 suit celle du Théorème 5.1 (*mutatis mutandis*) et ne sera pas donnée ici.

5.3. **Localisation en D_s.**
La localisation en fréquence suit la même philosophie : Une fonction étant localisée en fréquence loin de ξ_0 a forcément une énergie élevée. Ceci se comprend en regardant le problème modèle du demi-plan, car ξ_0 est un minimum non-dégénéré de $\xi \mapsto \inf \operatorname{Spec} H^{N,\xi}$.

La stratégie de la démonstration du Théorème 5.1 entraîne alors une localisation (en fréquence) des fonctions propres de basse énergie près de ξ_0. Mais pour les localisations en fréquence les propriétés de commutation avec $\mathcal{H}$ ne sont pas aussi simples que pour les localisations en espace. Par conséquence il faut travailler un peu plus. Dans l'article [FoHe] nous faisons les commutations "à la main". On pourrait certainement aussi faire un calcul pseudodifferentiel (dans des classes bien choisies).

Théorème 5.5. (Localisation par rapport à D_s)
Soit $M > 0$ et soient $\chi_1, \chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ une partition de l'unité sur $\mathbb{R}_+$:

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1, \qquad \operatorname{supp} \chi_1 \subset (-2, 2), \qquad \operatorname{supp} \chi_2 \subset \mathbb{R} \setminus [-1, 1] .$$

Soit $\epsilon \in (0, 3/8)$, et soit W l'opérateur défini par (où t_0 est la constante de la définition des coordonnées (s,t))

$$W(1 - \chi_1(2t/t_0)) = 0$$
$$W \chi_1(2t/t_0) = \chi_1(4s/|\partial\Omega|) \chi_2\big(\frac{|h^{1/2} D_s - \xi_0|}{h^\epsilon}\big) \chi_1(4s/|\partial\Omega|) \chi_1(2t/t_0) ,$$

Alors pout tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C_N > 0$ telle que pour toute fonction propre u_h de $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h)$ avec valeur propre $\mu(h)$ telle que

$$\mu(h) \leq \Theta_0 h - C_1 k_{\max} h^{3/2} + M h^{7/4} ,$$

nous avons les estimations

$$\Big\| W \chi_1(4t/t_0) u_h \Big\|_{L^2} \leq C_N h^N ,$$

et

$$\Big\langle W \chi_1(4t/t_0) u_h \,\Big|\, \mathcal{H}(h) W \chi_1(4t/t_0) u_h \Big\rangle \leq C_N h^N .$$

6. Réduction au bord (étude des vraies fonctions propres)

Pour terminer la démonstration du Théorème 3.1 il nous reste à démontrer que les points de $\operatorname{Spec}\mathcal{H}(h)$ décrits par l'asymptotique (3.3) sont des valeurs propres simples et qu'il n'y a pas d'autres points dans la partie basse de $\operatorname{Spec}\mathcal{H}(h)$. Ici "partie basse" veut dire

$$\operatorname{Spec}\mathcal{H}(h) \cap (-\infty, \Theta_0 h - C_1 k_{\max} h^{3/2} + M h^{7/4}] \,, \tag{6.1}$$

pour une constante $M > 0$ fixée.

Soit $\chi \in C_0^\infty$, $\chi = 1$ sur un voisinage de 0. Pour $\eta > 0$ et une fonction propre u_h de $\mathcal{H}$ avec valeur propre associée μ_h (contenue dans l'ensemble donné par (6.1)), soient

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_h &= e^{-is\xi_0/h^{1/2}} \chi(\frac{t}{h^{1/2-\eta}}) \chi(\frac{s}{h^{1/8-\eta}}) \chi(\frac{|h^{1/2}D_s - \xi_0|}{h^{3/8-\eta}}) \chi(\frac{4s}{|\partial\Omega|}) u_h \,, \\ \psi_h(\sigma,\tau) &= h^{5/16} \tilde{\psi}_h(h^{1/8}\sigma, h^{1/2}\tau) \,. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dans le reste de la section, nous allons faire des calculs (et estimations) dans $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, d\sigma d\tau)$. La mesure induite de $L^2(\Omega)$ est $(1 - h^{1/2}\tau\kappa(h^{-1/8}\sigma))d\sigma d\tau$, mais vues les propriétés de localisation de toutes les fonctions étudiées on peut la remplacer par $d\sigma d\tau$ à une petite erreur relative ($\mathcal{O}(h^{1/2-\eta})$) près.

Utilisant les propriétés de localisation de u_h, obtenues dans les Théorèmes 5.1, 5.4 et 5.5, on voit que

$$\|\psi_h\|_{L^2} = 1 + \mathcal{O}(h^\infty) \,, \qquad \text{and} \qquad L\psi_h = \psi_h + \mathcal{O}(h^\infty) \,, \tag{6.3}$$

pour tout

$$L = \tilde{\chi}(\frac{\tau}{h^{-\eta}}) \tilde{\chi}(\frac{\sigma}{h^{-\eta}}) \tilde{\chi}(h^\eta D_\sigma) \,, \tag{6.4}$$

avec $\tilde{\chi} \in C_0^\infty$, telle que $\tilde{\chi} = 1$ sur un voisinage de 0. Soit L_0 un opérateur comme dans (6.4) avec un choix de $\tilde{\chi}$ fixé.

