



SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2004-2005

Christophe Cheverry

Sur la propagation de quasi-singularités

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n° VIII, 18 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A8_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

SUR LA PROPAGATION DE QUASI-SINGULARITES

Christophe CHEVERRY

IRMAR, Université de Rennes I
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes
christophe.cheverry@univ-rennes1.fr

0 Introduction.

Dans cet exposé, on considère les équations d'Euler incompressible

$$(1) \quad \partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2$$

où $\mathbf{u} = {}^t(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^d)$ est un champ de vecteurs à valeurs dans \mathbb{R}^d , \mathbf{p} est une fonction scalaire et

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{u}^j}{\partial x_j}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^j = \operatorname{div}(\mathbf{u}^j \mathbf{u})^j, \quad \nabla := (\partial_1, \dots, \partial_d).$$

On note en abrégé $\mathcal{EI}(\mathbf{u}) = 0$ les deux équations aux dérivées partielles écrites en (1). On fixe une fois pour toute un état de base

$$\mathbf{u}_0(t, x) \in C^\infty([0, T]; H^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)), \quad T > 0$$

qui est solution sur le domaine $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ de $\mathcal{EI}(\mathbf{u}_0) = 0$. On associe à cet \mathbf{u}_0 une phase

$$\varphi_0(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

qui est astreinte à l'équation eiconale

$$(2) \quad \partial_t \varphi_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \varphi_0 = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$$

et qui est non stationnaire au sens où

$$\exists c > 0; \quad \|\nabla \varphi_0(t, x)\| \geq c, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d.$$

On repère le projecteur orthogonal $\Pi_0(t, x)$ sur l'hyperplan de \mathbb{R}^d formé des directions qui sont orthogonales à $\nabla \varphi_0(t, x)$. Autrement dit

$$\Pi_0(t, x) \mathbf{u} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_0(t, x)) \|\nabla \varphi_0(t, x)\|^{-2} \nabla \varphi_0(t, x), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d.$$

On choisit $l \in \mathbb{N}_*$ quelconque. On sélectionne une suite de profils

$$U_{0k}(x, \theta) \in H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d), \quad k \in \mathbb{N}_*, \quad \theta \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On partage les U_{0k} en leurs parties moyennes

$$\bar{U}_{0k}(x) \equiv \langle U_{0k} \rangle(x) := \int_{\mathbb{T}} U_{0k}(x, \theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}_*$$

et leurs parties oscillantes

$$U_{0k}^*(x, \theta) := U_{0k}(x, \theta) - \bar{U}_{0k}(x), \quad k \in \mathbb{N}_*.$$

On suppose que le profil principal U_{01} est nontrivial

$$(3) \quad \Pi(0, x) \partial_\theta U_{01}(x, \theta) \neq 0.$$

Le symbole ε désigne un paramètre destiné à tendre vers 0, disons $\varepsilon \in]0, 1]$. A l'aide des ingrédients donnés ci-dessus, on construit la famille de fonctions (définies via le lemme de Borel)

$$\mathbf{u}_0^\varepsilon(x) = U_0^\varepsilon(x, \frac{\varphi_0(0, x)}{\varepsilon}) := \mathbf{u}_0(0, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_{0k}(x, \frac{\varphi_0(0, x)}{\varepsilon}), \quad \varepsilon \in]0, 1].$$

L'objectif de ce texte est d'apporter quelques éléments d'information concernant le problème de Cauchy oscillant suivant

$$\{ \mathcal{EI}(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \quad \mathbf{u}^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(\cdot) \}_{\varepsilon \in]0, 1]}.$$

Soulignons les propriétés des \mathbf{u}_0^ε . Les \mathbf{u}_0^ε sont uniformément bornés dans l'espace d'énergie

$$\sup \{ \|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}; \varepsilon \in]0, 1] \} < \infty.$$

Examinons les tourbillons associés. En dimension $d = 3$, ceux-ci sont donnés par

$$\omega_0^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \nabla \varphi_0(0, x) \wedge \partial_\theta U_0^\varepsilon(x, \frac{\varphi_0(0, x)}{\varepsilon}) + (\nabla \wedge U_0^\varepsilon)(x, \frac{\varphi_0(0, x)}{\varepsilon}), \quad \varepsilon \in]0, 1].$$

Le terme de taille maximale du développement asymptotique conduisant à ω_0^ε n'est autre que

$$\varepsilon^{\frac{1}{l}-1} \nabla \varphi_0(0, x) \wedge \partial_\theta U_{01}(x, \frac{\varphi_0(0, x)}{\varepsilon}).$$

L'hypothèse (3) implique

$$\nabla \varphi_0(0, x) \wedge \partial_\theta U_{01}(x, \theta) \neq 0.$$

Ainsi, pour $l \geq 3$, la famille $\{\omega_0^\varepsilon\}_\varepsilon$ n'est pas bornée dans $L^p(\mathbb{R}^3)$, ceci étant vrai pour tout choix de $p \in [1, +\infty]$. C'est pourquoi on qualifie la famille $\{\mathbf{u}_0^\varepsilon\}_\varepsilon$ de **quasi-singularité**. On peut dresser le tableau récapitulatif suivant

	<i>nom</i>	<i>régime</i>
$l = 1$	oscillations de faible amplitude	sous-critique
$l = 2$	oscillations fortes	critique
$l \geq 3$	oscillations turbulentes	sur-critique
$l \equiv +\infty$	oscillations de grande amplitude	sur-critique

Le niveau de régularité engagé est mesuré par l . Il diminue lorsque l augmente. Le résultat donné page suivante affirme l'existence pour tout $l < \infty$ de solutions BKW ayant un degré d'approximation arbitraire (au vu des puissances d' ε).

Théorème. *Il existe des suites de profils*

$$U_k(t, x, \theta), \quad P_k(t, x, \theta), \quad k \in \mathbb{N}_*$$

vérifiant

$$\bar{U}_k(0, x) = \bar{U}_{0k}(x), \quad \Pi_0(0, x) U_k^*(0, x, \theta) = \Pi_0(0, x) U_{0k}^*(x, \theta)$$

et une famille finie de fonctions

$$\varphi_k(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \quad 1 \leq k \leq l-1$$

tels que les développements asymptotiques

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(t, x) &:= \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_g^\varepsilon(t, x)) \\ \mathbf{p}^\varepsilon(t, x) &:= \mathbf{p}_0(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{l}} P_k(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_g^\varepsilon(t, x)) \end{aligned}$$

bâtis à l'aide de la phase géométrique

$$\varphi_g^\varepsilon(t, x) := \varphi_0(t, x) + \sum_{k=1}^{l-1} \varepsilon^{\frac{k}{l}} \varphi_k(t, x)$$

soient solutions de

$$\partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla \mathbf{p}^\varepsilon = \mathbf{f}^\varepsilon, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0$$

avec un terme source \mathbf{f}^ε qui est d'ordre infini en ε au sens où pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$\sup_{\varepsilon \in]0, 1]} \sup_{t \in [0, T]} \varepsilon^{-n} \|\mathbf{f}^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} < \infty.$$

L'optique géométrique est une manière de décrire la propagation de singularités. Pour des équations quasilineaires telles que (1), un contrôle en norme L^∞ sur les dérivées de \mathbf{u} est un point d'appui précieux. C'est pourquoi la plupart des travaux réalisés jusqu'à présent se limitent au contexte sous-critique ($l = 1$). Du coup, ils font seulement intervenir la phase φ_0 solution de (2).

Pour $l \geq 2$, c'est à dire en régimes critiques ou sur-critiques, la discussion dépend beaucoup de la structure des équations et de la polarisation des données. En ce qui concerne les équations d'Euler incompressible, le Théorème atteste d'une grande liberté de choix sur les conditions initiales. En particulier, les parties oscillantes qui sont orthogonales à $\nabla \varphi_0$ peuvent être fixées quelconques.

On observe alors de façon générique l'apparition des termes φ_k pour tous les k avec $1 \leq k \leq l-1$. Intuitivement, la présence des φ_k peut être perçue comme la réponse donnée par le système (1), et plus particulièrement par le critère d'incompressibilité, à la rigidité du développement asymptotique monophasé imposé à $t = 0$. Les φ_k jouent un rôle dans le fait qu'il ne se produit pas la formation de chocs. Concrètement, ils donnent accès à l'équation eiconale approchée

$$\partial_t \varphi_g^\varepsilon + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \varphi_g^\varepsilon = O(\varepsilon).$$

La raison d'être des φ_k s'explique aussi par des considérations mathématiques qui apparaîtront au fil du texte. Il faut noter à ce propos que les φ_k ne sont pas détectés lorsque les profils U_{0k} satisfont certaines contraintes plus restrictives. C'est le cas par exemple dans les contributions [7] et [10] qui vues sous cet angle se situent en retrait de l'étude systématique qui est menée ici.

Insistons encore sur le caractère spécifique à Euler incompressible de la discussion qui suit. D'autres équations ou d'autres polarisations mèneraient vers des conclusions bien différentes. Par exemple, le traitement dans [6] des oscillations de grande amplitude ($l = +\infty$) pour Euler compressible non isentropique relève d'une toute autre problématique.

Le chapitre 1 explique comment se situe le Théorème par rapport aux approches habituelles, quelle en est l'originalité et quels renseignements il est possible d'en extraire. Il y sera fait successivement allusion à l'homogénéisation, au problème de la fermeture, à certains types d'instabilités et à la compacité par compensation.

Les parties 2 et 3 décrivent le cheminement qui conduit de l'optique géométrique monophasée aux quasi-singularités. Elle sera l'occasion de mettre en valeur quelques idées sous-jacentes à la preuve du Théorème. Les arguments seront présentés de manière volontairement simplifiée. Ces notes sont en effet conçues comme un guide pour la lecture de [3] et [4]. Il convient donc de se reporter à ces deux articles pour trouver des démonstrations complètes, détaillées et plus fidèles au sujet.

1 L'arrière plan mathématique.

L'énoncé donné ci-dessus est issu de préoccupations très concrètes. Il provient de l'étude des microstructures c'est à dire des phénomènes turbulents en mécanique des fluides.

1.1 A propos du problème de la fermeture.

Dans [1] et [9] les auteurs modélisent les mouvements d'un fluide en régime turbulent par un développement asymptotique de la forme

$$\mathbf{u}_b^\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{3}} U_j^m(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_0(t, x), \varepsilon^{-\frac{2}{3}} t).$$

On retrouve ici les échelles du Théorème appliqué avec $l = 3$ auquel cas

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{3}} U_j(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_g^\varepsilon(t, x)), \quad \varepsilon^{-1} \varphi_g^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \varphi_0 + \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi_1 + \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \varphi_2.$$

Et l'analogie devient encore plus évidente pour peu que l'on puisse choisir $\varphi_1(t, x) = t$ et $\varphi_2(t, x) = 0$.

L'objectif poursuivi dans [1] et [9] est d'identifier le profil principal $U_1^m(t, x, \theta)$. A cette fin, les auteurs adoptent la méthode suivante. Ils reportent l'expression \mathbf{u}_b^ε au niveau des équations d'Euler. Ils ordonnent les termes selon les différentes puissances d' ε mises en facteur

$$\mathcal{EI}(\mathbf{u}_b^\varepsilon) = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{3}} \mathcal{F}_j^m(U_1^m, \dots, U_j^m, U_{j+1}^m, U_{j+2}^m).$$

Ils imposent

$$\mathcal{F}_j^m(U_1^m, \dots, U_j^m, U_{j+1}^m, U_{j+2}^m) \equiv 0, \quad \forall j \in \{-1\} \cup \mathbb{N}.$$

Puis ils cherchent à résoudre cette liste d'équations via un algorithme. En fait, ils se contentent de traiter les trois premières conditions $\mathcal{F}_j^m \equiv 0$ avec $-1 \leq j \leq 1$. Ils en extraient un système dont ils "trouvent" une solution. Ils utilisent pour cela des arguments qui parfois sont heuristiques. Le constat est qu'un raisonnement rigoureux ne semble pas s'appliquer. L'obstruction qui empêche de mener à son terme de tels calculs BKW est connue sous le nom de *problème de la fermeture*. Plusieurs modèles ont été avancés dans la littérature physique pour y remédier. Mais ceux-ci n'ont pas été justifiés.

On propose ici d'avoir recours à des calculs BKW de type *sur-critiques*. Or ceux-ci indiquent que la famille $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_\varepsilon$ est ε -stratifiée selon une phase

$$\varphi_g^\varepsilon(t, x) = \varphi_0(t, x) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \varphi_1(t, x) + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \varphi_2(t, x)$$

dans laquelle on a en général $\varphi_1 \not\equiv t$ et $\varphi_2 \not\equiv 0$. Ce sont là des raisons géométriques qui font que \mathbf{u}_b^ε ne convient pas. Plus généralement tout calcul BKW reposant sur un développement asymptotique mettant en jeu un nombre *fini* de termes φ_k (nombre qui serait indépendant de l'ordre d'approximation) ne peut aboutir. C'est là une obstruction plus subtile à l'utilisation de \mathbf{u}_b^ε . En fait, à la fois les modes de représentation des solutions selon \mathbf{u}_b^ε et \mathbf{u}^ε sont impropres aux calculs BKW. Les raisons de cela seront détaillées au paragraphe 3.4. Elles ne sont pas sans liens avec la présence d'instabilités.

1.2 Instabilités apparentes.

Soit $T > 0$ et $\delta > 0$ choisis quelconques. On note

$$B_t(\mathbf{v}) := \{ \mathbf{u} \in L^2; \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{L^\infty([0,t]; L^2)} \leq \delta \}, \quad t \in [0, T].$$

On déduit du Théorème le résultat suivant.