Soit H_{harm} l'oscillateur harmonique sur $L^2(\mathbb{R})$ défini par

$$H_{\mathrm{harm}} := 3C_1\sqrt{\Theta_0} D_\sigma^2 + C_1 \frac{k_2\sigma^2}{2} \,, \tag{6.5}$$

Bien évidemment, H_{harm} est l'oscillateur harmonique qui apparaît dans (4.42). Les valeurs propres de H_{harm} sont

$$e_\ell := C_1 \Theta_0^{1/4} \sqrt{\tfrac{3k_2}{2}} (2\ell - 1) \,, \tag{6.6}$$

avec $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

En utilisant la localisation L_0 pour obtenir des opérateurs bornés, on peut justifier une partie des calculs formels de la section 4. Le résultat important est le Lemme 6.1 suivant.

Lemme 6.1. *Soit M dans* (6.1) *donné. Il existe $\eta_0 > 0$ tel que si $\eta < \eta_0$, il existe $C > 0$ tel que pour toute fonction propre normalisée u_h de $\mathcal{H}(h)$ avec valeur propre associée $\mu(h)$ contenue dans l'ensemble donné par* (6.1)*, la fonction ψ_h associée à u_h comme dans* (6.2) *vérifie l'estimation*

$$\big\| \big(\nu(h) - H_{\mathrm{harm}}\big) R_0^- L_0 \psi_h \big\| \leq C h^{1/16} \,, \tag{6.7}$$

où R_0^- est l'opérateur défini dans (4.28) *et $\nu(h)$ est donné par*

$$\nu(h) := h^{-7/4} \big\{ \mu(h) - (\Theta_0 h - k_{\max} C_1 h^{3/2}) \big\} \,. \tag{6.8}$$

En particulier, l'équation (6.7) implique que $\nu(h)$ est proche d'une des valeurs e_ℓ de (6.6), c'est à dire que $\mu(h)$ est proche d'une des valeurs (séries formelles) du membre de droite de (3.3). En travaillant un peu plus on obtient, en utilisant que les valeurs propres de H_{harm} sont simples et que ψ_h est déterminée par $R_0^- L_0 \psi_h$, que, pour chaque $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe au plus un point $\mu(h)$ de $\operatorname{Spec} \mathcal{H}(h)$ (pour h assez petit) tel que $\nu(h)$ (de (6.8)) vérifie

$$\nu(h) - e_\ell = \mathcal{O}(h^{1/16}) .$$

Pour plus de détails nous renvoyons à l'article [FoHe].

Références

[Ag] S. Agmon : *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations.* Math. Notes, T. 29, Princeton University Press (1982).

[BaPhTa] P. Bauman, D. Phillips, and Q. Tang : Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. Arch. Rational Mech. Anal. 142, p. 1-43 (1998).

[BeSt] A. Bernoff and P. Sternberg : Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. J. Math. Phys. 39, p. 1272-1284 (1998).

[DaHe] M. Dauge and B. Helffer : Eigenvalues variation I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators. J. Differential Equations 104 (2), p. 243-262 (1993).

[FoHe] S. Fournais and B. Helffer : Accurate estimates for magnetic bottles in connection with superconductivity. Preprint 2004.

[GiPh] T. Giorgi, D. Phillips : The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model. SIAM J. Math. Anal. 30, 341-359 (1999).

[Gru] V. V. Grušhin : Hypoelliptic differential equations and pseudodifferential operators with operator-valued symbols (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 88 (130), p. 504-521 (1972).

[Hel1] B. Helffer : Bouteilles magnétiques et supraconductivité. Séminaire équations aux dérivées partielles du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique (2000-2001).

[Hel2] B. Helffer : *Introduction to the semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications.* Springer lecture Notes in Math. 1336 (1988).

[HeMo2] B. Helffer and A. Morame : Magnetic bottles in connection with superconductivity. J. Funct. Anal. 185 (2), p. 604-680 (2001).

[HePa] B. Helffer and X. Pan : Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. Ann. Inst. H. Poincaré (Section Analyse non linéaire) 20 (1), p. 145-181 (2003).

[LuPa1] K. Lu and X-B. Pan : Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Physica D 127, p. 73-104 (1999).

[LuPa2] K. Lu and X-B. Pan : Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. J. Math. Phys. 40 (6), p. 2647-2670, June 1999.

[LuPa3] K. Lu and X-B. Pan : Gauge invariant eigenvalue problems on $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2_+$. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (3), p. 1247-1276 (2000).

[LuPa4] K. Lu and X-B. Pan : Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. of Differential Equations 168 (2000).

[Pan] X-B. Pan : Surface superconductivity in Applied magnetic fields above H_{C_2}. Comm. Math. Phys. 228, 327-370 (2002).

[PiFeSt] M. del Pino, P.L. Felmer, and P. Sternberg : Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. Math. Phys. 210, p. 413-446 (2000).

[S-JdG] D. Saint-James and P. G. de Gennes : Onset of superconductivity in decreasing fields. Phys. Lett. 7, 5 p. 306-308 (1963).

[S-JSaTh] D. Saint-James, G. Sarma, and E.J. Thomas : *Type II Superconductivity.* Pergamon, Oxford 1969.

[SaSe] E. Sandier and S. Serfaty : On the energy of type II superconductors in the mixed phase. Rev. Math. Phys. 12, 1219-1257 (2000).

[Sj] J. Sjöstrand : Operators of principal type with interior boundary conditions. Acta Math. 130, p. 1-51 (1973).

[TiTi] D. R. Tilley and J. Tilley : *Superfluidity and superconductivity.* 3rd edition. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia 1990.

[Ti] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity.* McGraw-Hill Inc., New York, 1975.

(S. Fournais) CNRS et Laboratoire de Mathématiques UMR CNRS 8628, Université Paris-Sud - Bât 425, F-91405 Orsay Cedex, France.

E-mail address: soeren.fournais@math.u-psud.fr