Corollaire. *Pour toute constante $C > 0$, il existe des données*

$$(\mathbf{h}, \tilde{\mathbf{h}}) \in (B_0(\mathbf{u}_0) \cap C^\infty)^2, \quad (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}) \in (B_T(0) \cap C^\infty)^2$$

conduisant à des solutions régulières $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) \in B_T^2$ de

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} &= \mathbf{f}, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{h}(\cdot), \\ \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{p}} &= \tilde{\mathbf{f}}, & \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} &= 0, & \tilde{\mathbf{u}}(0, \cdot) &= \tilde{\mathbf{h}}(\cdot), \end{aligned}$$

vérifiant pour un certain $t \in]0, T]$ l'inégalité

$$(4) \quad \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq C \left(\|\mathbf{h} - \tilde{\mathbf{h}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \|(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}})(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} ds \right).$$

Ce résultat n'est pas nouveau. Un énoncé analogue a été formulé par S. Friedlander, W. Strauss et M. Vishik [8]. De telles amplifications ont aussi été constatées (dans des contextes voisins) par E. Grenier, G. Lebeau, G. Métivier et d'autres auteurs. Avec pour socle commun une stratégie en deux temps. Le premier établit l'instabilité d'un linéarisé. Le second passe cette instabilité au non linéaire.

Notre démonstration suit une logique différente.

Schéma de preuve. On raisonne par l'absurde. On suppose que l'inégalité inverse de (4) est vérifiée pour une certaine constante C . On y remplace \mathbf{u} et $\tilde{\mathbf{u}}$ par deux solutions formelles \mathbf{u}^ε et $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon$ données par le Théorème. Cela conduit à

$$\|(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C (\|\mathbf{u}_0^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + O(\varepsilon^\infty)).$$

On fait alors tendre ε vers 0 pour aboutir à une contradiction. \square

Ce raisonnement peut s'appliquer parce que les développements asymptotiques dont il est question codent certaines instabilités. Et puisque celles-ci sont visibles on dit qu'elles sont *apparentes*.

Plus précisément une perturbation à l'instant initial du l^{em} profil U_{0l} en du $U_{0l} + \delta U_{0l}$ est susceptible de provoquer à un instant $t = \tilde{t} > 0$ ultérieur une modification du profil principal $U_1(\tilde{t}, \cdot)$ en du $U_1(\tilde{t}, \cdot) + O(\delta U_{0l})$. Autrement dit certaines quantités qui à $t = 0$ ont le poids ε en facteur sont susceptibles de gouverner à l'instant \tilde{t} des informations qui ont une amplitude d'ordre $O(\varepsilon^{\frac{1}{l}})$.

Prenons à présent pour état de base $\mathbf{u}_0 \equiv 0$. Les expressions \mathbf{u}^ε sont donc de taille $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$. On les normalise en introduisant

$$\mathbf{v}^\varepsilon := \varepsilon^{-\frac{1}{l}} \mathbf{u}^\varepsilon = U_1 + \varepsilon^{\frac{1}{l}} U_2 + \dots + \varepsilon^{1-\frac{1}{l}} U_l + \dots.$$

Sur les \mathbf{v}^ε , on a :

o une estimation uniforme en norme d'énergie

$$\sup_{\varepsilon \in]0,1]} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{v}^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C < \infty,$$

o une équation

$$\partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{l}} (\mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}^\varepsilon + \nabla \tilde{\mathbf{p}}^\varepsilon = O(\varepsilon^\infty), \quad \text{div } \mathbf{v}^\varepsilon = 0, \quad \tilde{\mathbf{p}}^\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{l}} \mathbf{p}^\varepsilon.$$

On explique ci-dessous pourquoi il n'est pas possible de rendre compte du comportement asymptotique oscillant des \mathbf{v}^ε via la démarche habituelle de la compacité par compensation. Adoptons par exemple la méthode présentée par R.-J. DiPerna et A.-J. Majda dans [7]. Celle-ci associe à la famille $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}_\varepsilon$ une mesure $\mu(t, \cdot)$ sélectionnée parmi

$$\mu(t, \cdot) \in \begin{array}{l} \text{mesure de défaut, microlocale, semi-classique, } \dots \\ \text{mesure de Young, multi-phase, multi-échelle, } \dots \end{array}$$

Ces notions décrivent avec beaucoup de précision la partie principale des oscillations, à savoir les contributions de taille $\varepsilon^0 = 1$. A l'instant $t = 0$, elles captent U_{01} . A l'instant $\tilde{t} > 0$, elles attrapent $U_1(\tilde{t}, \cdot)$. En revanche, elles n'ont pas accès aux termes dont les amplitudes sont d'ordre inférieur. Par exemple, pour $l \geq 2$, elles ignorent tout de ce qui se passe à l'ordre $\varepsilon^{1-\frac{1}{l}}$.

Or l'analyse BKW de type sur-critique révèle que l'expression $U_1(\tilde{t}, \cdot)$ est liée de manière non triviale à U_{0l} . Par conséquent $\mu(\tilde{t}, \cdot)$ ne dépend pas seulement de $\mu(0, \cdot)$. Et dans ces conditions, même s'il est possible d'écrire une équation d'évolution sur μ , celle-ci ne peut pas prétendre déterminer qui est μ .

1.3 A propos de l'optique géométrique.

Des progrès ont été réalisés récemment concernant la propagation sur un intervalle de temps $[0, T]$ avec $T > 0$ de singularités oscillantes qui à l'instant initial s'écrivent

$$\mathbf{u}_0^\varepsilon(x) = \mathbf{u}_0(0, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_{0k}(x, \frac{\varphi_0(0, x)}{\varepsilon}), \quad l \in \mathbb{N}_*.$$

Le cas $l = 1$ fait l'objet de l'optique géométrique *faiblement non linéaire*. Il a été traité par O. Guès, J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. Une théorie complète est désormais disponible dans le contexte général des systèmes quasi-linéaires.

Pour $l = 2$, on parle d'oscillations *fortes*. Pour que la propagation ne conduise pas à la formation de chocs, il faut que le système étudié comporte des aspects linéaires. L'oscillation doit être polarisée sur un champ linéairement dégénéré. On dispose alors de propriétés de *transparence*. Cette situation est étudiée dans l'article [5].

Le cas $l = \infty$ correspond à des oscillations dites *de grande amplitude*. Il n'est atteint que sous des conditions très restrictives qui sont envisagées dans [6].

Les différentes facettes de cette discussion peuvent être illustrées sur les équations d'Euler compressible

$$(5) \quad \mathcal{EC}(\mathbf{v}) := \begin{cases} \partial_t \varrho + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \varrho^{-1} \nabla \mathbf{p} = 0, \\ \partial_t \mathbf{s} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{s} = 0, \end{cases} \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \varrho \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$$

où \mathbf{p} est une fonction de ϱ et de \mathbf{s} . On a alors le tableau récapitulatif suivant :

EULER COMPRESSIBLE (5)

polarisation sur	calcul BKW	stabilité
densité ϱ	$l = 1$	oui
vitesse \mathbf{u}	$l = 2$	non
entropie \mathbf{s}	$l = \infty$	“oui”

Les équations d'Euler incompressible (1) ne s'insèrent dans aucune de ces cases. Elles réclament en fait un traitement à part. Pour cerner la problématique correspondante, il convient de mentionner les deux résultats suivants.

◦ L'article [10] manipule des oscillations de grande amplitude ($l = \infty$). D. Serre y extrait le modèle suivant qui décrit l'évolution couplée d'un profil principal U_0 et d'une phase φ_0 selon

$$\begin{cases} \partial_t U_0 + (U_0 \cdot \nabla) U_0 + \nabla P_0 = 0, & \operatorname{div} \bar{U}_0 = 0, \\ \partial_t \varphi_0 + (\bar{U}_0 \cdot \nabla) \varphi_0 = 0, & U_0^* \cdot \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Il constate que le problème de Cauchy associé est mal posé au sens d'Hadamard.

◦ La contribution [2] concerne les équations de Navier-Stokes posées en dimension trois d'espace ($d = 3$), avec viscosité anisotropique

$$(6) \quad \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \nu \Delta_h \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \Delta_h = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2.$$

J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier établissent pour (6) l'existence locale en temps de solutions \mathbf{u} ayant la régularité

$$\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\delta) := L^\infty([0, T]; H_{x_h, x_3}^{0, \frac{1}{2} + \delta}), \quad \delta > 0.$$

La contrainte (6) ainsi que la condition

$$(7) \quad \mathcal{E}\mathcal{C}(\mathbf{v}) = \nu \Delta_h \mathbf{v}, \quad \nu \geq 0$$

ne font pas intervenir de viscosité dans la direction verticale. Ces équations sont donc susceptibles de porter des oscillations fortes polarisées dans les directions horizontales. Une variante du Théorème fournit pour (6) et (7) des solutions approchées d'ordre infini vérifiant

$$\mathbf{u}_s^\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}_s^\varepsilon(t, x_1, x_2, x_3 + \varepsilon) = \mathbf{u}_0(t, x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{2}} U_k(t, x_1, x_2, \frac{x_3}{\varepsilon}), \quad \varepsilon \in]0, 1].$$

Ces familles $\{\mathbf{u}_s^\varepsilon\}_\varepsilon$ satisfont des majorations uniformes en norme $H_{x_h, x_3}^{0, \frac{1}{2}}$. En revanche, elles ne sont pas bornées dans les espaces $\mathcal{H}(\delta)$ dès que $\delta > 0$. Elles jouent donc un rôle critique vis à vis du résultat énoncé dans [2]. Elles sont instables [5] lorsque $\nu = 0$. Par contre

Proposition. *Pour $\nu > 0$, il existe des solutions exactes $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_\varepsilon$ de (6) et (7) qui sont définies sur le domaine $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ avec $T > 0$ et qui correspondent aux solutions approchées $\{\mathbf{u}_s^\varepsilon\}_\varepsilon$.*

Des résultats plus précis (mais plus lourds à énoncer) sont formulés dans les articles [3] et [4]. En particulier, la forme des \mathbf{u}_s^ε et la taille de ν peuvent être réglées de manière plus optimale que ce qui est indiqué dans la Proposition.

Le chapitre 2 qui suit se place dans le contexte (7). On y explique de quelle façon est obtenue l'existence des \mathbf{u}^ε . Ce sont les grandes lignes de [3] qui y sont esquissées.

2 Etude du cas critique.

L'analyse repose sur l'étude du linéarisé de (7) le long d'une oscillation forte \mathbf{u}_s^ε . Dans une première approximation, les opérateurs sont remplacés par leurs symboles. On est alors confronté à un système d'équations différentielles ordinaires

$$(8) \quad \partial_t \mathbf{v} = \mathcal{L}_\varepsilon \mathbf{v} = \varepsilon^{-2} A \mathbf{v} + \varepsilon^{-1} B \mathbf{v} + \varepsilon^0 C \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, \quad N = p + q, \quad \varepsilon \in]0, 1]$$

qui met en jeu des matrices A , B et C qui sont de taille $N \times N$ et qui vérifient les hypothèses

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -A^*, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

où le bloc A_{11} (de taille $p \times p$ avec $p < N$) est inversible. Le test de base pour contrôler la croissance en temps de la norme de \mathbf{v} consiste à multiplier l'équation (8) à gauche par ${}^t\mathbf{v}$. La matrice A étant anti-symétrique, il reste

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\mathbf{v}\|^2 = \varepsilon^{-1} ((B + B^*) \mathbf{v}, \mathbf{v}) + ((C + C^*) \mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Concernant Euler, la matrice B est non triviale et elle n'est pas anti-symétrique de sorte qu'on doit s'en tenir à la majoration grossière

$$(9) \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq e^{ct/\varepsilon} \|\mathbf{v}(0)\|, \quad \forall (\varepsilon, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^+$$

qui ne suffit pas pour absorber les termes d'erreur en $O(\varepsilon^{\frac{N}{l}})$ avec $N \gg l$ livrés par les calculs BKW. Pour établir l'existence des solutions exactes \mathbf{u}^ε , il faut avant toute chose améliorer le contrôle obtenu en (9). Cela demande d'organiser différemment les estimations d'énergie. On explique ci-dessous comment procéder. Il se dégage quatre étapes.

◦ **Etape 1 : Réduction.** On élimine de B tous les termes qui jouent un rôle artificiel, c'est à dire tous les termes qui peuvent être absorbés par A . Cela se fait via le changement de variables

$$\tilde{\mathbf{v}} = M_\varepsilon \mathbf{v}, \quad M_\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon M.$$

La nouvelle équation se déduit de la précédente par conjugaison

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon \tilde{\mathbf{v}} = (M_\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon M_\varepsilon^{-1}) \tilde{\mathbf{v}} = \varepsilon^{-2} A \tilde{\mathbf{v}} + \varepsilon^{-1} \tilde{B} \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{C} \tilde{\mathbf{v}}.$$

La matrice B se trouve changée en

$$\tilde{B} = B + M A - A M.$$

La matrice M peut être ajustée de façon à ce que

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}'_{12} \\ \tilde{C}'_{21} & \tilde{C}'_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix}.$$

Pour Euler, on obtient

$$\tilde{B}_{22} \neq 0, \quad \tilde{B}_{22} \neq -{}^t\tilde{B}_{22}, \quad (\tilde{B}_{22})^2 \equiv 0, \quad \tilde{C} \neq 0.$$

On doit alors gérer

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{v} = \varepsilon^{-2} A_{11} \tilde{v} + \tilde{C}_{11} \tilde{v} + \tilde{C}'_{12} \tilde{w}, \\ \partial_t \tilde{w} = \varepsilon^{-1} \tilde{B}_{22} \tilde{w} + \tilde{C}'_{21} \tilde{v} + \tilde{C}'_{22} \tilde{w}. \end{cases}$$

◦ **Etape 2 : Eclatement.** On simplifie ici la discussion en supposant que la matrice \tilde{B}_{22} est de taille 2×2 et qu'elle est donnée sous la forme de sa réduite de Jordan

$$\tilde{B}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{B}_{22})^2 = 0.$$

On doit alors poursuivre avec le système

$$(10) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{v} = \varepsilon^{-2} A_{11} \tilde{v} + \tilde{C}_{11} \tilde{v} + \tilde{C}_{12} \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{13} \tilde{w}_2, \\ \partial_t \tilde{w}_1 = \tilde{C}_{21} \tilde{v} + \tilde{C}_{22} \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{23} \tilde{w}_2, \\ \partial_t \tilde{w}_2 = \varepsilon^{-1} \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{31} \tilde{v} + \tilde{C}_{32} \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{33} \tilde{w}_2, \end{cases} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on remplace \tilde{w}_2 par

$$\tilde{w}_2 = \varepsilon^{-1} \tilde{w}_2^0 + \tilde{w}_2^1, \quad \tilde{w}_2^0 \in \mathbb{R}, \quad \tilde{w}_2^1 \in \mathbb{R}.$$

On reporte \tilde{w}_2 au niveau de (10). On regarde \tilde{w}_2^0 et \tilde{w}_2^1 comme étant de nouvelles variables d'état. On récupère un système qui contient moins d'équations que d'inconnues. On lève l'indétermination en rendant égale à zéro l'expression qui sur la dernière ligne est mise en facteur d' ε^{-1} . On obtient ainsi

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{v} = \varepsilon^{-2} A_{11} \tilde{v} + \varepsilon^{-1} \tilde{C}_{13} \tilde{w}_2^0 + \tilde{C}_{11} \tilde{v} \\ \quad \quad \quad + \tilde{C}_{12} \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{13} \tilde{w}_2^1, \\ \partial_t \tilde{w}_1 = \varepsilon^{-1} \tilde{C}_{23} \tilde{w}_2^0 + \tilde{C}_{21} \tilde{v} + \tilde{C}_{22} \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{23} \tilde{w}_2^1, \\ \partial_t \tilde{w}_2^0 = \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{33} \tilde{w}_2^0, \\ \partial_t \tilde{w}_2^1 = \tilde{C}_{31} \tilde{v} + \tilde{C}_{32} \tilde{w}_1 + \tilde{C}_{33} \tilde{w}_2^0. \end{cases}$$

L'équation n'a pas changé de type. Elle se formule encore selon

$$\partial_t \check{\mathbf{v}} = \check{\mathcal{L}}_\varepsilon \check{\mathbf{v}} = \varepsilon^{-2} \check{\mathcal{A}} \check{\mathbf{v}} + \varepsilon^{-1} \check{\mathcal{B}} \check{\mathbf{v}} + \varepsilon^0 \check{\mathcal{C}} \check{\mathbf{v}}$$

avec de nouveau

$$\check{\mathcal{A}} = -\check{\mathcal{A}}^*, \quad \check{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{C}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \check{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2^0 \\ \tilde{w}_2^1 \end{pmatrix}.$$

◦ **Etape 3 : Réduction.** On répète le changement de variables

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{M}_\varepsilon \check{\mathbf{v}}, \quad \hat{M}_\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon \hat{M}.$$

La nouvelle équation se déduit de la précédente par conjugaison

$$\partial_t \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathcal{L}}_\varepsilon \hat{\mathbf{v}} = (\hat{M}_\varepsilon \check{\mathcal{L}}_\varepsilon \hat{M}_\varepsilon^{-1}) \check{\mathbf{v}} = \varepsilon^{-2} \hat{\mathcal{A}} \hat{\mathbf{v}} + \varepsilon^{-1} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathcal{C}} \hat{\mathbf{v}}.$$

La matrice $\hat{\mathcal{B}}$ se trouve changée en

$$\hat{\mathcal{B}} = \check{\mathcal{B}} + \hat{M} \check{\mathcal{A}} - \check{\mathcal{A}} \hat{M}.$$

La matrice \hat{M} peut être ajustée de façon à ce que

$$\hat{\mathcal{A}} = -\hat{\mathcal{A}}^*, \quad \hat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{B}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2^0 \\ \tilde{w}_2^1 \end{pmatrix}.$$

Or, pour Euler, le constat est que $\hat{B}_{23} \equiv 0$. Dès lors, on récupère

$$(11) \quad \|\hat{\mathbf{v}}(t)\| \leq e^{ct} \|\hat{\mathbf{v}}(0)\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Pour convertir (11) en une estimation portant sur \mathbf{v} , on utilise le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}(0) & \xrightarrow{\mathcal{L}_\varepsilon} & \mathbf{v}(t) \\ T(0)^{-1} \downarrow & & \uparrow T(\varepsilon) \\ \hat{\mathbf{v}}(0) & \xrightarrow{\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon} & \hat{\mathbf{v}}(t) \end{array}$$

qui, au regard de notre construction et quitte à bien ajuster les données initiales pour $\hat{\mathbf{v}}$, met en jeu des applications linéaires $T(0)^{-1}$ et $T(\varepsilon)$ qui sont bornées conformément à

$$\| \| T(\varepsilon) \| \| \leq C \varepsilon^{-1}, \quad \| \| T(0)^{-1} \| \| \leq C.$$

Ainsi, l'inégalité (11) se relève en

$$(12) \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq C \varepsilon^{-1} \|\mathbf{v}(0)\|, \quad \forall (\varepsilon, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^+$$

ce qui est une nette amélioration par rapport à (9).

o **Etape 4 : Synthèse.** Les conditions algébriques qui sont requises pour pouvoir transférer la procédure décrite ci-dessus au cas où les matrices A , B et C sont remplacées par les opérateurs dont elles sont issues se trouvent satisfaites. Toutefois, de nombreuses difficultés surgissent lorsqu'il s'agit de faire des estimations. Parmi celles-ci, signalons :

- (i) les pertes de dérivées qui accompagnent les étapes 1 et 3. En effet, les passages de \mathbf{v} à $\tilde{\mathbf{v}}$ puis de $\tilde{\mathbf{v}}$ à $\hat{\mathbf{v}}$ reposent sur des transformations par conjugaison. Or celles-ci ne respectent aucune règle de symétrie. Elles introduisent des défauts d'hyperbolicité (pondérés par des poids en ε),
- (ii) l'application $T(\varepsilon)$ n'est pas bornée de L^2 dans L^2 mais de H^1 dans L^2 .

L'obstruction (i) est contournée par l'introduction d'ellipticité. On travaille non pas avec les équations hyperboliques mais avec la perturbation parabolique (7). On ajuste ν afin de pouvoir récupérer *in fine* des estimations d'énergie sur $\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon$. On insiste ici sur le fait que la taille minimale de la viscosité qu'il faut ajouter pour garantir (12) se lit au niveau de $\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ et non pas sur \mathcal{L}_ε .

La difficulté (ii) se résout en considérant les ε -dérivées de certaines composantes de \mathbf{v} comme étant de nouvelles variables d'état. Cela revient à faire un deuxième éclatement. Cela marche parce que, du fait de la structure très particulière des équations, les nouvelles dérivées ainsi introduites peuvent être absorbées par l'ellipticité.

Cette discussion met en valeur la nécessité d'avoir recours à de nouvelles variables d'état dans l'étude des cas critiques et, a fortiori, dans l'étude des régimes sur-critiques. C'est un principe d'une portée assez générale. Dans le chapitre qui suit, on en donne une seconde illustration.

3 Calculs formels.

Pour fixer les idées, on considère le cas incompressible (\mathcal{EI}). On veut construire des solutions approchées \mathbf{u}^ε qui satisfont

$$(13) \quad \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla \mathbf{p}^\varepsilon = \mathbf{f}^\varepsilon = O\left(\varepsilon^{\frac{N}{l}}\right), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0, \quad N \gg l.$$

On commence par rappeler comment sont menés les calculs formels en régime sous-critique.

3.1 Calculs BKW sous-critiques.

On se place dans le cadre monophasé. On prend $l = 1$. On travaille avec

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = U^\varepsilon(t, x, \varphi_0(t, x)/\varepsilon) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k U_k(t, x, \varphi_0(t, x)/\varepsilon).$$

Les valeurs des U_k à l'instant initial $t = 0$ sont fixées (par exemple comme dans le Théorème). Il s'agit de déterminer les U_k pour $t > 0$ de manière à obtenir (13). On raisonne habituellement comme suit.

(a) On reporte l'expression \mathbf{u}^ε au niveau des équations d'Euler et on ordonne les termes selon les puissances du paramètre ε qui sont en facteur

$$\mathcal{EI}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathcal{F}_j(U_1, \dots, U_{j+1}).$$

(b) On regroupe les inconnues que sont les U_j par paquets P_j . Le paquet j contient typiquement

$$P_j \equiv \{ \bar{U}_j, \Pi_0 U_j^*, (\operatorname{Id} - \Pi_0) U_{j+1}^* \}.$$

(c) On montre que la condition $\mathcal{F}_j = 0$ permet d'identifier le contenu de P_j , ceci lorsque les P_i pour $i < j$ sont connus.

(d) On applique un algorithme. On dit d'abord qui sont \mathbf{u}_0 et φ_0 . Puis on identifie les uns après les autres le contenu des P_j . On va de P_1 à P_N en suivant ci-dessous le sens des flèches

$$\boxed{\mathbf{u}_0, \varphi_0} \longrightarrow \boxed{P_1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{P_N}.$$

(e) La connaissance de tous les P_j donne accès aux U_j . On peut donc déterminer

$$U^\varepsilon(t, x, \theta) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k U_k(t, x, \theta) \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d).$$

Notons que pour tout (t, x) fixé, on est en présence d'une suite de fonctions périodiques

$$\{ U^\varepsilon(t, x, \cdot) \}_\varepsilon \in \mathcal{S} := H^\infty(\mathbb{T})^{[0,1]}.$$

(f) L'oscillation \mathbf{u}^ε est concrétisée après remplacement de la variable rapide θ via

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = U^\varepsilon(t, x, \varphi_0(t, x)/\varepsilon).$$

3.2 Action de groupe.

Il se trouve qu'il y a un groupe G qui agit sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = H^\infty(\mathbb{T})^{[0,1]} \ni \mathcal{U}(\theta) = \{U^\varepsilon(\theta)\}_\varepsilon.$$

Pour des solutions approchées d'ordre N avec $N \gg l$, on prend $G = \mathbb{R}^N$ muni de l'addition $+$. Un élément $\tau \in G$ est perçu comme une somme finie faisant intervenir les puissances d' $\varepsilon^{\frac{1}{l}}$ (en encore comme une fonction de $]0, 1[\ni \varepsilon$ à valeurs dans \mathbb{R}) par la formule

$$\tau^\varepsilon := \sum_{j=1}^N \varepsilon^{\frac{j}{l}} \tau_j, \quad \tau = (\tau_j)_{1 \leq j \leq N} \in G, \quad \varepsilon \in]0, 1].$$

Le groupe G agit sur \mathcal{S} par simple translation

$$\tau \circ \mathcal{U}(\theta) \equiv \{ \tau^\varepsilon \circ U^\varepsilon(\theta) \}_\varepsilon := \{ U^\varepsilon(\theta + \frac{\tau^\varepsilon}{\varepsilon}) \}_\varepsilon.$$

Cas particulier. La famille $\{U^\varepsilon\}_\varepsilon \in \mathcal{S}$ est obtenue en sommant un état constant $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^d$ plus N fonctions périodiques indépendantes d' ε , notées

$$U_k^c \in H^\infty(\mathbb{T}; \mathbb{R}^d), \quad 1 \leq k \leq N$$

conformément à

$$U^\varepsilon(\theta) = \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^N \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^c(\theta), \quad \varepsilon \in]0, 1].$$

On a par définition

$$\tau^\varepsilon \circ U^\varepsilon(\theta) = \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^N \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^c\left(\theta + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{l}} \tau_1 + \dots + \varepsilon^{\frac{l-1}{l}} \tau_{l-1}}{\varepsilon} + \tau_l + \dots + \varepsilon^{\frac{N}{l}-1} \tau_N\right).$$

Les scalaires τ_j pour j variant entre l et N peuvent être absorbés à l'aide d'une formule de Taylor. On récupère alors

$$\tau^\varepsilon \circ U^\varepsilon(\theta) = \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^g\left(\theta + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{l}} \tau_1 + \dots + \varepsilon^{\frac{l-1}{l}} \tau_{l-1}}{\varepsilon}\right)$$

avec des U_k^g qui en général diffèrent des U_k^c . On voit ici que la notion de profil d'ordre k est sensible au choix de τ . △

Examinons à présent ce qui se produit lorsque les paramètres (t, x) sont incorporés dans la discussion. Pour tout (t, x) , on a un élément de G . On obtient ainsi un *décalage de phase*

$$\Xi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow G$$

que l'on assimile à

$$\Xi^\varepsilon(t, x) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^{\frac{j}{l}} \varphi_j(t, x), \quad \varepsilon \in]0, 1].$$

L'ensemble \mathcal{S} est remplacé par les familles de profils

$$H^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T})^{[0,1]} \ni \mathcal{U}(t, x, \theta) = \{U^\varepsilon(t, x, \theta)\}_\varepsilon.$$

L'expression Ξ modifie \mathcal{U} selon

$$\Xi \circ \mathcal{U}(t, x, \theta) \equiv \left\{ \Xi^\varepsilon(t, x) \circ U^\varepsilon(t, x, \theta) \right\}_\varepsilon := \left\{ U^\varepsilon\left(t, x, \theta + \frac{\Xi^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon}\right) \right\}_\varepsilon.$$

Cas particulier. La famille $\{U^\varepsilon(t, x, \theta)\}_\varepsilon$ est obtenue en sommant un état de base, donné ici par la fonction $\mathbf{u}_0(t, x)$, plus N profils notés

$$U_k^c(t, x, \theta) \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d), \quad 1 \leq k \leq N$$

conformément à

$$U^\varepsilon(t, x, \theta) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^c(t, x, \theta), \quad \varepsilon \in]0, 1].$$

On pose

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) := \left(\Xi^\varepsilon(t, x) \circ U^\varepsilon(t, x, \theta) \right)_{|\theta = \varepsilon^{-1} \varphi_0(t, x)}.$$

On a par construction

$$(14) \quad \mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^c(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_c^\varepsilon(t, x))$$

où φ_c^ε est la *phase complète*

$$\varphi_c^\varepsilon(t, x) := \varphi_0(t, x) + \Xi^\varepsilon(t, x) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^{\frac{j}{l}} \varphi_j(t, x).$$

On a aussi la décomposition

$$\varphi_c^\varepsilon(t, x) = \varphi_g^\varepsilon(t, x) + \varepsilon \varphi_a^\varepsilon(t, x), \quad \varphi_a^\varepsilon(t, x) = \sum_{k=l}^N \varepsilon^{\frac{k}{l}-1} \varphi_k(t, x).$$

A cet endroit, on retrouve la phase géométrique φ_g^ε et on voit apparaître la *phase d'ajustement* φ_a^ε . Comme précédemment, on peut interpréter les choses via

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(t, x) &= \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^g(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_g^\varepsilon(t, x)) \\ &= \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^g(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_0(t, x) + \varepsilon^{\frac{1}{l}-1} \varphi_1(t, x) + \dots + \varepsilon^{-\frac{1}{l}} \varphi_{l-1}(t, x)). \end{aligned}$$

Le constat est le suivant. Les $l-1$ premières composantes de Ξ , à savoir les $\varphi_j(t, x)$ pour $1 \leq j \leq l-1$, ont pour effet de faire basculer le développement asymptotique $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x)$ vers un mode de représentation qui met en jeu plusieurs phases et plusieurs échelles. \triangle

On explique maintenant comment organiser des calculs formels en régime sur-critique.

3.3 Calculs BKW sur-critiques.

On travaille avec $l \geq 2$. On adopte d'emblée le mode de représentation en phase complète

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = U_c^\varepsilon(t, x, \varphi_c^\varepsilon(t, x)/\varepsilon) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^c(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_c^\varepsilon(t, x)).$$

Les valeurs des U_k^c à l'instant initial $t = 0$ sont fixées (par exemple comme dans le Théorème). Il s'agit de déterminer les U_k^c pour $t > 0$ afin d'obtenir (13). On raisonne pour cela de la manière suivante.

(\tilde{a}) On reporte \mathbf{u}^ε au niveau des équations d'Euler et on ordonne les termes selon les poids $\varepsilon^{\frac{j}{l}}$ qui sont mis en facteur

$$\mathcal{EI}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \sum_{j=-l}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{l}} \mathcal{F}_j^c(U_1^c, \varphi_1, \dots, U_{j+l}^c, \varphi_{j+l}).$$

(\tilde{b}) On regroupe les inconnues que sont les U_j^c et les φ_j par paquets P_j^c . Le paquet j contient

$$P_j^c = \tilde{P}_j^c \cup \{\varphi_j\}, \quad \tilde{P}_j^c \equiv \{\text{parties des } U_i^c \text{ pour } j \leq i \leq j+l\}.$$

(\tilde{c}) On montre que la condition $\mathcal{F}_j^c = 0$ permet de connaître le contenu de \tilde{P}_j^c , ceci lorsque les P_i^c pour $i < j$ sont connus et sous réserve d'une contrainte sur φ_{j+l-1} . On utilise alors la contrainte correspondante issue de l'étape précédente $i = j-l+1 < j$, portant sur φ_j , pour déterminer φ_j . Dès lors, on a accès à P_j^c tout entier.

A l'occasion de ce procédé, les parties des U_i^c pour $j < i \leq j+l$ mises en jeu dans \tilde{P}_j^c sont exprimées en fonction de U_j^c tandis que l'inconnue U_j^c est identifiée. On peut donc résumer (\tilde{c}) en disant que d'une part on extrait une équation $\mathcal{L}_j^c(U_j^c) = 0$ dont on s'assure qu'elle est bien posée et que d'autre part on met à jour des relations donnant en fonction de U_j^c l'expression φ_j et les parties des U_i^c pour $j < i \leq j+l$ mises en jeu dans \tilde{P}_j^c .

(\tilde{d}) On applique un algorithme. On dit d'abord qui sont \mathbf{u}_0 et φ_0 . Puis on identifie les uns après les autres les P_j^c par résolution successive des équations

$$\mathcal{L}_j^c(U_j^c) = 0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

On va de P_1^c à P_N^c en suivant ci-dessous le sens des flèches

$$\boxed{\mathbf{u}_0, \varphi_0} \longrightarrow \boxed{P_1^c} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{P_N^c} \longrightarrow \boxed{\varphi_c^\varepsilon !}$$

(\tilde{e}) La connaissance de tous les P_j^c donne accès aux U_j^c . On peut donc déterminer

$$U_c^\varepsilon(t, x, \theta) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^c(t, x, \theta) \in H^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d).$$

(\tilde{e}') On extrait les φ_j des P_j^c et on les mélange pour former la phase complète $\varphi_c^\varepsilon(t, x)$.

(\tilde{f}) L'oscillation \mathbf{u}^ε est concrétisée selon $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = U_c^\varepsilon(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_c^\varepsilon(t, x))$.

Notons deux différences principales avec le paragraphe 3.1. D'abord l'introduction d'une infinité de nouvelles inconnues (que sont les φ_j). Ensuite l'intervention de l'étape (\tilde{e}') durant laquelle on va chercher la phase complète, objet qui dans (\tilde{f}) vient remplacer la variable rapide θ . Or l'expression φ_c^ε est située en amont de la procédure et non pas (comme l'était φ_0) en aval. Cette modification a des conséquences que l'on décrit dans un dernier paragraphe.

3.4 Conséquences.

On revient ici sur les questions soulevées dans les paragraphes 1.1 et 1.2.

◦ *Première conséquence (relative au problème de la fermeture).* On explique maintenant pourquoi des calculs formels mettant en jeu un nombre fini de phases ne peuvent pas aboutir. Examinons par exemple ce que donneraient des calculs effectués avec la *phase géométrique*, c'est à dire basés sur le mode de représentation

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_k^g(t, x, \varphi_g^\varepsilon(t, x)/\varepsilon).$$

On reporte comme toujours \mathbf{u}^ε au niveau des équations d'Euler pour extraire cette fois-ci

$$(16) \quad \mathcal{EI}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \sum_{j=-l}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{l}} \mathcal{F}_j^g(U_1^g, \varphi_1, \dots, U_g^l, \varphi_l, \dots, U_{j+l}^g).$$

On sait d'après l'analyse faite en 3.3 que les conditions $\mathcal{L}_j^c(U_j^c) = 0$ jouent un rôle clé. La question est tout compte fait de savoir comment retrouver l'équation $\mathcal{L}_j^c(U_j^c) = 0$ en fonction des contraintes $\mathcal{F}_i^g = 0$ et des U_i^g . Il se trouve qu'on dispose pour cela d'une formule explicite qui exprime U_j^c en fonction des U_i^g pour $i \leq j$ et des φ_i pour $i \leq j + l - 1$ avec une dépendance effective en φ_{j+l-1} . Ce lien est explicité dans [4]. Ce sont les relations (4.24), (4.25) et (4.26) de [4] dans lesquelles il faut juste changer les φ_i en $-\varphi_i$.

Ce décalage d'indices (de j à $j + l - 1 > j$) se retrouve au niveau de l'interprétation de $\mathcal{L}_j^c(U_j^c) = 0$. Pour exprimer cette contrainte en fonction des U_i^g , on a besoin d'avoir recours à φ_{j+l-1} . Ainsi, pour $l \geq 2$, il faut connecter le paquet P_j^c avec l'élément φ_{j+l-1} situé à la droite de P_j^c dans l'algorithme sur-critique. En clair, on doit aller chercher P_{j+l-1}^c et recommencer l'interprétation. On est alors de nouveau confronté à la même difficulté. Et ainsi de suite jusqu'au cran N . Autrement dit, le changement de mode de représentation ne respecte pas le cloisonnement (entre les P_j^c) établi au paragraphe 3.3. Du coup, il a pour effet de rendre les U_i^g (pour $1 \leq i \leq N$) interdépendants.

Dans ces conditions, la seule manière de déduire l'équation $\mathcal{L}_j^c(U_j^c) = 0$ à partir de (16), c'est d'écrire toutes les conditions $\mathcal{F}_i^g = 0$ (pour $1 \leq i \leq N$) puis d'effectuer des recombinaisons qui dépendent de tous les U_i^g (pour $1 \leq i \leq N$). En théorie, le traitement des N premières contraintes $\mathcal{F}_i^g = 0$ conduit effectivement à des solutions approchées d'ordre $\varepsilon^{\frac{N}{l}}$. Mais on ne peut pas atteindre cette précision $\varepsilon^{\frac{N}{l}}$ en procédant étape par étape, par exemple en regardant les 30 premières équations $\mathcal{F}_i^g = 0$ puis en passant aux 30 suivantes et ainsi de suite jusqu'à atteindre N . Dans la pratique, c'est l'introduction des φ_i qui donne accès à un algorithme et qui par conséquent rend possible la modélisation.

◦ *Deuxième conséquence (relative au problème de la stabilité).* Le point de vue développé au paragraphe 3.3 apporte aussi un éclairage sur certains phénomènes d'amplification de la norme L^2 . Pour illustrer cette affirmation, on considère à l'instant initial $t = 0$ une oscillation

$$\mathbf{u}_0^\varepsilon(x) = \mathbf{u}_0(0, x) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^{\frac{k}{l}} U_{0k}^c(x, \varepsilon^{-1} \varphi_c^\varepsilon(0, x))$$

que l'on perturbe au cran N par le profil seulement

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon(x) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x) + \varepsilon^{\frac{N}{T}} M_N^c(x, \varepsilon^{-1} \varphi_c^\varepsilon(0, x)), \quad \partial_\theta M_N^c \neq 0$$

de sorte que l'on a

$$(17) \quad (\mathbf{u}_0^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon)(\cdot) = O(\varepsilon^{\frac{N}{T}}).$$

Cette modification se lit comme suit sur l'algorithme

$$\boxed{\mathbf{u}_0, \varphi_0} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \varphi_1(0, \cdot) \\ U_{01}^c \end{array}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \varphi_{N-1}(0, \cdot) \\ U_{0(N-1)}^c \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \varphi_N(0, \cdot) \\ U_{0N}^c / U_{0N}^c + M_{0N}^c \end{array}}.$$

D'après les calculs formels, ces données se transforment à l'instant $t > 0$ en

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon^{\frac{k}{T}} U_k^c(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_c^\varepsilon(t, x)) + \varepsilon^{\frac{N}{T}} U_N^c(t, x, \varepsilon^{-1} \varphi_c^\varepsilon(t, x))$$

et

$$\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{u}_0(t, x) + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon^{\frac{k}{T}} U_k^c(t, x, \varepsilon^{-1} \tilde{\varphi}_c^\varepsilon(t, x)) + \varepsilon^{\frac{N}{T}} \tilde{U}_N^c(t, x, \varepsilon^{-1} \tilde{\varphi}_c^\varepsilon(t, x)).$$

On obtient

$$\tilde{\varphi}_c^\varepsilon(t, x) = \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^{\frac{j}{T}} \varphi_j(t, x) + \varepsilon^{\frac{N}{T}} \tilde{\varphi}_N(t, x)$$

avec de façon générique

$$\tilde{\varphi}_N(t, x) \neq \varphi_N(t, x), \quad t > 0.$$

Ceci implique l'existence d'une constante

$$c \in [\varepsilon^{\frac{N}{T}-1} \tilde{\varphi}_N(t, x), \varepsilon^{\frac{N}{T}-1} \varphi_N(t, x)]$$

telle que l'on ait

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)(t, x) &= \varepsilon^{\frac{1}{T}} \partial_\theta U_1(t, x, c) \varepsilon^{\frac{N}{T}-1} (\varphi_N - \tilde{\varphi}_N)(t, x) + O(\varepsilon^{\frac{N+2}{T}-1}) \\ &\sim \varepsilon^{\frac{1}{T}-1} \times \varepsilon^{\frac{N}{T}}, \quad \frac{1}{T} - 1 < 0! \end{aligned}$$

En comparaison avec (17), on retrouve ici la perte fixe d'une puissance négative d' ε , à l'instar de ce qui a été constaté dans l'étude du linéarisé menée au chapitre 2. On comprend mieux aussi d'où proviennent les instabilités apparentes définies au paragraphe 1.2. Elles apparaissent lors de l'étape de substitution (\tilde{f}).

Un bon point de vue en régime sur-critique consiste donc à travailler avec de nouvelles variables d'état (par exemple ci-dessus ce sont les φ_j). C'est du moins ce qu'indique notre analyse.

References

- [1] T. Chacon Rebollo, *Oscillations due to the transport of microstructures*, SIAM J. Appl. Math., Vol 48, No 5, Octobre 1988.
- [2] J-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, *Fluids with anisotropic viscosity*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN, Vol. 34, 2, 315–335 (2000).
- [3] C. Cheverry, *Propagation of Oscillations in Real Vanishing Viscosity Limit*, Commun. Math. Phys. 247, 655-695 (2004).
- [4] C. Cheverry, *Cascade of phases in turbulent flows*, à paraître au Bulletin de la SMF.
- [5] C. Cheverry, O. Guès, G. Métivier, *Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 36, 2003, p. 691 à 745.
- [6] C. Cheverry, O. Guès, G. Métivier, *Large amplitude high frequency waves for quasilinear hyperbolic systems*, To appear in Advances in Differential equations.
- [7] R.-J. DiPerna, A.-J. Majda, *Oscillations and Concentrations in Weak Solutions of the Incompressible Fluid Equations*, Commun. Math. Phys. 108, 667–689 (1987).
- [8] S. Friedlander, W. Strauss, M. Vishik, *Nonlinear instability in an ideal fluid*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 14, no. 2 (1997), 187–209.
- [9] D. W. McLaughlin, G. C. Papanicolaou, O. R. Pironneau, *Convection of microstructure and related problems*, SIAM J. Appl. Math., Vol 45, No 5, Octobre 1985.
- [10] D. Serre, *Oscillations nonlinéaires de haute fréquence ; $dim \geq 2$* , In Marino A. and Murthy M. K. V., editors, Nonlinear variational problems and partial differential equations, volume 320 of Pitman Res. notes in Math., pages 245-294, London, 1995. Longman.